

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИЦ (Russia) = 3.939
ESJI (KZ) = 9.035
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2021 Issue: 10 Volume: 102

Published: 30.10.2021 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



Zokir Bozorboyevich Khudayberdiyev
Samarkand State University
Senior Lecture to Department of
Theoretical and Applied Mechanics,
xudoyberdiyevz@mail.ru

Sherzod Rustamkulovich Yaxshiboyev
Samarkand State Architecture and Civil Engineering Institute
Senior Lecture to Department of
Construction mechanics and material resistance

Maftuna Akbar qizi Muhammadiyeva
Samarkand State University
Masters

TRANSVERSE VIBRATIONS OF A THREE-LAYER PLATE

Abstract: The theory of unsteady vibrations of a three-layer elastic plate is developed on the basis of a plane formulation of the problem on the basis of exact solutions of the equations of the linear theory of elasticity in transformations. Equations of transverse vibrations of a three-layer plate are obtained with respect to two auxiliary functions, which are the main parts of the displacements of some intermediate surface of the middle layer. An algorithm is proposed that makes it possible to unambiguously determine the stress-strain state of an arbitrary layer of the plate from the field of the sought-for functions.

Key words: Plates, solutions, equations, oscillations, layer, algorithm.

Language: Russian

Citation: Khudayberdiyev, Z. B., Yaxshiboyev, Sh. R., & Muhammadiyeva, M. A. (2021). Transverse vibrations of a three-layer plate. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 10 (102), 975-980.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-10-102-111> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2021.10.102.111>

Scopus ASCC: 2200.

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Аннотация: Разработана теория нестационарных колебаний трехслойной упругой пластинки исходя из плоской постановки задачи на основе точных решений уравнений линейной теории упругости в преобразованиях. Получены уравнения поперечных колебаний трехслойной пластинки относительно двух вспомогательных функций, являющихся главными частями перемещений некоторой промежуточной поверхности срединного слоя. Предложен алгоритм, позволяющий по полю искомым функций однозначно определить напряженно-деформированное состояние произвольного слоя пластинки.

Ключевые слова: Пластинки, решений, уравнений, колебания, слой, алгоритм.

Введение

Теория упругих пластин представляет собой один из разделов трехмерной теории упругости. В этом разделе рассматриваются такие задачи их расчета, при которых краевые условия на боковых поверхностях пластинки заданы в напряжениях. При этом построение основных соотношений

теории пластин заключается в приведении трехмерной задачи к двумерной. Для достижения цели используют различные методы и подходы. Обычно для этого применяют различного рода упрощающие гипотезы и предпосылки. Эти гипотезы и предпосылки вместе с упрощениями

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 3.939
ESJI (KZ) = 9.035
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

приводят к существенным недостаткам и погрешностям[1].

В последние десятилетия в различных областях техники и строительства широко применяются трехслойные пластинки. При этом во многих случаях динамические расчеты пластин проводятся по классической теории Кирхгофа. Поэтому, очень часто, такие расчеты оказываются пригодными только для низкочастотных колебательных процессов. К таким принадлежат немалое количество исследований. Анализ некоторых из них приведены в работах [2,3,4].

Указанные недостатки относятся как классическим, так и уточненным теориям колебания пластин. Поэтому, многие исследователи предпринимали попытки уточнения дифференциальных уравнений колебания [5,6]. При этом стараются вывести уравнения колебаний, учитывающих те или иные факторы физического, механического или геометрического характера. Дальнейшее развитие и уточнение классической теории можно разделить на два направления: разработка асимптотических теории и теорий типа Тимошенко и Рейсснера[7]. Кроме того, в зависимости от учитываемых факторов, методы вывода дифференциальных уравнений колебания, основанные на динамической теории упругости, разделяются и другие направления.

Одним из них является метод использования общих решений трехмерных задач динамической теории упругости, который развит в работе [4]. Существенное и успешное применение к задачам динамики этот метод получил в работах И.Г.Филиппова и его учеников [8,9]. Он основан на применении интегральных преобразований по координате и времени. В нем эффективно используются общие решения трехмерных задач теории упругости (вязкоупругости) в преобразованиях. В последующем эти решения

разлагаются в степенные ряды для приближенного удовлетворения динамических условий, заданных на граничных поверхностях пластинки [10,11].

