



Cambio, modelización y álgebra como lenguaje en el currículo de matemáticas costarricense

Change, Modelization, and Algebra as a Language in the Costa Rican Mathematics Curriculum

*Marianela Zumbado-Castro*¹
Universidad Estatal a Distancia
Costa Rica
mazumbado@uned.ac.cr



Resumen

El objetivo de este ensayo es brindar una aproximación analítica de aquellos aspectos en los cuales el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica fue consistente en relación con la organización del área de Relaciones y Álgebra del currículo de enseñanza de las matemáticas desde el III ciclo de la Educación General Básica hasta la Educación Diversificada. Para argumentar la respuesta, se recurre a la perspectiva de la OCDE para la categoría “Cambio y relaciones” y se compara de manera crítica con las habilidades generales del área de Relaciones y Álgebra de los programas de matemáticas costarricenses mediante un diseño metodológico de enfoque cualitativo que emplea el análisis documental–interpretativo. Se



Recibido: 31 de marzo de 2022 . Aprobado: 20 de octubre de 2022

<http://doi.org/10.15359/rep.17-2.1>

1 Profesora de la Cátedra Didáctica de la Matemática de la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica y miembro del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, adscrito al Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. Doctora en Educación, Magíster en Docencia y Licenciada en Enseñanza de la Matemática. <https://orcid.org/0000-0002-5774-1884>

identificaron tres grupos de destrezas como referencias analíticas: el cambio, la modelización y el álgebra como lenguaje. Se afirma que la propuesta ministerial es coherente con la OCDE y se mantiene hasta la Educación Diversificada. Además, se argumenta que las habilidades para plantear problemas requieren de investigación para su apropiada implementación en las aulas.

Palabras clave: Álgebra, docentes de secundaria, enseñanza de las matemáticas, enseñanza secundaria, plan de estudio.

Abstract

The objective of this essay is to provide an analytical approach to those aspects in which the Ministry of Public Education of Costa Rica was consistent in relation to the organization of the Relations and Algebra area of the mathematics teaching curriculum from the III cycle of Education General Basic to Diversified Education. To argue the answer, the OECD perspective is used for the category “Change and relationships,” and it is compared critically with the general skills of the area of Relationships and Algebra of the Costa Rican mathematics programs, through a methodological design of qualitative approach that uses documentary-interpretive analysis. Three groups of skills were identified as analytical references: change, modeling, and algebra as a language. It is stated that the ministerial proposal is consistent with the OECD and is maintained until Diversified Education. In addition, it is argued that problem posing skills require research for their proper implementation in the classroom.

Keywords: Algebra, Curriculum, mathematics education, secondary education, secondary teacher education

Introducción

A partir de la aprobación de los programas de estudio de Matemáticas para I, II y III Ciclo de la Educación General Básica y Educación Diversificada, en el año 2012, por parte del Consejo Superior de Educación de Costa Rica (institución encargada de las decisiones educativas del país), se incluyen en el currículo un conjunto de transformaciones, tales como: la estrategia metodológica principal; la delimitación de tópicos, la inclusión de nuevos contenidos, la continuidad de las habilidades generales desde el primer año de la



primaria hasta el undécimo año en secundaria de manera articulada, entre otras.

En consecuencia, el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP) adopta la agrupación de los conocimientos de las matemáticas en: Números, Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra, Estadística y Probabilidad; en adición, el MEP asume que los procesos de enseñanza y aprendizaje propiciarán habilidades generales y específicas, si se comprende la perspectiva y abordaje de cada área.

En el 2020, los programas cumplen ocho años desde su aprobación y cuatro años de una implementación completa. Durante este periodo, no se ha publicado ningún documento crítico sobre el planteamiento asumido por el ente ministerial respecto a las áreas matemáticas seleccionadas; por tanto, se quiere hacer un aporte en esta línea.

La pregunta emergente es ¿en cuáles aspectos fue consistente el MEP en la organización del área Relaciones y Álgebra? Esta pregunta corresponde al foco de interés de este ensayo, en particular después de la incorporación en mayo del 2021 de Costa Rica a la OCDE, Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OECD, 2021).

Las interrogantes orientadoras del análisis sobre la organización seleccionada por el ente ministerial en 2012 son: (1) ¿cuál es la propuesta de la OCDE para el área de Relaciones y Álgebra?; (2) ¿cuál es la propuesta nacional para el área de Relaciones y Álgebra?; (3) ¿cómo se compara el plan del MEP en relación con las recomendaciones de la OCDE y en referencia a las unidades de análisis: cambio, modelación y álgebra como lenguaje?; (4) ¿cuál es la organización desde séptimo hasta undécimo año en el currículo costarricense del área Relaciones y Álgebra?

