CÉLEBRE CARTA DE DESCARTES A BEECKMAN (AT, X, 154-160)

JOSÉ PORTUGAL DOS SANTOS RAMOS [1]

RESUMO: A partir da exposição da célebre carta que Descartes envia a Beeckman na data de 26 de março de 1619, o presente artigo oferece aos leitores de língua portuguesa uma visão sistemática das questões lógico-matemáticas que permeiam a estrutura textual e filosófica da referida carta. Nesta perspectiva, destacam-se as seguintes questões: (i) a descoberta de Descartes de quatro demonstrações através do uso do compasso, (ii) a crítica cartesiana aos artifícios lógicos contemplados na *Ars Brevem* de Lúlio e (iii) a formulação dos raciocínios matemáticos que constituem a ciência inovadora do mencionado filósofo francês do século XVII. Cabe ressaltar que ao longo deste artigo sustenta-se que tanto a rejeição dos artifícios lógicos propostos por Lúlio quanto a inauguração de um novo modelo do pensamento lógico-matemático são retomados por Descartes nas *Regulae* e nas obras publicadas em 1637.

PALAVRAS-CHAVE: Descartes, Lógica, Matemática, Ciência inovadora.

ABSTRACT: Based on the exposition of the famous letter that Descartes sent to Beeckman on March 26, 1619, this article offers Portuguese-speaking readers a systematic view of the logical-mathematical issues that permeate the textual and philosophical structure of that letter. In this perspective, the following issues stand out: (i) Descartes' discovery of four proofs through the use of the compass, (ii) the Cartesian critique of the logical devices contemplated in Llull's *Ars Brevem* and (iii) the formulation of mathematical reasoning that constitute the innovative science of the aforementioned XVII th century French philosopher. It should be noted that throughout this article it is argued that both the rejection of the logical devices proposed by Llull and the inauguration of a new model of logical-mathematical thinking are taken up by Descartes in the *Regula*e and in the works published in 1637.

KEYWORDS: Descartes, Logic, Mathematics, Innovative science.

1. Introdução

O presente artigo tem por propósito esclarecer os aspectos teóricos relevantes que viabilizam a leitura e uma interpretação filosófica aprofundada da célebre carta que Descartes envia a Beeckman na data de 26 de março de 1619. Assinala-se que ao longo deste artigo expor-

[1] Professor Titular na Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Doutor em Filosofia pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). E-mail: domluso@gmail.com.

se-á as principais passagens da referida carta em língua portuguesa acompanhada da versão original latina.

Dentre os aspectos teóricos mais relevantes que viabilizam a leitura e a interpretação adequada da carta de Descartes a Beeckman (vide carta *in*. AT, X,154-160), destacam-se a descoberta de Descartes de quatro demonstrações através do uso do compasso, a crítica cartesiana aos artifícios lógicos contemplados na *Ars Brevem* de Lúlio e a formulação dos raciocínios matemáticos que constituem a ciência inovadora do mencionado filósofo francês do século XVII. Cabe ressaltar que tanto a rejeição da lógica proposta por Lúlio quanto a inauguração de um novo modelo do pensamento lógico matemático são retomados por Descartes nas obras publicadas em 1637.

2. Do cultivo das Musas: descoberta da solução da trissecção do ângulo via o uso do compasso

No início da célebre carta datada de 26 de março de 1619, Descartes relata a Beeckman:

> Acredito que terei vossa permissão para me despedir de si, por essa carta, pois estou de partida. Fiquei seis dias neste local e cultivei as Musas com mais perspicácia do que em outros tempos. Neste breve período, descobri quatro demonstrações extraordinárias e inovadoras através do uso do meu compasso. A primeira versa sobre o famoso problema de dividir um ângulo em tantas partes iguais quantas se quisesse (AT, X, 154-155).

Segue a versão original latina:

> Licebit saltem, opinor, vale mittere per epistolam, quod tibi discedens dicere non potui. Ante 6 dies huc redij, vbi Musas meas diligentiùs excolui quàm vnquam hactenus. Quatuor enim à tam brevi tempore insignes & plane novas demonstrationes adinveni, meorum circinorum adiumento. Prima est celeberrima de dividendo angulo in aequales partes quotlibet (AT, X, 154-155).

Como pano de fundo da descoberta de Descartes das referidas quatro demonstrações mencionadas na carta datada em março de 1619 está o suporte de sua teoria das proporções. Cabe inclusive assinalar que a estruturação desta referida teoria tem como origem a primazia da via analítica, em detrimento da síntese, no método cartesiano. E é justamente a partir dos passos analíticos que este filósofo francês institui via *inventio* um meio proporcional para o encaminhamento da resolução da trissecção do ângulo. Nesta perspectiva, Shea (199, 531-549) afirma que Descartes encontrou a solução da trissecção do ângulo entre 20 e 26 de março de 1619, data que informa a Beeckman sobre o seu sucesso: “o cultivo das Musas” (Vide Carta AT, X, 154). Tal como o primeiro compasso para produzir os meios proporcionais, o novo instrumento é fácil de construir e manejar. As quatro retas, AB, AC, AD e AE, podem girar em A (ver figura 1). Os pontos F, I, K e L são equidistantes de A, por isso AF=AI=AK=AL. As varas FG, GK, IH, e LH, de mesmo comprimento que AF, são ligadas aos pontos F, I, K e L em volta dos quais as varas podem virar. Estas varas são dispostas assim, de modo que G possa deslizar ao longo da reta AC e H ao longo da reta AD (SHEA, 1997). [2]

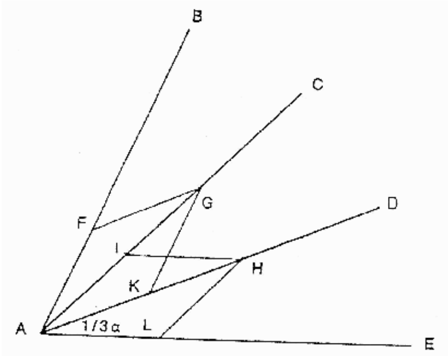
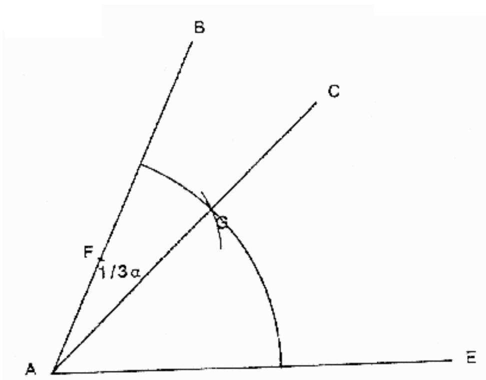


Figura 1 (SHEA, 1997, p. 531-549)

Para trissecar um ângulo dado α, deve-se abrir o compasso até que o ângulo BAE = α. Uma vez que os triângulos AFG, AKG, AIH e ALH são sempre iguais, os ângulos correspondentes FAC, GAD e DAE também são iguais, seja qualquer o comprimento do ângulo BAE (ver figura 2). A trissecção do ângulo é certificada de uma grande simplicidade, em virtude da aplicação do novo compasso (SHEA, 1997, p. 531-549). Diante disso, Descartes propõe uma variante: traça-se da curva MN, que é produzida pela abertura do compasso. Do ponto F, deve-se traçar um círculo de raio AF, que corta esta curva em G. Em seguida, torna-se necessário tomar A e G, que dividirá o ângulo BAE na relação 2:1. O ângulo FAC será então 1:3 do ângulo BAE.



