Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317 | SIS (USA) = 0.912 | ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 1.582 | РИНЦ (Russia) = 3.939 | PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564 | ESJI (KZ) = 8.771 | IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500 | SJIF (Morocco) = 7.184 | OAJI (USA) = 0.350

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2022 **Issue:** 04 **Volume:** 108

Published: 29.04.2022 http://T-Science.org

Issue Article

K.S. Tattibekov
Dulaty university
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor.
Taraz c., Republic of Kazakhstan.

SUPER EXTENSION OF THE NONLINEAR SCHRODINGER EQUATION, ITS HIGHER SYMMETRIES

***Abstract**: One of the ways to integrate nonlinear models is connected with the calculation of the Lie-Backlund algebra, which includes a set of higher symmetries of the equation. This approach allows us to systematically find partial solutions, and the higher symmetries are associated with solutions of the soliton type. In this paper we describe the symmetry groups of the superextension of the nonlinear Schrodinger equation.*

***Key words**: Schrodinger, higher symmetries, transformation groups, soliton solutions, invariance, integrals of motion, Lie-Backlund, symmetry group.*

***Language**: Russian*

***Citation**: Tattibekov, K. S. (2022). Super extension of the nonlinear Schrodinger equation, its higher symmetries. *ISJ Theoretical & Applied Science, 04 (108),* 714-718.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-04-108-84 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2022.04.108.84

***Scopus ASCC**: 2611.*

СУПЕРРАСШИРЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА, ЕГО ВЫСШИЕ СИММЕТРИИ

***Аннотация**: Один из способов интегрирования нелинейных моделей связан с вычислением алгебры Ли-Бэклунда, включающий в себя множество высших симметрий уравнения. Этот подход позволяет систематический находит частные решения, причем высшие симметрии связаны с решениями солитонного типа. В этой работе опишем групп симметрии суперрасширения нелинейного уравнения Шредингера.*

***Ключевые слова**: Шредингер, высшие симметрии, группы преобразований, солитонные решения, инвариантность, интегралы движения, Ли-Бэклунда, группа симметрии.*

Введение

Интерес к супер симметричным моделям в физике привел к широкому развитию математики функций от антикоммутирующих переменных. Ее теперь часто называют суперматематикой, поскольку для пространства, в котором координаты могут как коммутировать так и антикоммутировать, принято название суперпространство, а для алгебр и групп Ли с антикоммутирующими параметрами - название алгебра и супергруппа Ли [7,8,9].

Супералгеброй Ли, называется вещественное или комплексное Z_2 - градуированное линейное пространство с фиксированной четностью

$$g = {}^{\circ}g \oplus^{1} g,$$

в котором определена билинейная операция $[x,y]$, причем для однородных элементов справедливы тождества

$$\alpha([x,y]) = \alpha(x) + \alpha(y),$$
$$[x,y] = (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)+1}[y,x],$$
$$\big[x,[y,z]\big](-1)^{\alpha(x)\alpha(z)}+\big[z,[x,y]\big] - (-1)^{\alpha(z)\alpha(y)}+\big[y,[z,x]\big] - (-1)^{\alpha(y)\alpha(x)} = 0.$$

В случае $[x,y] = 0$ супералгебра g называется коммутативной.

Супералгебры Ли связаны с Z_2 - градуированными ассоциативными алгебрами подобно тому, как обычные алгебры Ли связаны с обычными ассоциативными алгебрами. Каждая из операции

$$[x,y] = xy - (-1)^{\alpha(x)\cdot\alpha(y)} yx,$$
$$[x,y] = (-1)^{\alpha(x)\cdot\alpha(y)} xy - yx,$$

где *x,y* - однородные элементы Z_2-градуированной ассоциативной алгебры U, превращает ее в супералгебру Ли [10].

Алгебра состоящая из матриц, удовлетворяющих условию

$$AJ + JA^{st} = 0, \quad \text{где } J = \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 \\ -I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_q \end{pmatrix},$$

называется ортогонально - симплектической супералгеброй Ли и обозначается $osp(2p/q)$.

Структура таких матриц А имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ C & -A' & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & V \\ V' & -\mu' & 0 \end{pmatrix}.$$

Алгебра $osp(2p/q)$ тесно связана с линейными суперкононическими преобразованиями.