El planteamiento de cada área matemática del currículo es extenso, por lo tanto, es imposible de analizar en este documento, entonces, la reflexión se limitará a Relaciones y Álgebra. Por lo tanto, el propósito de este ensayo es brindar una aproximación analítica de aquellos aspectos en que el MEP fue consistente en la organización del área de Relaciones y Álgebra en comparación con la perspectiva de la OCDE, desde las categorías de análisis: *el cambio, la modelización y el álgebra como lenguaje*.

Perspectiva de la OCDE sobre “Cambio y relaciones”

Los países asociados a la OCDE poseen una iniciativa para medir “los resultados de los sistemas educativos en lo que respecta al

rendimiento del alumnado, dentro de un marco común y acordado a nivel internacional” (OCDE, 2017, p. 3). Los resultados del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés) tienen implicaciones en las políticas educativas y curriculares de los países participantes (Harlen, 2016).

Las pruebas PISA son aplicadas a estudiantes que rondan los 15 años de edad. Las destrezas en cada área matemática consideran su desarrollo a través de 10 años de escolaridad en promedio. Estas poseen categorías de contenido; una de ellas es “Cambio y relaciones”, la cual determina el dominio de habilidades vinculadas con las variantes de las posibles relaciones entre objetos matemáticos, tanto en contextos reales como artificiales.

Algunas de las condiciones consideradas en la prueba de matemáticas son: el tiempo, la cantidad, el objeto mismo, la continuidad o discontinuidad del cambio, y las relaciones permanentes o constantes (OCDE, 2017). Por ejemplo, hallar la diferencia en el precio de una bebida en función de la altura y la base de dos recipientes que poseen la misma forma para decidir cuál producto es más conveniente comprar. Los objetos geométricos están presentes, pero la relación entre precio y volumen responde a la pregunta planteada (OCDE, 2017).

Cambio

Según la OCDE (2017), “[t]ener más conocimientos sobre el cambio y las relaciones supone comprender los tipos fundamentales de cambio y reconocer cuándo tienen lugar, con el fin de utilizar modelos matemáticos adecuados para describirlo y predecirlo” (p. 74); la perspectiva mecánica del aprendizaje es trascendida porque se busca la modelización del entorno a través de ecuaciones, funciones o representaciones gráficas. El requisito es un estudiantado capaz de “crear, interpretar y traducir entre las representaciones simbólicas y gráficas” (p. 75).

Modelización

Modelar implica alta demanda cognitiva para el estudiantado, porque favorece la conexión entre múltiples disciplinas, propicia el vínculo entre los conocimientos previos y nuevos, así como las actividades de razonamiento, de argumentación y el uso de diversas representaciones (Alvarez y Patagua, 2018; MEP, 2012; Ríos-Cuesta, 2020; Ruiz, 2018).

La perspectiva plasmada sobre la modelización por la OCDE (2017) impregna los currículos de los países que la integran. Es frecuente



encontrar referencia a estas ideas en los programas de matemáticas, por ejemplo, en Chile y México. En el caso del primer país, la habilidad “modelar” se ajusta para cada nivel educativo. Por ejemplo, la descripción utilizada para 2° medio (estudiantes entre 15 y 17 años de edad) implica entre otras cosas: “Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad” ([Ministerio de Educación de Chile, 2015, p. 122](#)), así como seleccionar e identificar modelos, ajustarlos, evaluarlos e incluso establecer sus limitaciones. De acuerdo con la [Secretaría de Educación Pública de México](#), un razonamiento complejo es la “Forma de pensamiento que articula modelos de la realidad a partir del reconocimiento y la identificación de varias dimensiones” (2017, p. 26) y conlleva la identificación de componentes de la realidad de manera integral.

Para la [OCDE \(2017\)](#), la modelización es la identificación de comportamientos o cambios requieren de un lenguaje comprensible para: sintetizar, teorizar y comunicar los resultados a la comunidad académica. Los símbolos y su vínculo con el contexto están implícitos en el desarrollo del área. La modelización es un recurso pedagógico, porque integra las matemáticas abstractas y la realidad.

El proceso de modelación o modelización matemática implica las siguientes acciones: (1) identificar el problema, (2) hacer suposiciones, (3) identificar las relaciones, (4) efectuar los cálculos, (5) analizar y evaluar la solución, (6) realizar comprobaciones (iteraciones) para delimitarlo y, finalmente, (7) implementar el modelo en una situación homóloga ([Bliss y Libertini, 2020](#)).