[2] Descartes descreve nas *Cogitationes Privatae* a demonstração da trissecção do ângulo. Primeiramente, Descartes determina *να* igual a *af*. Diante disso, constata que ao redor do ponto *n,* sendo traçada a parte do círculo *θδο*, demonstra-se que *nθ* é exatamente igual a *fg*. Desse modo, Descartes afirma que a linha *αδ* divide o ângulo em três partes iguais.Cf. *Cogitationes Privatae* (AT, X, 241).

Figura 2 (SHEA, 1997, p. 531-549)

Descartes acrescenta que a adição de uma ou de várias outras réguas permite dividir o ângulo em quatro partes ou em quantas partes se desejar. Se o primeiro instrumento era capaz de engendrar uma infinidade de meios proporcionais, o segundo é designado como uma autêntica máquina de divisões (SHEA, 1997, p. 531-549). Descartes consagra, assim, a resolução da trissecção do ângulo no Livro III da *Geometria*. (AT, VI, 470).Segue Descartes:

> Do mesmo modo, no caso em que se deseja dividir o ângulo NOP [ver figura 3], ou o arco ou a parte do círculo NQTP, em três partes iguais, fazendo NO = 1 para o raio do círculo e $NP = q$ para a corda do arco dado, e $NQ = z$ para a corda da terça parte deste arco, teremos a equação: $z^3 = *3z - q$; pois tendo traçado as linhas NQ, OQ, OT e fazendo QS paralela a TO, vemos que, NO está para NQ, como NQ a QR, e QR a RS; de modo que NO sendo 1 e NQ sendo *z*, QR é *zz*, e RS é z^3. E como falta tão somente RS, ou z^3, para que a linha NP, que é *q*, seja tripla de NQ, ou *z*, se obtém assim; $q = 3z - z^3$ ou $z^3 = * 3z - q$. Traçada a parábola FAG, e sendo CA=1/2 a metade do seu *latus rectum*, se tomarmos $CD = 3/2$ e a perpendicular DE = 1/2 . *q*, e se do centro E, pelo ponto A, descrevemos o círculo FAgG, ele corta a parábola nos três pontos F, g, G, sem contar o ponto A que é o vértice. Isto mostra que a equação tem três raízes, a saber, as duas GK e gk que são verdadeiras e uma terceira falsa, que é FL. E das duas verdadeiras é gK a menor, ou seja, a que deve ser tomada para a linha procurada NQ. Pois a outra GK é igual à NV, a corda da terça parte do arco NVP, que com o outro arco NQP completa o círculo. E a falsa, FL, é igual à soma destas duas, QN e NV […] (AT, VI, 470). [3]

[3] Vuillemin (1960) afirma que para a construção da trissecção do ângulo, a formação da equação é a seguinte: seja os ângulos NOQ = QOT=TOP. Traça-se a paralela QS de raio TO. O ângulo QNS=QNP intercepta o mesmo arco QP. O ângulo de centro POQ = 2 NO intercepta o mesmo arco. Logo: QNS=NOQ. Para a construção, o ângulo SQR é igual ao ângulo QOT. De outro modo, QRS=2dr – (SQR+QRS)= 2 dr – (QNS+QRS)=NQR. Os três triângulos (ONQ), (NQR) e (QRS) são, por isso, semelhantes. O primeiro dentre tais triângulos é isósceles. Os dois outros são também: NO/NQ=NQ/QR=QR/RS. Essa é uma ilustração geométrica de uma proporção dupla e continua. Coloca-se: NO=1, NQ=z e NP=q. Tem-se: QR= z^2 e SR= z^3. Mas: NP= (NR+MP) +RM=2 NR+MR, uma vez que os triângulos (ONQ) e (OPT) são iguais, e do mesmo modo (PMT) com (NRQ). Além disso, (NQR) é isósceles e SQ estaria, pela construção, paralela a MT: NR=NQ e QT=SM. Logo: NP=2 NQ+SM – SR=2NQ+QT – SR=3 NQ – SR e: $q=3z - z^3$ ou: $z^3=3z - q$. Conjectura-se construída a parábola FAgG, na distância entre o ponto C e o cume é igual à metade do raio do círculo O, tomado como unidade. AC=NO/2=1/2. A partir de C sobre o eixo da parábola e na mesma direção, obtém-se: CD= 3/2 e AD=2. Todos os pontos da parábola são verificados: z^2=x. Do ponto E tomado como centro, traça-se a circunferência de raio EA. O ponto mais elevado *g* é que determina por sua intersecção com a parte positiva da parábola é o ponto procurado e que se deve calcular: kg = z = NQ. Fazendo o retângulo kDES, tem: $Eg^2=ES^2+Sg^2=kD^2+(z+1/2.\ q)^2= (AD - Ak)^2 + (z+1/2.q)^2 = (2 - z^2)^2 +(z+1/2.q)^2 = z^4- 3z^2+qz+1/4.q^2+4$. De outra parte: $Eg^2=EA^2=AD^2+ED^2=4+1/4.q^2$. Logo: $z^4- 3z^2+qz+1/4.q^2+4=4+1/q^2$ ou, $z(z^3 - 3z+q)=0$. A equação do quarto grau reduzível ao terceiro grau (pela raiz z=0, correspondente ao ponto A), et: $z^3=3z - q$. Quanto às relações recíprocas entre as três raízes $kg = z, KG = y$ e $FL = v$, são descritas da seguinte maneira: $Eg^2 = z^4 - 3 . z^2 + qz + q^2 / 4 + 4$. Do mesmo modo: $EG^2 = (ES_1)^2 + S_1G^2 = (y^2 - 2)^2 + (y + q / 2)^2 = y^4 - 3 . y^2 + qy + q^2 / 4 + 4$. E: $EF^2 = ES_2 + S_2F^2 = (v^2 - 2)^2 + (v - q / 2)^2 = v^4 - 3 . v^2 - qv + q^2 / 4 + 4$. Ora: $Eg = EG = EF = EA$. Com isso: $Eg^2 = EG^2 = EF^2 = EA^2 = AD^2 + ED^2 = q^2 / 4 + 4$. De tal sorte que as três igualdades precedentes se reduzam as seguintes: $4 . z^2 = z^4 + qz + z^2 + [q^2 / 4 + 4 - Eg^2] = z^4 + qz + z^2$,ou: $4 = z^3 + q + z / z$, e do mesmo modo: $4 = y^3 + q + y / y$ e $4 = v^3 - q + v / v$. De onde se obtém: $z^3 + q + z / z = y^3 + q +y / y$, ou $z^3 . y - y^3 . z = qz - qy$, e $q =z^2 . y + y^2$. E do mesmo modo: $z^3 + q + z / z = v^3 - q + v / v$, ou $v^3 . z - vz^3 = vq + qz$ e $q = v^2. z - vz^2$. Logo: $z^2 . y + y^2 . z = v^2 . z - vz^2$, $(v^2 - y^2) . z = z^2 . (v + y)$, $z = v - y$, ou $v = z + y$, ou geometricamente:$FL = KG + kg$. [...] Como, nota-se na ultima equação: $z^3 = pz - q$ é o caso geral