OSP(2/1) – нелинейное уравнение Шредингера

Развитие теоретической физики привело к необходимости исследования градуированных и супер симметричных расширений солитонных уравнений. В исследованиях авторов [1,2] были построены Z_2- градуированное суперобобщение нелинейного уравнения Шредингера OSP(2/1) - S3:

$$\begin{aligned} &iq_t + q_{xx} - 2r^2q^2 - 4q\,\beta\,\varepsilon - 4\,\varepsilon\,\varepsilon_x = 0\,, \\ &ir_t - r_{xx} + 2qr^2 + 4r\beta\varepsilon - 4\beta\beta_x = 0\,, \\ &i\varepsilon_t + 2\,\varepsilon_{xx} + 2q\beta_x + q_x\beta - \varepsilon r q = 0\,, \\ &i\beta_t - 2\,\beta_{xx} - 2r\varepsilon_x - r_x\varepsilon + \beta r q = 0\,, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha(q) = \alpha(r) = 0$, $\alpha(\beta) = \alpha(\varepsilon) = 1$, α - функция четности, т.е $q(x,t)$, $r(x,t)$ – коммутирующие (бозонные), $\beta(x,t)$, $\varepsilon(x,t)$ – антикоммутирующие(фермионные) искомые функции.

Система уравнений (2.1) является условием совместности линейной системы

$$\varphi_x = U(x,t,\lambda)\cdot\varphi, \quad \varphi_t = V(x,t,\lambda)\cdot\varphi\,,$$

где $U,V \in osp(2/1)$, $\varphi \in OSP(2/1)$,

$$U = i\lambda\, e_0 + re_1 + qe_2 + \beta q_1 + \varepsilon q_2$$
$$V = 2\lambda U + V_0\,.$$

Здесь

$$-iV_0 = (rq + 2\beta\varepsilon)e_0 - r_x e_1 + q_x e_2 - 2\beta_x q_1 + 2\varepsilon_x q_2,$$

где e_k, q_k - генераторы супергруппы OSP(2/1):

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$e_2 = e_1^{st}, \quad q_2 = -q_1^{st},$$

удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[e_0,e_1] = 2e_1, \quad [e_1,e_2] = e_0, \quad [e_2,q_2] = 0,$$
$$[e_0,e_2] = -2e_2, \quad [e_1,q_1] = 0, \quad \{q_1,q_1\} = -2e_1,$$
$$[e_0,q_1] = q_1, \quad [e_1,q_2] = q_1, \quad \{q_1,q_2\} = e_0,$$
$$[e_0,q_2] = -q_2, \quad [e_2,q_1] = q_2, \quad \{q_2,q_2\} = 2e_2,$$

где *st* - операция супертранспонирования, [,] - коммутатор, {,}- антикоммутатор.

Непосредственной проверкой нетрудно установить следующие равенства

$$U^{st} = -HUH^{-1}, \; V^{st} = -HVH^{-1},$$
$$\varphi^{st} = H\varphi^{-1}H^{-1}\,,$$

где $H = diag(-i\sigma_2, 1)$ – ортосимплектическая матрица супергруппы OSP(2/1),

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений OSP(2/1)-S3 (1) как интегрируемое уравнение обладает N - солитонным решением, бесконечным числом интегралов движения и т.д.

Пусть функции q, r, β, ε исчезают при $|x| = \infty$. Тогда плотности P_n локальных интегралов движения

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} P_n\,(q,r,\beta,\varepsilon)\,dx$$

определяются по рекуррентным формулам

$$P_n = -\frac{1}{i}(r\; q_n + \beta\alpha_n),$$

где $q_{n+1} = \frac{i}{2}[q_{nx} + \sum_{k=1}^{n-1} q_k\,(r\,q_{n-k} + \beta\,\alpha_{n-k}) - \varepsilon\,\alpha_n]$

$$\alpha_{n+1} = i\,\alpha_{nx} + i\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k(rq_{n-k} + \beta\alpha_{n-k}) + i\,\beta q_n,$$

$$n = 1,2,,\dots;\; q_1 = \frac{1}{2}\,q\,, \alpha_1 = -i\,\varepsilon.$$

Первые несколько интегралов сохранения

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{1}{2}\,r\,q + \beta\varepsilon)dx\,,$$
$$I_2 = i\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{1}{4}\,rq_x + \beta\varepsilon_x)dx,$$
$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{1}{4}rq_{xx} + \frac{1}{4}r^2q^2 + r\varepsilon\varepsilon_x - 2\beta\varepsilon_{xx} - q\beta\beta_x + rq\beta\varepsilon)dx.$$