Álgebra como lenguaje

De acuerdo con la [OCDE \(2017\)](#), “Cambio y relaciones” está presente en diversos contextos como la biología, el arte, la economía, entre muchos otros. Los contenidos matemáticos clásicos son necesarios para su desarrollo y comprensión, entre ellos: el lenguaje algebraico, las ecuaciones, las inecuaciones, las funciones, las representaciones tabulares y gráficas.

El álgebra es indispensable en la modelización, debido a que esta última es el conjunto de acciones que involucran la creación, la identificación o el uso de un modelo que describa con símbolos una situación real mediante ideas matemáticas que permitan representar, analizar,

explicar y predecir alguna realidad o fenómeno del mundo (Alvarez y Patagua, 2018; Bliss y Libertini, 2020; MEP, 2012; Ríos-Cuesta, 2020). Manejar el cambio, la modelización y el lenguaje algebraico son destrezas esperadas en el estudiantado que ronda los 15 años de edad. La modelización posee características que obligan a una sinergia del cambio y el álgebra como lenguaje.

Perspectiva nacional sobre la Educación Matemática

El cambio, la modelización y el álgebra como lenguaje son elementos consignados en el área denominada Relaciones y Álgebra en el currículo costarricense. El sistema educativo nacional está ordenado en tres ciclos de tres años, cada uno en la Educación General Básica (EGB) y dos años en la Educación Diversificada. A partir del 2012, el currículo costarricense de matemáticas se organizó mediante habilidades generales y específicas que concretan la competencia matemática a través de los once años escolares.

El MEP (2012) asume la definición de competencia matemática empleada por la OCDE (2010) y cita:

una capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las Matemáticas en una variedad de contextos. Incluye razonar matemáticamente y usar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel de las Matemáticas en el mundo y hacer juicios bien fundados y decisiones necesarias para ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. (p. 23)

La competencia matemática asume una posición integral de las actividades vinculadas con maneras de pensar y hacer matemáticas. La resolución de problemas agrega la convivencia entre el estudiantado, de manera consistente con la política curricular nacional (MEP, 2012). Por tanto, la competencia señalada y la estrategia metodológica principal se posicionan como herramientas para la vida.

La competencia matemática es la aspiración máxima del currículo nacional. Las habilidades generales se establecen por ciclo educativo y área matemática; conforme se avanza en las habilidades generales, se tiende hacia esa pretensión (Barrantes, 2015). Cada habilidad general por área será propiciada a través de un conjunto de habilidades específicas.

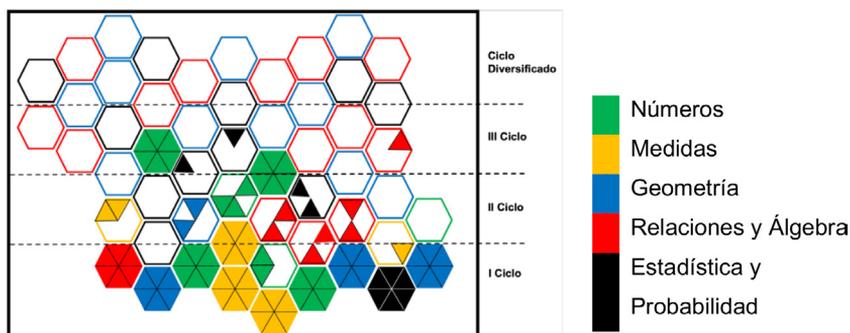


De acuerdo con el MEP (2012), las habilidades específicas son diferentes a los objetivos. Ellas son flexibles, agrupables, graduales y propician las habilidades generales que son partes de la competencia matemática. Los problemas y tareas matemáticas son la manera de propiciar las habilidades específicas y, en consecuencia, las habilidades generales y la competencia matemática (Alsina y Coronata, 2015; Barrantes, 2015; Loría y Lupiáñez, 2019; Mena *et al.*; 2019; MEP, 2012; OCDE, 2017; Ruiz, 2013, 2015, 2018).

La Figura 1 ejemplifica el vínculo entre cuatro elementos: competencia matemática, habilidades generales, habilidades específicas y gradualidad entre las habilidades específicas, para el caso particular de una persona estudiante que está cursando el II Ciclo de la EGB.

Figura 1

Relación entre competencia matemática, habilidades generales, habilidades específicas y gradualidad, para una persona durante el II Ciclo de la EGB



Nota: Elaboración propia.