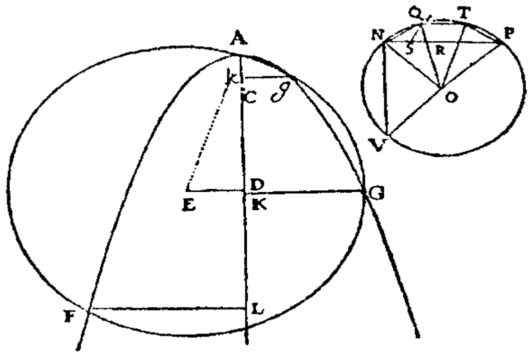


Figura 3 (AT,VI, 470-471)

Constata-se, assim, que a resolução cartesiana da trissecção do ângulo segue a ordem de raciocínio que constitui a sua teoria das proporções. Admite-se, portanto, que quando Descartes se propôs a fornecer explicação da trissecção do ângulo, pretendia, sobretudo, evidenciar a proeza da invenção do seu método em detrimento das exigências especulativas contempladas nas resoluções dos problemas matemáticos dos antigos geômetras. Diante disso, sustenta-se que Descartes consolida o *modus operandi* do método que inventara a partir de uma lógica matemática que cultiva a razão (as Musas *in*. Carta AT, X,154), o que lhe viabiliza resolver o famoso problema de dividir um ângulo em tantas partes iguais quantas se quisesse (*in*. Carta AT, X, 154-155).

3. Ciência inovadora de Descartes versus a *Ars* de Lúlio

No decorrer da carta datada de 26 de março de 1619, Descartes propõe uma ciência inovadora, isto é, os primeiros raciocínios que inicialmente constituiria a *mathesis universalis* (vide *Regulae* de 1619-1628) e, por conseguinte, o verdadeiro método (vide *Discours de la Methode* de 1637). Tais raciocínios, segundo ele, não deveriam ser confundidos com a proposta da *Ars Brevis* de Lúlio. Vejamos o próprio relato de Descartes a Beeckman:

> […] eu vos convoco com honestidade e vos digo o que advogo em meu pensamento, e não com isso quero propor uma *Ars Brevis* analogamente como fez Lúlio, mas sim, uma ciência inovadora, que resolva de forma sistemática qualquer tipo de problema que se possa formular para questões referentes à quantidades de qualquer espécie, isto é, contínuas ou mesmo discretas, cada qual segundo a sua natureza (AT, X, 156-157).

Segue a versão original latina:

---

que corresponde a $v^3=3v - q$. Para resolver esta equação geral, Ferrari, começa propondo o resultado: $v=z+y$ (VUILLEMIN, 1960, p. 176-178).

> Et certe, vt tibi nude aperiam quid moliar, non Lullij Artem brevem, sed scientiam penitus novam tradere cupio, quâ generaliter solvi possint quaestiones omnes, quae in quolibet genere quantitatis, tam continuae quàm discretae, possunt proponi. Sed vnaquaeque iuxta suam naturam (AT, X, 156-157).

Após aproximadamente um mês, em uma outra carta enviada a Beeckman, datada de 23 de abril de 1619, Descartes parece mais cauteloso e interessado em melhor entender o que é a *Ars* de Lúlio, do que apenas descartá-la como fizera em março de 1619. Nessa perspectiva, ele solicita a Beeckaman os seguintes esclarecimentos:

> Conheci há três dias um erudito em um hotel de Dordrecht [Dordracensi], e com ele debati a Arte Parva [*Artem Brevem*] de Lúlio. Ele disse ser capaz de usar com tal sucesso as regras dessa Arte que, em outras palavras, poderia discorrer sobre qualquer assunto durante uma hora; e, se então fosse solicitado a falar por mais uma hora sobre o mesmo conteúdo, encontraria, pois, algo completamente diferente a versar, e assim sucessivamente, por mais vinte horas [...]. Solicito-vos que me responda com mais exatidão se essa arte consiste em um mecanismo dos lugares comuns da Dialética, da qual eram extraídos seus argumentos [*ordine locorum dialecticorum vnde rationes desumuntur*]. Ele admitiu que sim, mas acrescentou que nem Lúlio nem Agrippa haviam revelado, em suas obras, as chaves que, segundo ele, eram necessárias para desvendar os segredos dessa Arte (AT, X, 164-165).

Na resposta de Beeckman a Descartes datada de 6 de maio de 1619, ele relata que há um mecanismo simplista que estava como que em um pano de fundo ao método de Agrippa, derivado da *Ars* de Lúlio. Tal mecanismo consistia em designar os conceitos por letras, as quais marcavam círculos concêntricos. Estes círculos, por sua vez, girariam e, com isso, produziam-se combinações de letras que representavam novas combinações de conceitos. Segue a conclusão de Beeckman:

> [...] Todas as coisas que são, ele as divide em lugares gerais, e cada um desses lugares é subdividido em outros, de maneira que cada um não possa ser pensado nestes círculos. Pois, seja qual fosse o tema proposto, mediante a combinação destes conceitos, poder-se-ia prolongar esse debate por longas horas, quase indefinidamente; mas o sujeito que fala tem que estar familiarizado com muitos assuntos e, se falar num tempo muito longo, iria, pois, expor-se ao ridículo, versando sobre conteúdos que nada teria a ver com o assunto inicial, e tudo acabaria sendo mera fantasia […] (AT,X,168).

A partir da interpretação desta carta, Mehl (2001) relata na obra *Descartes em Allemange* (1619-1620) que a ideia de uma arte combinatória (*ars inveniendi*) seduziu todos os *novatores* da Renascença, especialmente Agrippa, pois possibilitou-lhes a ideia de uma ciência universal (*mathesis universalis*), que tanto inspiraria a Descartes nas *Regulae*. Ressalta também que possivelmente Descartes não recebera a mencionada resposta de Beeckman, datada de 6 de maio de 1619, tão rapidamente e, por isso, investiga a possibilidade dele ter buscado algum outro recente comentário que versasse sobre a *Ars* de Lúlio. A aposta de Mehl (2001) é a *Clavis artis lullianae* (a chave da arte de Lúlio) do pensador renascentista Jean-Henri Altesd (1609).