Симметрии уравнения

Выявление симметрии нелинейных моделей вызывает особый интерес, поскольку служит одним из немногих способов исследования их точных свойств. Один из способов интегрирования связан с вычислением алгебры Ли-Бэклунда, включающий в себя множество высших симметрий уравнения. Этот подход позволяет систематический находит частные решения, причем высшие симметрии связаны с решениями солитонного типа [3, 4]. В этом пункте опишем групп симметрии уравнений OSP(2/1)-S3 [5, 11].

Для анализа дифференциальных уравнений методами теории групп, произвольная система уравнений

$$u_t = F(u, u_x, u_{xx}, \dots), \qquad (2)$$

и ее различные производные рассматриваются как бесконечномерное многообразие [F] в пространстве переменных

$$x, t, u, u_1 \equiv u_x, u_2 \equiv u_{xx}, \dots .$$

Тогда условие инвариантности многообразия [F] по отношению группы преобразований записывается в виде следующего дифференциального уравнения [3]

$$\frac{\partial G}{\partial t} = G\frac{\partial F}{\partial u} + D(G)\frac{\partial F}{\partial u_1} + \dots + D^m(G)\frac{\partial F}{\partial u_m}, \qquad (3)$$

где $\frac{\partial}{\partial t}$, D -операторы полного дифференцирования по t и x соответственно, $\frac{\partial}{\partial t}G$ - вычисляется с помощью уравнений (2). Решения дифференциального уравнения (3) образуют алгебру Ли-Бэклунда, соответствующей системе эволюционных уравнений (2).

Тогда соответствующие определяющие уравнения для операторов Ли-Бэклунда

$$X = \varphi\frac{\partial}{\partial q} + \psi\frac{\partial}{\partial r} + \delta\frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \gamma\frac{\partial}{\partial \beta} + \cdots,$$

допускаемой суперрасширением нелинейного уравнения Шредингера (1) имеет вид

$$\begin{aligned}
&(iD_t + D^2 - 4rq + 4\varepsilon\beta)\varphi - 2q^2\psi + (-4q\beta + 4\varepsilon_x - 4\varepsilon D)\delta + 4q\varepsilon\gamma = 0,\\
&(-iD_t + D^2 - 4qr + 4\varepsilon\beta)\psi - 2r^2\varphi + (4r\varepsilon - 4\beta_x + 4\beta D)\gamma + 4q\varepsilon\delta = 0,\\
&(iD_t + 2D^2 - rq)\delta + (2\beta_x + \beta D - \varepsilon r)\varphi + (2qD + q_x)\gamma - \varepsilon q\psi = 0,\\
&(-iD_t + 2D^2 - rq)\gamma + (2\varepsilon_x + \varepsilon D - \beta q)\psi + (2rD + r_x)\delta - \beta r\varphi = 0.
\end{aligned}$$

Решение определяющего уравнения (3), зависящего от $u, u_1, \dots, u_m$ вида

$$G(x, t, u, u_1, \dots, u_m)$$

будем называть решением m - порядка и обозначим через $G^{(m)}$.

В дальнейшем рассмотрим решение определяющих уравнений (4) явно независящих от x,t.

ЛЕММА. Решение m- порядка системы определяющих уравнений (4) имеет вид

$$\varphi^{(m)} = aq_m + \varphi', \quad \psi^{(m)} = br_m + \psi', \quad \delta^{(m)} = c\varepsilon_m + \delta', \quad \gamma^{(m)} = d\beta_m + \gamma'. \qquad (5)$$

где a, b, c, d - постоянные числа, функций $\varphi', \psi', \delta', \gamma'$ - зависят от переменных ($q, r, \varepsilon, \beta, \dots, q_{m-1}, r_{m-1}, \varepsilon_{m-1}, \beta_{m-1}$).