El rectángulo de fondo blanco representa la competencia matemática; cada hexágono, una habilidad general, y cada triángulo, una habilidad específica. Seis triángulos cubren la superficie del hexágono. Las nuevas destrezas se adquieren cuando se avanza en los ciclos escolares. En cada año escolar, se adquieren habilidades específicas y, con ellas, se completan las generales. En los primeros ciclos, debido a las expectativas de aprendizaje, se completan habilidades específicas de los ciclos superiores, con lo cual se marcha escalonadamente hacia la competencia matemática.

Metodología

Para este ensayo, se optó por la aplicación de un diseño metodológico de enfoque cualitativo de análisis documental-interpretativo, el cual implicó un análisis comparativo entre la propuesta de la OCDE (2017) y los programas oficiales de matemáticas costarricense (MEP, 2012), empleando las siguientes categorías de análisis: *cambio, modelización y álgebra como lenguaje*. Los puntos centrales de la propuesta de la OCDE para “Cambio y relaciones” se identificaron y compararon con la organización de las habilidades generales del área de “Relaciones y Álgebra” de los programas costarricenses en relación con su evolución a través de los años escolares analizados, con el fin de mostrar aspectos empleados en la organización del área y poder realizar alguna comparación.

Algunos resultados

El área de Relaciones y Álgebra agrupa para el MEP (2012) las ideas de “Cambio y relaciones” de la OCDE. Ella incluye: patrones, relaciones numéricas, relaciones geométricas, funciones, ecuaciones, inecuaciones, expresiones y relaciones simbólicas. La simbolización se agrega para favorecer e incentivar la generalización. Asimismo, el álgebra se incorpora como una herramienta de representación de objetos matemáticos numéricos y geométricos, pero trasciende la manipulación algebraica y algorítmica.

Según Ruiz (2018), en el caso de los programas costarricenses, se favoreció “un tratamiento funcional” (p. 97) de las expresiones simbólicas para dotar de significado a los tópicos, situación que es favorecida con el uso de contextos reales y la modelización.

De acuerdo con el MEP (2012), al concluir el II Ciclo de la EGB la persona estudiante entre los 12 y 13 años estará en capacidad de:

1. Analizar patrones numéricos y no numéricos.
2. Pasar de representaciones verbales a numéricas.
3. Representar relaciones entre cantidades variables.
4. Determinar el valor desconocido en una expresión numérica.
5. Analizar gráficas de figuras con escala.
6. Identificar distintas representaciones de una proporción numérica.
7. Utilizar letras para representar cantidades variables.
8. Aplicar regla de tres y porcentaje en la solución de problemas.
9. Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada. (p. 231)



Al egresar de sexto año en la educación primaria, el estudiantado posee destrezas iniciales para interpretar el cambio y las relaciones, como lo establece la OCDE (2017). Las habilidades 1, 3, 7 y 8 favorecen el reconocimiento de ¿cuándo se da o no un cambio? Las destrezas asociadas con la modelización como: patrones, ecuaciones, representaciones gráficas y funciones se propician con las habilidades generales 1, 4, 5, 6 y 7. Además, el uso del álgebra como lenguaje es considerado en la habilidad 2. Respecto a la habilidad general 9, ella enmarca las habilidades anteriores en el planteo y resolución de problemas.

Cambio

Para el III Ciclo de la EGB, el propósito es ampliar las habilidades ya adquiridas, pero profundizando en relaciones de tipos más específicos, entre ellas: lineales, cuadráticas, proporcionalidad inversa, con representaciones verbales, tabulares, algebraicas y gráficas. De manera gradual, desde la primaria, se comienza a trabajar la idea de patrón y de cambio, pero es hasta en séptimo año con la proporcionalidad directa e indirecta que se inicia el estudio de las funciones de una manera más formal.

En octavo año ya se estudia la relación proporcional $y = ax$ y se trasciende a la función lineal $y = ax + b$ (MEP, 2012). Es importante acotar que, para octavo año, el estudio de la función lineal se limita a la identificación de situaciones del contexto que pueden ser expresadas a través de su estructura y la representación de ella mediante tablas, gráficas y expresiones algebraicas. Para este momento, no se estudian los siguientes aspectos: (1) la reducción a su forma canónica, (2) la construcción del criterio utilizando dos puntos, (3) el comportamiento de la pendiente y la intersección con los ejes; estos aspectos serán abordados hasta en décimo año (MEP, 2012).

Modelización

Los conocimientos relacionados con la proporcionalidad y la función lineal desde su delimitación son fundamentales para comenzar a fortalecer las habilidades de modelización, gracias al uso de modelos sencillos. El MEP (2012) establece seis pasos que son equivalentes a la propuesta de Bliss y Liberini (2020) para la modelización. El paso 5 enfatiza la interpretación antes de evaluar. En ambas propuestas, las actividades cognitivas implicadas son de alta exigencia para el estudiantado.