Segundo Mehl (2001), convencido de que todos os tratados de lógica contemplavam determinadas verdades, Alsted propôs reconciliar as doutrinas de Aristóteles, Lúlio e Pedro Ramos. Esse projeto implica a desqualificação dos comentários estritamente lulistas da lógica, pois requisitava a definição da Dialética fornecida por Pedro da Fonseca: "a arte que ensina a via e a maneira pela qual se pode facilmente e sem erros conhecer as coisas desconhecidas por meio das coisas conhecidas". Em seguida, Alsted faz um estudo comparado dos três pilares da lógica renovada: Aristóteles tem sobre os outros o mérito da pesquisa universal, as causas e a evidência das proposições examinadas. Utiliza de Ramos a brevidade, a claridade e a análise. E em relação a *Ars* de Lúlio, essa assume o mérito de poder tratar de todas as coisas passíveis de conhecimento, ainda que houvesse nessa Arte uma confusão generalizada de matérias envolvidas (metafísica, física, matemática, lógica, ética etc.). Mas Alsted pretende solucionar esse caos por intermédio de raciocínios propostos por Aristóteles e Pedro Ramos sobretudo, aqueles que deram ensejo à lógica Dialética. Diante disso, Mehl (2001) vislumbra a possibilidade de Descartes ter conhecido a *Ars* de Lúlio por intermédio da obra *Clavis artis lullianae* (1609) de Altesd. Voltemos agora novamente ao exame da carta a Beeckman datada de 23 de abril de 1619, na qual Descartes indaga ao seu interlocutor de Dordrecht se a *Ars* de Lúlio consistia em um arranjo dos "lugares comuns da Dialética", e a resposta é positiva. Ora, quais seriam os reais motivos e intenções dessa indagação cartesiana? É notório que a partir de traduções das obras de Galeno realizadas no final do século XV e ao longo do século XVI, surgiu a expressão *método*, que de uma Medicina ancorada nos pressupostos matemáticos dos *Elementos* de Euclides invadiu o domínio da lógica Dialética.
Vale ainda assinalar que apesar da palavra *methodus* não aparecer nas obras de Cícero, que usava expressões vagantes, porém possivelmente equivalentes a essa, tais como *ars*, *ratio, via* e, sobretudo, *via compendiaria*, depositou-se no termo *methodus* as perspectivas de "brevidade" e "facilidade", as quais tornar-se-iam de extrema relevância na formulação do conceito de método durante o período humanístico do renascimento e no início da modernidade, nomeadamente em Descartes. Como se sabe, desde a formulação das primeiras regras (1619-1622) das *Regulae* Descartes ansiava constituir uma *mathesis universalis* a partir de uma lógica que não fosse a Dialética, por isso, certamente em virtude disso foi que Descartes logo manifestou interesse em indagar o seu interlocutor acerca dos "lugares comuns da Dialética".

Vejamos o que Descartes diz na Regra II das *Regulae*: “[...] E bem poucos úteis, parece-me, são os encadeamentos mediante os quais os Dialéticos pensam governar a razão, conquanto, não nego, sejam muitos apropriados para outros usos. Isso porque todo erro possível [...] nunca provém de uma má inferência, mas [...] de formular juízos irrefletidos e sem fundamento” (AT, X, 365). E ratifica na Regra IV das *Regulae*:

> Ora, se o método nos fornece uma explicação perfeita do que pretendo fazer da intuição intelectual com o propósito de não cair no erro contrário ao verdadeiro, e do meio de determinar dedução com intuito de lograr o conhecimento de tudo, parece-me que nada mais é exigido, senão a intuição intelectual e a dedução [...]. Em relação às outras operações intelectuais que, por exemplo, a Dialética empreende com o auxílio dessas primeiras [intuição e dedução], aqui elas são inúteis, isto é, devem ser incluídas dentre os obstáculos, porque não há nada que se possa acrescentar à luz da razão sem a obscurecer de alguma coisa (AT, X, 372-373).

No *Discurso do método*, após relatar que tinha o propósito de constituir o verdadeiro método, Descartes afirma que tal empreendimento deveria contemplar as vantagens da lógica e das matemáticas da sua época: “Estudara um pouco, quando jovem, entre as partes da filosofia, (1) a lógica, e, entre as matemáticas, (2) a análise dos geômetras e (3) a álgebra, três artes ou ciências que pareciam dever contribuir ao meu propósito”. Em relação à lógica, Descartes diz:

> Mas, ao examiná-las, atentei que, quanto à lógica, seus silogismos e a maior parte de suas outras instruções servem mais para explicar aos outros as coisas que já se sabem, ou mesmo, como a arte de Lúlio, para falar sem discernimento daquelas que ignoram, do que para aprendê-las; e, embora ela contenha efetivamente preceitos muito verdadeiros e muito bons, existem misturados a eles tantos outros que são nocivos ou supérfluos.

É manifesto, portanto, que em meados de 1637 Descartes já estava convencido de que, além da *Ars* de Lúlio tratar sem discernimento de coisas que ignora, não possuía raciocínios que viabilizaria a operacionalização da lógica que buscava. Isto porque possivelmente a *Ars* de Lúlio seguia os “lugares comuns da lógica Dialética”, os quais segundo Descartes continham “misturados a eles [os bons preceitos], outros nocivos ou supérfluos”. Ora, o que Descartes pretende estabelecer é preceitos pelos quais se cultiva a razão, isto é, um *modus operandi* da própria razão que lhe evidencie uma correspondência necessária entre diferentes objetos investigados. Esta correspondência deve lhe evidenciar, portanto, quais são os preceitos lógicos que constituirão o seu método proposto em 1637.

4. Formulação do verdadeiro método: O contraexemplo da Quadratriz

Ao longo da celebre carta (AT, X, 154-160), Descartes revela a Beeckman os principais aspectos da sua teoria das proporções, os quais serão detalhadamente laborados e explorados na parte II do *Discurso do método* e ao longo da *La Geometrie* de 1637. Segue Descartes:

> Na Aritmética determinadas questões podem ser resolvidas através de números racionais, outras através tão somente dos números imaginários, e outras, enfim, podem ser imaginadas, mas não solucionadas. Assim espero demonstrar que, quando as quantidades são contínuas, se pode resolver o problema através de linhas retas ou circulares, e outros, que apenas se resolvem através de linhas curvas elaboradas por um único movimento, curvas estas que podem ser traçadas por intermédio de novos compassos, e que não são em minha opinião menos exatos e geométricos que os ordinários a qual utilizamos para desenhar círculos. Finalmente, outros problemas apenas podem ser resolvidos com linhas curvas geradas por movimentos distintos e não subordinados uns aos outros, e que com razão, são tão somente imaginários, tal é o exemplo da quadratriz, que é bastante conhecida. Logo, não acredito que se possa imaginar nada que não seja solucionável em caracteres semelhantes: e, em virtude disto, espero mostrar que determinados tipos de problemas podem ser resolvidos de um modo e não de outro, e, assim, na Geometria quase nada restará a ser descoberto (AT, X, 157).