Доказательство. Подставляя функции $\varphi^{(m)}, \psi^{(m)}, \delta^{(m)}, \gamma^{(m)}$ зависящие только от q, r, ε, β и их производных по x до m - го порядка включительно в (4а) получаем

$$\begin{aligned}
&(iD_t + D^2 - 4rq + 4\varepsilon\beta)\varphi^{(m)} - 2q^2\psi^{(m)} + (-4q\beta + 4\varepsilon_x - 4\varepsilon D)\delta^{(m)} +\\
&+4q\varepsilon\gamma^{(m)} = 2r_{m+2}\varphi_{r_m} + \varepsilon_{m+2}\varphi_{\varepsilon_m} - 3\beta_{m+2}\varphi_{\beta_m} + \dots, \qquad (6)
\end{aligned}$$

где многоточием отмечены слагаемые меньшего порядка. Отсюда получаем, что должно быть

$$\varphi_{r_m} = 0, \quad \varphi_{\varepsilon_m} = 0, \quad \varphi_{\beta_m} = 0. \qquad (7)$$

Тогда, учитывая равенств (7), уравнение (6) перепишется в виде

$$\begin{aligned}
&(iD_t + D^2 - 4rq + 4\varepsilon\beta)\varphi^{(m)} - 2q^2\psi^{(m)} + (-4q\beta + 4\varepsilon_x - 4\varepsilon D)\delta^{(m)} +\\
&+4q\varepsilon\gamma^{(m)} = 2D\varphi_{q_m}q_{m+1} + h^{(m)}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$D\varphi_{q_m} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \varphi_{q_m} = const. \qquad (8)$$

В силу этих равенств, из (7), (8) следует справедливость первого равенства в (5).

Поступая аналогично со всеми остальными определяющими уравнениями (4б-г), можно окончательно убедится в справедливости утверждения леммы.

Используя схему, указанную в доказательстве леммы, найдем решения определяющих уравнений первых нескольких порядков в следующем виде:

0) $\varphi^{(0)} = q$, $\psi^{(0)} = -r$, $\delta^{(0)} = \varepsilon/2$, $\gamma^{(0)} = -\beta/2$

1) $\varphi^{(1)} = q_x$, $\psi^{(1)} = r_x$, $\delta^{(1)} = \varepsilon_x$, $\gamma^{(1)} = \beta_x$

2) $\varphi^{(2)} = q_{xx} - 2q^2r - 4q\beta\varepsilon - 4\varepsilon\,\varepsilon_x$,
$\psi^{(2)} = -r_{xx} + 2r^2q + 4r\beta\varepsilon - 4\beta\beta_x$,
$\delta^{(2)} = 2\varepsilon_{xx} + 2q\beta_x + q_x\beta - rq\varepsilon$,
$\gamma^{(2)} = -2\beta_{xx} - 2r\varepsilon_x - r_x\varepsilon + \beta rq$, и т.д.

Легко показать, что по шаговое уточнение алгебры (5) для любого m приведет к следующим равенствам

$$\varphi^{(m)} = q_m + \cdots, \quad \psi^{(m)} = (-1)^{m-1}r_m + \cdots, \quad \delta^{(m)} = 2^{m-1}\varepsilon_m + \dots, \quad \gamma^{(m)} = (-2)^{m-1}\beta_m + \dots, m = 1, 2, \dots .$$

В этих равенствах многоточием отмечены слагаемые меньшего порядка, представляющие собой сумму однородных многочленов относительно q, r, β, ε и их производных по x до порядка $m-1$, $m \geq 2$.

Теорема. Алгебра Ли - Бэклунда системы нелинейных уравнений (1) коммутативна, ее элементы порядка $m \geq 1$ вычисляются по слудующим рекурентным формулам

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(k+1)} = D\varphi^{(k)} - 2qD^{-1}(r\varphi^{(k)} + q\psi^{(k)} + 2\beta\delta^{(k)} + 2\gamma^{(k)}\varepsilon) - 4\varepsilon\delta^{(k)},\\
&\psi^{(k+1)} = -D\psi^{(k)} - 2rD^{-1}(r\varphi^{(k)} + q\psi^{(k)} + 2\beta\delta^{(k)} + 2\gamma^{(k)}\varepsilon) - 4\beta\gamma^{(k)}, \qquad (9)
\end{aligned}$$

$$\delta^{(k+1)} = 2D\delta^{(k)} - \varepsilon D^{-1}(r\varphi^{(k)} + q\psi^{(k)} + 2\beta\delta^{(k)} + 2\gamma^{(k)}\varepsilon\,) + 2q\gamma^{(k)}\,\beta\,\varphi^{(k)},$$

$$\gamma^{(k+1)} = -2D\gamma^{(k)} + \beta D^{-1}(r\varphi^{(k)} + q\psi^{(k)} + 2\beta\delta^{(k)} + 2\gamma^{(k)}\varepsilon) - 2r\delta^{(k)}\varepsilon\psi^{(k)},$$