En la Figura 2, se muestra un problema contextualizado y modelado mediante una función lineal. Este parte de los siguientes datos preliminares: el producto tiene un costo de \$250 y el tipo de cambio del dólar para el día 17 de octubre del 2020 es de ₡597.

Figura 2

Problema para sétimo año que implica una función lineal

La silla de gamer

Carlos quiere comprar una silla de *gamer* con un costo de \$250 y sabe que el tipo de cambio del dólar para el día 17 de octubre es de ₡597. Suponiendo que el dólar se mantiene estable, ¿Por cuántos meses debe ahorrar ₡15 000 antes de poder comprar la silla?



Nota: Elaboración propia (imagen tomada de <https://www.freepng.es/png-dglo5v/download.html>).

El proceso resolutorio del problema en la Figura 2 implica algunas acciones, entre ellas: calcular ¿cuántos dólares aproximadamente puede comprar con ₡15 000?, o ¿cuál es el costo en colones de la silla? Si la persona estudiante opta por la primera estrategia, puede adquirir mensualmente poco más de \$25, entonces responderá que en unos 10 meses podrá comprar la silla. Por ejemplo, si una entidad bancaria cobra ₡500 de comisión por una transferencia mensual, una representación algebraica del ahorro en colones que realiza Carlos para comprar la silla *gamer* es: $f(x) = 15000x - 500$

En la expresión anterior, x representa la cantidad de meses, mientras que -500 representa la comisión de la transferencia bancaria por ₡500. Además, la persona estudiante puede usar el modelo para analizar otros elementos. Obsérvese la Tabla 1.



Tabla 1

Relación entre cantidad de meses y el ahorro de Carlos

Cantidad de meses X	1	2	3	4	...	9	10
Ahorro por mes $15\ 000 \times -500$	14 500	29 500	44 500	59 500	...	134 500	149 500

Nota: Elaboración propia con base en el problema planteado.

En la Tabla 1, se muestra ¿cuánto dinero ha ahorrado Carlos?, lo que permite tomar decisiones sobre la conveniencia de realizar transferencias bancarias mensualmente. Las representaciones algebraicas y tabulares han sido empleadas de manera simultánea y natural.

Otra relación particular que se estudia es la función cuadrática, la cual se trabaja en noveno año priorizando la identificación de situaciones del contexto y las múltiples representaciones y, de manera análoga, al abordaje de la función lineal. Se deja para décimo año sus propiedades, entre ellas: inyectividad, influencia de los parámetros, dominio, ámbito y vínculo con la representación gráfica.

El MEP (2012) explicita que tanto en octavo como en noveno año se pretende “un acercamiento más intuitivo” (MEP, 2012, p. 327) de estas funciones. Las ecuaciones lineales y cuadráticas se estudian de manera posterior a su función para retomar algunos elementos teóricos del lenguaje algebraico.

Álgebra como lenguaje

En octavo año, la simbolización se hace presente mediante la identificación de expresiones algebraicas, la manipulación de leyes de potencias y el cálculo del valor numérico; se incluye el reconocimiento de: monomio, binomio, trinomio y polinomios, así como las operaciones de suma, resta y multiplicación, pero únicamente “los tres primeros productos notables $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$ ” (MEP, 2012, p. 334). En noveno año, se profundiza en la factorización, para lo cual se estudia la división de polinomios, expresiones algebraicas fraccionarias y la racionalización del denominador.

El MEP (2012) delimita el abordaje de estos tópicos. Se especifica el tipo de factorización completa a la que se aspira: “polinomios de una o dos variables con no más de cuatro términos” (p. 338); además, la delimitación sobre la división de polinomios indica que lo más

complejo será el cociente entre dos trinomios en una variable y, respecto a la racionalización, se indica un denominador con suma o resta que puede incluir solo dos variables. Cabe señalar que se hace énfasis en la completación de cuadrados como estrategia de factorización.

Cambio, modelización y álgebra como lenguaje en Educación Diversificada

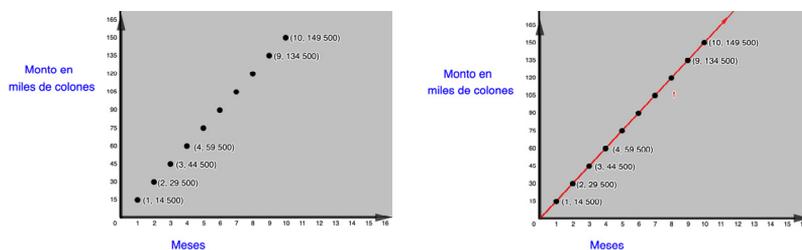
A partir de la Educación Diversificada en Costa Rica, las habilidades y conocimientos desarrollados no están necesariamente enmarcados por lo recomendado por la OCDE (2017), debido a que su delimitación del área “Cambio y relaciones” responde a las Pruebas PISA que evalúan estudiantes que rondan los 15 años de edad. Sin embargo, los dos años escolares que la conforman serán analizados en este documento, mediante las tres líneas anteriores: cambio, modelización y álgebra como lenguaje.