Segue a versão original latina:

> vt enim in Arithmeticâ quaedam quaestiones numeris rationalibus absolvuntur, aliae tantùm numeris surdis, aliae denique imaginari quidem possunt, sed non solvi: ita me demonstraturum spero, in quantitate continuâ, quaedam problemata absolvi posse cum solis lineis rectis vel circularibus; alia solvi non posse, nisi cum alijs lineis curvis, sed quae ex vnico motu oriuntur, ideoque per novos circinos duci possunt, quos non minus certos existimo & Geometricos, quàm communis quo ducuntur circuli; alia denique solvi non posse, nisi per lineas curvas ex diversis motibus sibi invicem non subordinatis generatas, quae certe imaginariae tantùm sunt: talis est linea quadratrix, fatis vulgata. Et nihil imaginari posse existimo, quod saltem per tales lineas solvi non possit; sed spero fore vt demonstrem quales quaestiones solvi queant hoc vel illo modo & non altero: adeò vt pene nihil in Geometriâ supersit inveniendum (AT, X, 157).

4.1. Do verdadeiro método

No *Discurso do método*, embora Descartes atribua à lógica da sua época “preceitos verdadeiros” (AT, VI, 17),[4] a critica por tratar apenas de objetos (ou coisas) que já se sabem e por não ensinar um meio pelo qual se cultiva a razão, isto é, um *modus operandi* da própria razão que lhe evidencie uma correspondência necessária entre diferentes objetos investigados. Esta correspondência deve lhe evidenciar, portanto, quais são os preceitos lógicos que

[4] De acordo com Gilson, os termos “instruções” e “preceitos” (do latim *praecepta*) são algumas regras lógicas estabelecidas para desenvolver o conteúdo de um conceito. Nesta perspectiva, ele expõe a seguinte defesa da lógica cartesiana contra a aristotélica feita por Claberg: “*Notum interim est, Logicae Peripateticae praecepta omnia et singula ad syllogismum tendere, non aliter atque omnes lineae ad centrum in aliquo circulo, sicut Johan. Wllius ex communi Peripateticorum sensu, logicae Peripateticae*”. *Defensio cartesiana*, c. X, 2. (In. GILSON, 1987, p. 183).

constituirão o seu método. Para realizar esta correspondência e encontrar tais preceitos, ele investiga o modo como a análise dos antigos geômetras e a álgebra dos modernos podem contribuir com o seu propósito:

> No que diz respeito à análise dos antigos e à álgebra dos modernos, além de se estenderem a matérias muito abstratas, e que não parecem inicialmente de nenhuma utilidade, a primeira está sempre tão restrita à consideração das figuras que não pode exercitar o entendimento sem fatigar em demasia a imaginação; e quanto à última ficamos tão sujeitos a certas regras e a certos sinais, que dela se fez uma arte confusa e obscura que embaraça o espírito, ao invés de uma ciência que o cultive. Foi isto que me levou a pensar que cumpria procurar algum outro método que, compreendendo as vantagens destas três artes, fosse isento de seus defeitos (AT, VI, 17-18).

Nesta explicação, Descartes faz, primeiramente, referência à análise dos antigos geômetras,[5] mais especificamente ao método de análise proposto por Pappus na obra *Coleção Matemática*,[6], com o intuito de rejeitar a "concepção elementar" das definições, postulados, axiomas (noções comuns) e teoremas estabelecidos por Euclides nos *Elementos.* Para os antigos geômetras estes conceitos parecem designar verdades "auto evidentes" à compreensão dos objetos geométricos (figuras), tais como a definição de ponto, reta etc., ou ao postulado de que "todos os ângulos retos são iguais" etc. (BOYER, 1996, p. 72-73). Os antigos geômetras, portanto, efetuam o método de análise por meio de construções permitidas pelas definições, postulados etc., a saber, instanciando, através de uma figura geométrica, os dados do problema proposto e passando a acrescentar a estes novos dados. Descartes, todavia, despreza a "concepção elementar" dos antigos por considerar ausente uma explicação ulterior, isto é, o modo pelo qual a razão chega a tal concepção.[7] Nesta perspectiva, Jullien (1996, p. 27) relata a seguinte posição de Descartes: (1) que a evidência da construção de uma figura geométrica deve satisfazer a um critério específico de análise e, a partir disso, (2) que a secção de uma figura deve estar segundo o produto dado; (3) que a determinação analítica dos pontos concernidos em uma propriedade fornece a solução de diversos problemas. Segundo Descartes, então, a evidência de um objeto geométrico não é concebida por definições, postulados etc., mas por

[5] Segundo Jullien (1996, p. 26), os antigos geômetras a quem Descartes fez referência são aqueles que estão contemplados no período que vai de Euclides a Proclus.

[6] Ao longo da obra *The Method of Analysis*, Hintikka e Remes (1974) sustentam que o método de análise de Pappus é constituído de meneira complementar por uma etapa sintética e, por isso, eles designam-no como "método de análise e síntese"..

[7] Cabe ressaltar que Descartes despreza a concepção elementar dos antigos geômetras por tratar de "coisas que já se sabem", Isto quer dizer que, por exemplo, axiomas (noções comuns) para Descartes servem como princípios rudimentares da razão ou como princípios analiticamente descobertos. Descartes trata especificamente deste assunto no artigo 49 dos *Princípios da Filosofia* (AT, VIII, 23-24) e na *Conversação com Burman* (AT, V, 146).

um novo critério de análise, a saber, a análise que verifica uma correspondência necessária entre um objeto geométrico e outros objetos matemáticos. Logo, a evidência do objeto geométrico se dá pelo próprio *modus operandi* da razão. Os outros objetos matemáticos são os números algébricos, entretanto, ainda em sua explicação, Descartes sustenta que há também problemas com a álgebra dos modernos. [8] No início século XVII, a Álgebra era explicada por meio de cálculos demasiadamente abstratos, mas, diante do aspecto lógico de sua operacionalidade, Descartes dirige-lhe a atenção com o intuito de interpretar algebricamente as figuras geométricas. No *Discurso do método*, ele continua a sua explicação:

> Notei que, para conhecê-las, eu precisaria às vezes considerar cada uma em particular, e outras vezes somente decorá-las, ou compreender as várias ao mesmo tempo. Assim, pensei que, para melhor considerá-las em particular, teria de conjecturá-las como linhas, porque não havia nada mais simples e nem que pudesse conceber mais distintamente à minha imaginação e aos meus sentidos; mas, para reter e compreender as várias ao mesmo tempo, eu precisava explicá-las por alguns sinais, os mais curtos possíveis, e que, desse modo, aproveitando o melhor da análise geométrica e da álgebra, corrigiria todos os defeitos de uma pela outra (AT, VI, 20).[9]