где k принимает 0, 1, 2, ... ,
начальные значения определяются равенствами:

$$\varphi^{(0)} = q,\ \ \psi^{(0)} = -r,\ \ \delta^{(0)} = \frac{\varepsilon}{2},\ \ \gamma^{(0)} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Доказательство. В начале определим, что оператор D^{-1} в (9) имеет смысл, т.е.

$$r\varphi^{(k)} + q\psi^{(k)} + 2\beta\delta^{(k)} + 2\gamma^{(k)}\varepsilon = D\tilde{\mathrm{F}}[u]\,,$$

где $\tilde{\mathrm{F}}[u]$ - некоторая дифференциальная функция.

Для семейства

$$r_{t_k} = \psi^{(k)},\quad q_{t_k} = \varphi^{(k)},\quad \beta_{t_k} = \gamma^{(k)},$$
$$\varepsilon_{t_k} = \delta^{(k)},\quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

уравнений (1) имеет место равенства

$$r\varphi^{(k)} + q\psi^{(k)} + 2\beta\delta^{(k)} + 2\gamma^{(k)}\varepsilon = (rq + 2\beta\varepsilon)_{t\,k},$$

в которых t_k означает производную по времени соответствующей потоку k. С другой стороны известно, что $rq + 2\beta\varepsilon$ - плотность закона сохранения, поэтому

$$(rq + 2\beta\varepsilon)_{t_k} = D\tilde{F}\,(u, u_1, \dots),$$

т.е. выражение

$$r\varphi^{(k)} + q\psi^{(k)} +\ 2\beta\delta^{(k)}\ +\ 2\gamma^{(k)}\varepsilon$$

является полной производной.

Далее подставляем (9) в (4):

$$(iD_t + D^2 - 4rq + 4\varepsilon\beta)\varphi^{(k+1)} - 2q\,^2\psi^{(k+1)} + (-4q\beta + 4\varepsilon_x - 4\varepsilon D)\delta^{(k+1)} + +4q\varepsilon\,\gamma^{(k+1)} \;=\; D\,\{(iD_t + D^2 - 4rq + +4\varepsilon\beta)\varphi^{(k)} - 2q^2\psi^{(k)} + +(-4q\beta + 4\varepsilon_x - 4\varepsilon D)\delta^{(k)} + 4\varepsilon\,\gamma^{(k)}\}$$

$$(-iD_t + D^2 - 4rq + 4\varepsilon\beta)\psi^{(k+1)} - 2r^2\varphi^{(k+1)} + (4r\varepsilon - 4\beta_x + +4\beta D)\gamma^{(k+1)} - -4r\beta\,\delta^{(k+1)} \;=-D\,\{(-iD_t + D^2 - 4rq\; + +4\varepsilon\beta)\,\psi^{(k)} - 2r^2\varphi^{(k)} + +(4r\varepsilon - 4\beta_x + 4\beta D)\gamma^{(k)} - 4r\beta\,\delta^{(k)}\,\}$$

$$(iD_t + 2D^2 - rq)\delta^{(k+1)} + (2\beta_x + \beta D - \varepsilon r)\varphi^{(k+1)} + +(2qD +\ q_x)\gamma^{(k+1)} - -\varepsilon q\psi^{(k+1)} = 2D\{(iD_t + 2D^2 - rq)\delta^{(k)} + +(2\beta_x + \beta D - \varepsilon r)\varphi^{(k)} + (2qD + +q_x)\,\gamma^{(k)} - \varepsilon q\,\psi^{(k)}\}$$

$$(-iD_t + 2D^2 - rq)\gamma^{(k+1)} + +(2\varepsilon_x + \varepsilon D - \beta q)\,\psi^{(k+1)} + (2rD +\ r_x)\delta^{(k+1)} - -\beta r\varphi^{(k+1)} = -2D\{(-iD_t + 2D^2 - rq)\gamma^{(k)} + +(2\varepsilon_x + \varepsilon D - \beta q)\psi^{(k)} + (2rD + r_x)\delta^{(k)} - \beta r\varphi^{(k)}\}.$$

Из этих равенств следует справедливость рекурентных формул (9).