El concepto de función es precisado con los insumos aportados durante la primaria y el III ciclo de la EGB. Durante la formalización, se utilizan los conjuntos numéricos y algunos de sus elementos: la unión, la intersección, la pertenencia, el subconjunto, el complemento y el intervalo. El MEP (2012) indica respecto a ellos que el propósito “es utilizar estos conocimientos como lenguaje para el tratamiento de funciones y ecuaciones” (MEP,2012, p. 406); por tanto, no se deben evaluar, sino emplearlos como una herramienta.

Además, el MEP (2012) recomienda favorecer la visualización de las funciones por medio del uso de gráficas y el apoyo de las tecnologías digitales. A continuación, se muestra la diferencia entre la representación gráfica que se puede elaborar en octavo año y como esta evoluciona en décimo año cuando se formalizan las funciones (ver Figura 3).

Figura 3

Ahorro mensual de Carlos, representación gráfica en octavo año y representación gráfica de la función f , en décimo año



Nota: Elaboración propia.



La Figura 3 muestra un avance en la representación gráfica. Durante décimo año, el cambio y la relación se enfatizan mediante la formalización del concepto de función y los elementos para su análisis: “dominio, imagen, preimagen, ámbito, inyectividad, crecimiento, decrecimiento, ceros, máximo y mínimo, análisis de gráficas de funciones, composición de funciones, función lineal, función cuadrática” (MEP, 2012, p. 406). En este mismo año escolar, es posible realizar una gráfica continua, debido a que se ha establecido el dominio de la función lineal. Además, se enfatiza el uso de representaciones (simbólicas, tabulares y gráficas) y se incluye la evaluación de la función en distintos puntos de su dominio.

El sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es un tópico cuya articulación se debe realizar con cuidado. Con este contenido, se pretende la modelización de alguna situación del contexto donde se interprete la respuesta y se acompañe con una representación gráfica. Diversos métodos de solución son la propuesta para su abordaje.

En undécimo año, el estudio se centra en diversas funciones, entre ellas: la inversa de la función lineal, la raíz cuadrada, la exponencial y la logarítmica. Además, se trabajan sus representaciones algebraicas y gráficas; finalmente, se aborda la modelización (MEP 2012). Estas actividades siguen siendo el estudio del cambio y los modelos.

Respecto al lenguaje algebraico, el MEP (2012) señala como propósito del ciclo “desarrollar en cada estudiante habilidades para interpretar, representar y resolver problemas, utilizando el lenguaje funcional en sus distintas representaciones con el fin de explorar y modelar situaciones del contexto” (p. 405). Esto evidencia un manejo del lenguaje algebraico en las funciones.

En la Tabla 2, se presenta la evolución de las habilidades generales de Relaciones y Álgebra en la propuesta del MEP (2012) y el marco referencial de la OCDE (2017) de acuerdo con los siguientes aspectos: cambio, modelización y álgebra como lenguaje desde el sétimo hasta el undécimo año.

Tabla 2

Evolución por año escolar de habilidades generales de Relaciones y Álgebra según los aspectos: cambio, modelización y álgebra como lenguajes

OCDE / AÑO ESCOLAR	7°	8°	9°	10°	11°
Cambio	Patrones	Función lineal	Función cuadrática	Función lineal y cuadrática	Función inversa, exponencial y logarítmica
	Proporcionalidad	Función lineal	Función cuadrática	Función lineal	Función inversa
Modelización	Representación: verbal, tabular, gráfica y algebraica	Representación: tabular, algebraica y gráfica Ecuación lineal	Representación: tabular, algebraica y gráfica Ecuación cuadrática	*Sistemas de ecuaciones lineales Función cuadrática	Función exponencial Función logarítmica Modelización
Álgebra como lenguaje		Expresiones algebraicas, operaciones con polinomios	Expresiones algebraicas, factorización y simplificación. Completación de cuadrados como estrategia de factorización.	Lenguaje funcional	Lenguaje funcional Propiedades de los logaritmos

Nota: Elaborado a partir de [OCDE \(2017\)](#) y [MEP \(2012\)](#); (*) no corresponde al orden propuesto en los programas oficiales de matemáticas.