A partir desta explicação, Jullien (1996, p. 33-34) sustenta que: (1) Descartes acusa os calculadores modernos de usarem notações algébricas bastante confusas e, em seguida, optarem por uma análise desvinculada da síntese; (2) fornece diversos resultados que concernem à resolução das equações para a teoria do cálculo e das raízes; (3) descobre como é possível manipular as raízes dos quadrados e dos cubos, a saber, associando a largura, a superfície e o volume, e, assim constituindo três tipos de grandezas. Com isso, Descartes recoloca os problemas geométricos em uma linguagem de cálculo algébrico, ou, em outras palavras, equaciona todos os lugares (ou propriedades) geométricos por meio de notações algébricas correspondentes. Descartes, portanto, estabelece o seu critério de análise a partir da concepção

---

[8] Vide *Discours de la méthode* (AT, VI, 20). Segundo Jullien (1996, p. 32-34), os algebristas modernos do século XV, como Regiomontanus, Luca Paccioli e Nicolas Chuquet, ainda utilizavam regras de cálculos rudimentares. Seus sucessores do século XVI, sobretudo, Cardan, Tartaglia e Bombelli, conseguiram o êxito de resolver as equações do terceiro e quarto grau. Entretanto, as notações ainda eram bastante confusas; coube a Descartes a realização de uma reforma estrutural na utilização da Álgebra a favor da Geometria. Itard acrescenta que "Em meados de 1629, Descartes dispunha de uma notação algébrica que em seu conjunto é a mesma adotada nos dias atuais, uma adaptação daquela esboçada por Viète, como também de seu cálculo geométrico, onde as construções que correspondem às soluções das equações são colocadas no início da análise, o que opera uma mudança decisiva em relação a Viète. Então, as principais diferenças entre Descartes e Viète são: a escolha de uma unidade de comprimento, a adoção de uma linguagem puramente aritmética e a utilização sistemática de comprimentos retilíneos, isso porque Descartes determina as resoluções das equações no início da análise, já Viète determina no fim da análise as construções enquanto resultado efetivo" (ITARD, 1984, p. 273).

[9] Nesta perspctiva, Allard relata que é na matemática, mais precisamente na análise dos antigos geômetras e na Álgebra dos modernos, que Descartes descobre a "expressão histórica" do método da ciência universal (ALLARD, 1963, p. 42).

que prescreve o encadeamento lógico do efeito (que é aqui uma figura geométrica) à sua causa necessária (que é aqui uma equação algébrica correspondente a um lugar ou propriedade geométrica). Assinala-se que essa análise possibilita, em última instância, a constituição de um verdadeiro método por meio de parâmetros claros e evidentes, os quais têm como ponto de partida o próprio pensamento (ou seja, razão ou entendimento). Segundo Descartes

> [...] os objetos das matemáticas são notadamente diferentes, todavia, todos coincidem em apenas considerarem as diversas relações e proporções que entre eles se encontram. Diante disso, pensei que seria melhor examinar apenas essas proporções, conjecturando-as apenas nas disciplinas que servissem para tornar o seu conhecimento mais fácil, mesmo assim, sem os limitar de modo algum a essas disciplinas, com o intuito de poder melhor aplicá-las a todas as outras às quais conviesse (AT, VI, 20).

4.2. O contraexemplo da Quadratriz

Torna-se necessário examinar a interpretação cartesiana do modo como Pappus explica a quadratriz a partir do quadrado OADE. Tal interpretação é realizada por meio dos comentários feitos por Vuillemin (VUILLEMIN, 1960). Segue Vuillemin: propondo O como centro, Pappus traça um quatro do círculo de raio OA (ver figura 4).[10] Supõe que o raio OA gira por meio de um movimento uniforme em volta de O e que, durante esse mesmo tempo, a reta AD se move paralelamente a OE em um movimento igualmente uniforme em direção a AO. No início AD estará na posição AD e OA na posição AO. A chegada AD e OA estará simultaneamente na posição OE.

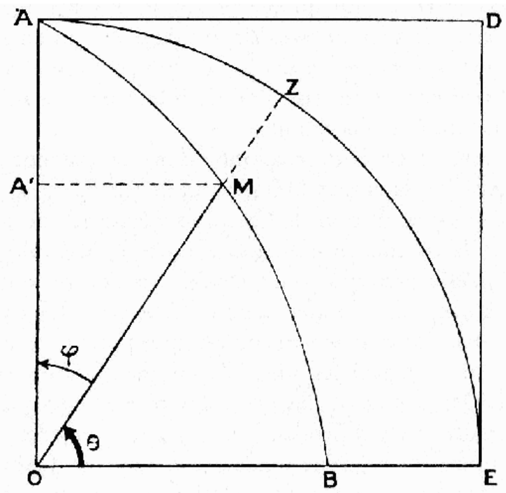


Figura 4 (VUILLEMIN, 1960, p. 146)

[10] Vide VUILLEMIN, 1960, p. 147.

Seja φ o ângulo AOZ e M a intersecção do raio OZ e da curva quadratriz obtida por um movimento composto (problema linear). Poder-se-á construir pelos pontos a curva que é engendrada na divisão de uma parte OA e do outro ângulo EOA em duas partes iguais. A equação da curva é igualmente fornecida pela relação do ângulo EOA = π/2. Essa relação está para cada ponto M obtido para a construção, a saber, dividido em tantas quantas partes que o segmento de retas OA. Tem-se:

π/2/θ=AO/OA´=OA/OM.sin θ

Coloca-se pela convenção: OA=1 e caso se considere o ângulo φ=MOA, chega-se:

φ= π/2 – θ:π/2= φ/OA – OA´/ 1 – OA´

Observa-se *OA´* como incógnita *y*, função da variável independente *x=A´M*. Tem-se, assim:

x/y = A´M/ OA´= OM sin φ /OM cos φ = tg φ e π /2= φ /1 – y

Donde se obtém:

φ = π /2 – π /2.y e x=y tg φ =y tg (π /2– π /2.y)= y cotg (π /2.y)

Sabe-se que *tg* u/ u tende a 1 quando u tende a zero: [11]tg u — u (u□0), então:

$$x = \frac{y}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi y}{2}} = \frac{\frac{\pi y}{2}\cdot\frac{2}{\pi}}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi y}{2}} = \frac{\frac{\pi y}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi y}{2}}\cdot\frac{2}{\pi}$$

Essa expressão tende a 2/π quando *y* tende a zero. Logo: OB = 2/π é a expressão matemática pela qual se pode adquirir a determinação de π. [12] Ao examinar o critério de

---

[11] Vide VUILLEMIN, 1960, p. 147.