Далее, произведение в алгебре Ли-Бэклунда определим по формуле

$$[x, y] = x\,\cdot y - (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)} y \cdot x,$$

где $\alpha(x)$ - функция четности. Тогда доказательство коммутативности построенной алгебры сводится к установлению следующих равенств

$$X^{(k)}(\varphi^{(l)}) - X^{(l)}(\varphi^{(k)}) = 0,$$
$$X^{(k)}(\psi^{(l)}) - X^{(l)}(\psi^{(k)}) = 0,$$
$$X^{(k)}(\delta^{(l)}) - X^{(l)}(\delta^{(k)}) = 0,$$
$$X^{(k)}(\gamma^{(l)}) - X^{(l)}(\gamma^{(k)}) = 0,$$

для операторов Ли-Бэклунда

$$X^{(k)} = \varphi^{(k)}\frac{\partial}{\partial q} + \psi^{(k)}\frac{\partial}{\partial r} + \delta^{(k)}\frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \gamma^{(k)}\frac{\partial}{\partial \beta} + \cdots,$$
$$l, k = 0,1,2, \dots .$$

Непосредственной проверкой устанавливается справедливость этих равенств.

Теорема доказана

В бозонном случае, т.е. когда отсутствуют антикоммутирующие элементы $(\varepsilon = \beta = 0)$, полное описание алгебры Ли-Бэклунда проведено в [6].

В заключении этой работы опишем точечную группу симметрии OSP(2/1)-S3. Используя стандартную технику группы симметрии дифференциальных уравнений [4] можно доказать, что система (1) допускает пятипараметрическую группу преобразований, базис в которой определяется следующими инфинитезимальными образующими

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2}xq\frac{\partial}{\partial q} - \frac{i}{2}xr\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{4}x\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon} - \frac{i}{4}x\beta\frac{\partial}{\partial \beta},$$

$$X_4 = \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} - q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{3}{4}\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon} - \frac{1}{4}\beta\frac{\partial}{\partial \beta},$$

$$X_5 = xq\frac{\partial}{\partial q} - r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon} - \frac{1}{2}\beta\frac{\partial}{\partial \beta}$$

Заметим, что генераторы точечных симметрии X_5, X_1, X_2 эквивалентны, соответственно, к операторам $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}$ Ли-Бэклунда.

References:

1. Kulish, P.P. (1985). Quantum OSP-invariant nonlinear Schrodinger equations. *Lett. Math. Phys.*, v.10, pp.87-93.
2. Gursees, M., & Qquz, O. (1986). A super Soliton Connection. *Lett.Math.Phys.*, v.11, №3, pp.235-246.
3. Ibragımov, N.H. (1983). *Gruppy preobrazovanıı v matematıcheskoı fizıke*. Moscow:Nauka.
4. Olver, P. (1989). *Prılojenıe grupp Lı k dıfferentsıalnym uravnenııam.* Per.s angl. (p.639). Moscow:Mır.
5. Tattıbekov, K.S. (2014). Vysshıe sımmetrıı OSP(2/1)–nelıneınoe uravnenıe Shredıngera. *Sovremennyı nauchnyı vestnık, serııa fizmat.*, №33 (229), pp.79-84.
6. Jıber, A.V. (1982). Uravnenııa n - voln ı sıstema nelıneınyh uravnenıı Shredıngera. *TMF*, t.52, №3, pp.405-413.
7. Berezın, F.A. (1983). *Vvedenıe v algebru ı analız s antıkommutırııuıımı peremennymı*. (p.208). Moscow:Izd.MGU.
8. (1986). *Metod vtorıchnogo kvantovanııa*. (p.320). Moscow:Nauka.
9. Vladımırov, B.C., & Volovıch, I.V. (1984). Superanalız 1. Dıfferentsıalnoe ıschıslenıe. *TMF*, t.59, №1, pp.3-27.
10. Leznov, A.H., & Savelev, M.B. (1985). *Gruppovye metody ıntegrırovanııa nelıneınyh dınamıcheskıh sıstem*. (p.279). Moscow:Nauka.
11. Sukumar, C.V. (1986). Sypersymmetry, potentials with bound states at arbitrary energies and multi-solitonconfidurations. *J.Phys.A: Math, and gen.*, v.19, №12, pp.2297-2316.