En cada año escolar, se parte de una idea intuitiva y se agregan elementos que contribuyen con cada habilidad específica que, a su vez, completan las habilidades generales y potencian la competencia matemática. El proceso es gradual, aunque el ordenamiento de las habilidades generales puede presentar oportunidades de mejora.



Conclusiones

El propósito de este ensayo ha sido mostrar aspectos empleados en la organización del área de Relaciones y Álgebra por el MEP de Costa Rica y poder así realizar una comparación respecto a los planteamientos de la OCDE para la categoría “Cambio y relaciones” de acuerdo con las tres categorías de análisis utilizadas.

Respecto al cambio de 7° a 11° año existe secuencia y gradua- lidad. La modelización está presente en los cinco años e incluye las diversas representaciones de las relaciones estudiadas. El álgebra como lenguaje muestra un vacío durante séptimo año, pero gradualmente se avanza hacia una mayor complejidad.

Un resultado interesante es que dentro de las expectativas de aprendizaje de la OCDE (2017) no se encuentra “plantear problemas”; sin embargo, el MEP (2012) incluye este factor como una habilidad es- tudiantil al egresar de la primaria. El MEP (2012) asume que la acción de plantear y resolver problemas implica actividades cognitivas distin- tas. Respecto al planteamiento de problemas, se enfatizan los contextos reales como escenarios ideales para propiciar habilidades, tales como: identificar, formular y diseñar preguntas que requieran de una respues- ta. Resolver problemas está asociado con: estrategias, planes, modelos y métodos de resolución.

Las indicaciones puntuales y metodológicas en los programas oficiales son escasas sobre la habilidad de plantear problemas. Los señalamientos existentes son sobre cuándo se puede solicitar la elabo- ración de un problema a partir de alguna idea inicial, por ejemplo, en sexto año, tal como se visualiza en la Tabla 3.

Tabla 3

Habilidades específicas e indicaciones para sexto año

Habilidad Específica	Indicación puntual
2. Plantear y resolver problemas aplicando porcentajes y regla de tres.	Para formular los problemas, utilice datos obtenidos en periódicos o en los informes del Estado de la Nación
11. Plantear y resolver problemas aplicando inecuaciones de primer grado.	Se puede vincular las relaciones de dependencia entre las variables y las ecuaciones mediante el planteo de problemas donde haya una situación de compra de un artículo a un precio dado, y con ello determinar cuántas unidades se pueden comprar con cierta cantidad de dinero; o bien, ¿cuál es la mayor cantidad de unidades que se pueden comprar con cierta cantidad de dinero?

Nota: Elaborado a partir del [MEP \(2012, p. 237 y p. 241\)](#)

En la Tabla 3, se puede observar que la respuesta a la interrogante de cómo lograr que un estudiante realice esa actividad no se encuentra en ella. La acción de plantear un problema es un proceso inverso de pensamiento o pensamiento reversible (Mora, 2012). Un ejemplo de esta actividad cognitiva es cuando una persona estudiante determina el área de un rectángulo al conocer su base y altura, y logra, además, hallar la altura del rectángulo si conoce la base y el área.

El proceso inverso de pensamiento que implica plantear problemas requiere que la persona docente incluya, de manera constante, actividades en el aula como la planteada en la Figura 2 (La silla *gamer*). Se espera que el alumnado de séptimo año, de acuerdo con el perfil de salida y con datos preliminares, pueda crear un problema de ese tipo.

La situación anterior genera al menos dos líneas de investigación que no serán atendidas en este texto. La primera enfocada en analizar si el estudiantado de séptimo año será capaz de producir un problema con base en datos, y la segunda enfocada en estudiar las posibles formas en las que mediará el personal docente las acciones durante la construcción de un problema.



Síntesis y reflexiones finales

El área de Relaciones y Álgebra del currículo costarricense se ubica en la categoría de “Cambio y relaciones” dentro del Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo y se identifican tres grandes grupos de destrezas esperadas en el estudiantado: manejo del cambio, la modelización y el uso del álgebra como lenguaje.

El [MEP \(2012\)](#) propone la organización gradual del área en cuestión, desde la primaria y hasta la Educación Diversificada. Las ideas fundamentales como variable y función se aproximan paulatinamente hacia la formalización. En los primeros años, se privilegia un trabajo intuitivo y, durante la secundaria, el uso de los contextos reales da sentido de utilidad a las relaciones estudiadas.