[12] O problema da quadratura do círculo foi formulado inicialmente por Menaecmus e Dinóstrato. Segundo Boyer, para Dinóstrato a quadratura do círculo tornou-se uma questão simples quando foi observada uma notável propriedade da extremidade *Q* da trissectriz de Hípias. Se a equação da trissectriz *π r* sen *θ = 2aθ* onde *a* é o lado do quadrado ABCD associado à curva, então o limite de *r* quando *θ* tende a zero é de 2a/ *π*. Como se segue, a demonstração, tal como é concebida por Pappus e provavelmente devida a Dinóstrato, baseia-se unicamente em considerações de uma geometria elementar. Com isso, o teorema de Dinóstrato versa que o lado *a* é a medida proporcional entre segmentos *DQ* e o arco do quarto de círculo *AC*, isto é, *AC / AB = AB / DQ*. Ao passo que segundo Boyer: "Ao se utilizar uma demonstração ou prova indireta tipicamente grega se estabelece o teorema por distinção das alternativas. Então, supondo primeiro que *AC / AB = AB / DR* onde *DR > DQ*. Então seja *S* a interseção do círculo de centro *D* e raio *DR* com a trissectriz e *T* a interseção do mesmo círculo com o lado *AD* do quadrado. De *S* se baixaria a perpendicular *SU* ao lado *CD*. Dinóstrato sabia que os arcos do círculo correspondentes são proporcionais aos raios, logo *AC / AB = TR / DR*; e como por hipóteses *AC / AB = AB / DR*, resulta que *TR = AB*. Mas pela propriedade que define a trissectriz e assim se sabe que *TR / SR = AB / SU*. Logo, como TR = AB, deve seguir-se que SR = SU, o que é evidentemente falso, pois a perpendicular seria mais curta que qualquer outro segmento ou a curva indo de *S* à reta *DC*. Portanto o quarto termo *DR* na proporção *AC / AB = AB / DR* não pode ser maior que *DQ*. De maneira semelhante se *prova* ou demonstra que essa quarta proporcional

construtibilidade da quadratriz de Pappus, Descartes não identifica o ponto de intersecção entre essa curva e uma reta, como, por exemplo, os pontos pertencentes à reta, àhipérbole e à elipse, quando ele tratou das ovais (enquanto curva geométrica). Neste último caso em especial, observa-se que cada ponto do lugar é obtido como intersecção entre duas curvas geométricas, por sua vez, determinadas pela aplicação de uma sequência finita de construções exatas. Numa carta datada em 13 de novembro de 1629, Descartes sustenta a ininteligibilidade da quadratriz:

> A invenção do Senhor Gaudey é muito boa, isto é, em uma viabilidade prática. […] A linha hélice que vós não nomeastes e que não é uma linha aceita na Geometria, mais do que aquela que é designada *quadratriz*, porque ela serve para quadrar o círculo e, igualmente, para dividir o ângulo em todos os tipos de partes iguais tanto quanto aquela, e tem muitas outras utilidades que podereis ver nos *Elementos* de Euclides, comentados por Clavius. Ora, embora possamos encontrar uma infinidade de pontos por onde passa a hélice e a quadratriz, mesmo assim, não se pode encontrar geometricamente nenhum dos pontos que sejam necessários para os efeitos tanto de uma quanto da outra […] (AT, I, 70-71).[13]

---

não pode ser menor que *DQ*; portanto o teorema de Dinóstrato estaria provado, isto é, $AC / AB = AB / QD$. Dado o ponto Q de interseção da trissectriz com DC, se obtém, pois, uma proporção envolvendo três segmentos retilíneos e o arco circular AC. Por uma construção geométrica simples do quarto termo numa proporção se pode, com efeito, facilmente traçar um segmento de reta *b* de comprimento igual a AC. O retângulo que tem um lado *2b* e *a* como o outro lado, se obtém a área exatamente igual à do círculo com raio *a*; constrói-se facilmente um quadrado de área igual ao do retângulo, tomando como lado do quadrado a média geométrica dos lados do retângulo. Como Dinóstrato provou que a trissectriz de Hípias serve para quadrar o círculo e denomina-se comumente de quadratriz. Como se segue, desde os geômetras gregos que esse tipo de construção violava as regas da geometria, isto é, em construções que apenas advogavam círculos e retas" (BOYER, 1996, p. 66-67). Serfati oferece o seguinte modelo de geração da quadratriz: Do ponto H_1 é descrito um movimento retilíneo uniforme em um lado vertical do quadrado. Do ponto H_2 é descrito o movimento uniforme em 1/4 do círculo de centro O, de modo que os dois pontos originem-se ao mesmo tempo do ponto C e cheguem conjuntamente no ponto B. A cada instante t, a intersecção do raio OH_2 (t) e da paralela partem de H_1 (t) ao lado horizontal do quadrado. Com isso, designa-se o ponto F(t), cujo ponto determina a quadratriz de Hippias. Esta curva surge por isso a partir de dois tipos de movimento uniforme, a saber, um movimento circular e um movimento retilíneo. Vide SERFATI, 1993, 197-230.

[13] As intersecções dos segmentos traçados desse modo formarão um conjunto de pontos pertencentes a uma quadratriz. Ora, na passagem citada, Clavius propõe uma construção da quadratriz mais precisa e mais geométrica que a apresentada por Pappus na *Collectio*. Segundo Rodis-Lewis, os jesuítas do colégio La Flechè ensinaram matemática ao estilo escolástico, em outras palavras, a matemática de Clavius (RODIS-LEWIS, 1995, p. 49). A matemática utilizada por Clavius não requisita a álgebra em favor da construção geométrica, pois o jesuíta não tinha posse de um método analítico e, diante disso, apenas utilizava procedimentos silogísticos – ao modo aristotélico – da categoria da quantidade. No que diz respeito à divisão do ângulo em partes iguais, Milhaud relata que Descartes anuncia em 26 de março de 1619 quatro inovadoras demonstrações a partir do uso do compasso. Tratava-se, primordialmente, do famoso problema da divisão de um ângulo em três partes iguais, ou mesmo de um número qualquer de partes iguais; depois dos três tipos de equações cúbicas, cada uma com toda a variedade de sinais que se pode comportar, isto é, em treze casos distintos para as equações comuns, a saber, entre *z* e OX+ ON, entre ze OX – ON, entre *z* e ON – OX. Observa-se que Descartes emprega as notações cóssicas. Tais notações eram usadas, sobretudo, na matemática alemã do século XVI e do começo do século XVII. É possível assinalar que Descartes havia adquirido as notações por meio das obras do Jesuíta Clavius, que deveria fazer parte da biblioteca dos Jesuítas de La Flechè. É um sistema de notações onde – como em Diophante – uma característica especial designa cada uma das três primeiras potências da incógnita e da raiz. N é a raiz, a coisa (cosa para Viète), *z* designa o quadrado e π o cubo, *zz*, a quarta potência etc. A letra O introduzida por Descartes designa um coeficiente qualquer Em seguida, Descartes emprega as notações nos treze casos distinguidos por ele: $x^3 = \pm px \pm q$, $x^3 = \pm px^2 \pm q$, $x^3 = \pm px^2 \pm qx \pm r$. De onde são necessários os três tipos obtidos com todos os sinais – no secundo membro. Um ângulo é facilmente dividido em três partes iguais por um compasso. Faz-se com que os três

Ainda nesta carta, Descartes alega que o ponto que fornece o diâmetro do círculo ao quadrado dado na explicação de Clavius não é determinado, logo, tampouco o ponto de intersecção entre a quadratriz e a base na construção dada por Clavius é exatamente determinada. Deve-se relembrar que (1) segundo Descartes, caso um ponto que pertença a um lugar for construído pela intersecção entre duas curvas mediante um ponto arbitrariamente escolhido, ele poderá ser determinado a um ponto arbitrariamente escolhido e (2) se os pontos de um lugar são construídos ponto a ponto, então eles são exatamente determinados. Estes dois critérios gerais de construtibilidade são, pois, os meios pelos quais Descartes chega à designação de “figura geométrica” e à “determinação de propriedades analíticas” mediante a compreensão do movimento mecânico estabelecido em algumas curvas.

Constata-se, assim, que, para Descartes, as curvas geométricas devem ser proporcionalmente estabelecidas por meio de movimentos regulares. Tal proporção é adquirida pela legitimidade racional da análise algébrica. Esse é o principal critério de diferenciação entre as curvas geométricas e as curvas mecânicas. Entretanto, se faz necessário diferenciar as seguintes designações: (1) curva mecânica e (2) movimento mecânico. Isso porque (1) curva mecânica é aquela que não detém em si o critério de razão da análise algébrica, ao passo que o (2) movimento mecânico é admitido em curvas (figuras) mecânicas nas quais são projetadas propriedades analíticas, viabilizando a compreensão do seu movimento.

Considerações finais

Por considerar indissociável o projeto cartesiano de uma ciência inovadora proposta em meados de 1619, mais especificamente na carta de Descartes a Beeckman, datada de 26 de março de 1619, da concepção do verdadeiro método logrado em seu resplendor nas obras de 1637, buscou-se esclarecer ao longo deste artigo as conexões teóricas entre a referida célebre carta e as obras subsequentes, especialmente, as *Regulae*, *La Geometrie* e o *Discours de la Methode*.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLARD, Jean–Louis. *Le mathématisme de Descartes*. Ottawa: Ed. Ottawa, 1963.

ALQUIÉ, Ferdinand. *A Filosofia de Descartes.* Tradução de Rodrigues Martins. Lisboa: Editorial Presença, 1986.

ângulos formados resultem sempre iguais, isto é, seja qual for a abertura do compasso. Vide MILHAUD, 1921, p. 38-40.

ARIEW, R., CONTTINGHAM J., SORELL T., *Petrus Ramus: "Dialectic".* In: Background source materials. Cambridge: University Press, 1998.

BOYER, Carl. *História da Matemática.* Tradução de Elza Gomide. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 1996.

_______. *History of analytic geometry.* New Jersey: Princeton University Press, 1988.

COSTABEL, Pierre. D*émarches Originales de Descartes.* Savant. Paris: Vrin, 1982.

_______. *Exercices pour les éléments des solides*. Paris: Presses Universitaires de France, 1987.

COTTINGHAM, John. *Dicionário Descartes*. Tradução de Helena Martins. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1993.

DESCARTES, René. *Oeuvres de Descartes.* Paris: Librairie Philosophique J. Vrin. 1996. 11 vol. Publiées par Charles Adam e Paul Tannery.

GARBER, Daniel. *Corps Cartésiens: Descartes et la philosophie dans les Sciences*. Paris: Presses Universitaires de France, 2004.

GAUKROGER, Stephen. *Descartes: Uma biografia Intelectual.* Tradução de C. Bejamin e I. C. Moreira, Ed. UERJ, 2002.

GILSON, Étienne. *Discours de la Méthode. Texte et Commentaire.* Paris: Vrin, 1987.

_______. *Étudees sur le rôle de la pensée medieval dans la formation du système cartésien.* Paris: vrin, 2005.

_______. *Index Scolastico-Cartésien.* Paris: Librairie Félix Alcan, 1913.

HEATH, T. L. *The Works of Arquimedes.* New York: Dover Publications, 1953.

_______. *The thirteen books of Euclid´s elements*. New York: Dover Publications, 1956.

_______. *A History of Greek Mathematics.* New York: Dover Publications, 1981.

_______. *The method of analysis.* Dordretch: Publishing Company, 1974.

ITARD, Jean. *Essais d'Historie des Mathématiques.* Paris: Ed. Blanchard, 1984.

JULLIEN, Vincent. *Descartes, La <Geometrie> De 1637*. Paris: Presses Universitaires de France, 1996.

KLEIN, Jacob. *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. New York: Dover, 1968.

MEHL, É. *Descartes em Allemange (*1619-1620). Strasbourg: Presses Universitaires Strasbourg, 2001.

MILHAUD, Gaston. *Descartes Savant.* Paris: Librairie Félix Alcan, 1921.

RAMOS, José Portugal. *A constituição de uma teoria das proporções na Geometria de 1637: Demonstrações geométricas versus construções de curvas mecânicas em Descartes*. Ilhéus: Especiaria, 2016.

_______. *Ars de Llull e o desenvolvimento do espírito filosófico de Descartes.* Porto: Mediaevalia, 2015.

_______. *A vitória de La Geometrie de Descartes perante os Elementos de Euclides.* Ed. Campinas: UNICAMP/IFCH, 2017.

_______. *Breve Apresentação da Geometria de Descartes*. Feira de Santana: Ideação, 2013.

_______. *Crítica cartesiana à lógica dialética renascentista.* Ed.São Paulo: Coleção XVII Encontro ANPOF, 2017

RODIS-LEWIS, Geneviève. *Descartes: Biographie*. Paris: Calmann-Lévy, 1995.

SASAKI, Chikara. *Descartes` Mathematical Thought*. Netherlands: Publishers by Kluwer Academic, 2003.

SERFATI, Michel. "*Les compas Cartésiens*". Archives de Philosophiev. 56, n.3, jul.-sep., 1993, p. 197-230.

SHEA, William. *The Magic of Numbers and Motion.* Canton: Science History Publications, 1991.

_______. *Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes*. Paris: APMEP, 1992.

TANNERY. Paul. *Géométrie Grecque: Comment Son Histoire Nous Est Parvenue Et Ce Que Nous En Savons.* Paris: Gauthier-Villars, 1887.

TOURNADRE, Géraud. *L'orientation de la science cartésienne*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1982.

VIÈTE, Fraçois. *Introduction to the analytical art*. In: Klein, Jacob. Greek mathematical thought and the origin of algebra. New York: Dover, 1968.

______. *L' algebra nouvelle de M. Viète*. Trad. en françois par A. Vasset. Paris: Pierre Rocolet, 1630.

VUILLEMIN, Jules. *Mathématiques et Métaphysique Chez Descartes*. Paris: Presses Universitaires de France, 1960.

WEBER, J. P. *La Constituition du texte des Regulae*. Paris: Societé d'Édition d'Enseignement Supérieur, 1964.

_________. *La méthode de Descartes d'après les Regulae*. In: *Archives de Philosophie*, 35, p. 51-60. Paris, 1972.

_______. *Sur la composition de la Regula IV de Descartes.* In: *Revue philosophique de la France et de l´étranger*, 154. Paris, 1964.