El grupo de destrezas esperado por la OCDE están presentes desde séptimo hasta undécimo año. El cambio y la modelización se promueven a través de la comprensión de diferentes representaciones de una relación. La manipulación de las representaciones implica un uso instrumental del álgebra como lenguaje matemático o como lenguaje funcional.

Respecto a la pregunta que motivó este ensayo, se resalta que el [MEP \(2012\)](#) fue consistente en la organización del área de Relaciones y Álgebra en los siguientes aspectos:

- Poseer coherencia con la visión de la [OCDE \(2017\)](#), porque resume un conjunto de acuerdos internacionales que establecen parámetros para la comparación de las capacidades necesarias para enfrentar el mundo: cambio, modelización y álgebra como lenguaje.
- Mantener las destrezas esperadas hasta la Educación Diversificada de manera que se fortalezca hasta concluir la secundaria.

Esta reflexión permite la identificación de una oportunidad de mejora. La habilidad de “Plantear problemas” requiere de investigaciones que apoyen la implementación en las aulas, debido a las escasas indicaciones puntuales y metodológicas en los programas oficiales.

Referencias

- Alsina, A. y Coronata, C. (2015). Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(2), 23-36. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5012896.pdf>
- Alvarez, V. V. y Patagua I. A. (2018). Modelización matemática: Análisis de una experiencia aúlica en la secundaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(1), 534-542. <http://funes.uniandes.edu.co/13413/1/Alvarez2018Modelizacion.pdf>
- Barrantes, H. (2015). Acciones en Costa Rica para potenciar la integración de habilidades y conocimientos en la implementación curricular. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 10(13), 37-52. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/19143/19199>
- Bliss, K. y Libertini, J. (2020). *Lineamientos para la evaluación e instrucción en la educación en modelación matemática* (1ª ed. En español). Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM).
- Harlen, W. (2016). Assessment and the curriculum. En D. Wyse, L. Hayward y J. Pandya (Eds.), *The SAGE Handbook of Curriculum, Pedagogy and Assessment Volume 2* (pp. 693-709). SAGE.
- Loría, J. R. y Lupiáñez, J. L. (2019). Estudio del conocimiento de profesores de secundaria sobre procesos matemáticos. *PNA*, 13(4), 247-269. <https://doi.org/10.30827/pna.v13i4.8892>
- Mena, J., Mora, M., Salas, B., Sánchez, A. y Zumbado, M. (2019). *Observación de prácticas de aula y evaluación de los aprendizajes de los estudiantes*. Ponencia preparada para el Séptimo Informe del Estado de la Educación. PEN. <http://repositorio.conare.ac.cr/handle/20.500.12337/7747>
- Ministerio de Educación de Chile. (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación. Ministerio de Educación de Chile. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Educacion-General/Matematica/Matematica-7-basico/#tabs_0
- Ministerio de Educación Pública. (2015). *Fundamentación pedagógica de la transformación curricular*. Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. <https://issuu.com/ministerio-de-educacion-publica/docs/transf-curricular-vac-final>



- Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I, II y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.
- Mora, M. (2012). *La reversibilidad del pensamiento para fortalecer la competencia matemática a través de la resolución de problemas algebraicos, mediante el acompañamiento con estudiantes de secundaria* [Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional.]. RI UPN. <http://bgtq.ajusco.upn.mx:8080/jspui/bitstream/123456789/22/1/29367.pdf>
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias*, Versión preliminar. OECD Publishing. https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/ebook%20-%20PI-SA-D%20Framework_PRELIMINARY%20version_SPANISH.pdf
- OECD. (2021). OECD welcomes Costa Rica as its 38th Member. *OECD: Better policies for better lives*. <https://www.oecd.org/costarica/oecd-welcomes-costa-rica-as-its-38th-member.htm>
- Ríos-Cuesta, W. (2020). Competencias de argumentación y modelización en estudiantes de secundaria: la necesidad de un cambio de paradigma en la Educación Matemática del Chocó, Colombia. *Pesquisa e Ensino*, 1, 1-21. <https://doi.org/10.37853/pqe.e202020>
- Ruiz, A. (2013). La reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(Número Especial), 7-111. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/11125/10602>
- Ruiz, A. (2015). Balance y perspectiva de la Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 10(13), 13-33. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/19168>
- Ruiz, A. (2018). *Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores*. CIAEM. <https://www.angelruizz.com/wp-content/uploads/2019/02/Angel-Ruiz-Evaluacion-y-pruebas-2018.pdf>
- Secretaría de Educación Pública. (2017). *Matemáticas. Educación secundaria. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. Secretaria de Educación Pública. <https://www.planprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/biblioteca/secundaria/mate/1-LPM-sec-Matematicas.pdf>