Сущность метода сводится к изучению построенных решений при различных типах внешних воздействий. Выяснение условий, при выполнении которых смещения или их «главные части» удовлетворяют несложным дифференциальным уравнениям в частных производных составляет основу метода [12]. Сюда относится и создание алгоритма, позволяющего по полю этих «главных частей» вычислять приближенные значения полей смещений и напряжений.

Постановка задачи.

Рассматривается изотропная трёхслойная пластинка, отнесенная к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$. Предполагается, что пространство между жесткими крайними слоями заполнено более лёгким, а следовательно, менее жестким материалом (заполнителем), удерживающим слой на этом расстоянии и осуществляющим их совместную работу. Принято также, что контакты между несущими слоями и заполнителем жесткие.

Учитывая неограниченность размеров пластинки, в дальнейшем считается, что она находится в условиях плоской деформации (рис. 1). При этом ось Ox направлена вдоль поперечного сечения Oxz по его средней линии, а ось Oz – вверх. Слои пластинки пронумерованы как показано на рис.1, т.е. верхний несущий слой назван первым слоем, нижний несущий слой – вторым, и заполнитель – нулевым слоем. Пусть h_1 , $2h_0$ и h_2 толщины первого, нулевого и второго слоев; λ_m, μ_m - коэффициенты Ляме и ρ_m - объёмные плотности слоев.

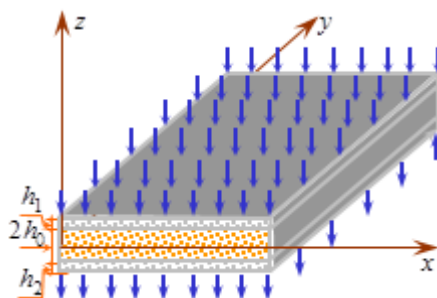


Рисунок 1.

Зависимости напряжений $\sigma_{ij}^{(m)}$ от деформаций $\varepsilon_{ij}^{(m)}$ в точках слоев пластинки описываются законом Гука. В этом случае

уравнения движения точек слоев в декартовой системе координат значительно упрощаются введением функций $\varphi_m(x, z, t)$ и $\psi_m(x, z, t)$. Здесь φ_m и ψ_m потенциалы продольных и поперечных

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 3.939
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

волн, соответственно. В случае плоской деформации, учитывая, что векторы перемещений точек слоев $\vec{U}^m = \vec{U}^m(U_m, W_m)$ разлагаются

только по единичным ортам \vec{i}, \vec{k} уравнения движения приводятся к волновым уравнениям

$$\Delta \varphi_m = \ddot{\varphi}_m / a_m^2; \quad \Delta \psi_m = \ddot{\psi}_m / b_m^2, \quad (1)$$

где a_m, b_m - скорости продольных и поперечных волн в слоях; Δ - двумерный дифференциальный оператор Лапласа. При этом компоненты векторов перемещений, а также тензоров напряжений и деформаций слоев выражаются через введенные функции φ_m и ψ_m .

Предполагается, что при $t < 0$ пластинка находилась в покое, а в момент $t = 0$ к её граничным поверхностям прикладываются динамические воздействия. В силу линейности задачи можно представить поля смещений, в виде наложения симметричной и антисимметричной частей

$$\vec{U}_m = \vec{U}_m^s + \vec{U}_m^a,$$

где \vec{U}_m^s - симметричная (продольная), \vec{U}_m^a - антисимметричная (изгибная) части полей перемещений слоев пластины. При этом симметричные части должны удовлетворять граничным условиям при

$$z = (-1)^{i-1} h_i^*, \quad h_i^* = h_0 + h_i, \\ \sigma_{xz}^{(i)} = f_x^{(i)}; \quad \sigma_{zz}^{(i)} = f_z^{(i)}; \quad (i = 1, 2). \quad (2)$$

Кроме того, на поверхностях заполнителя имеют места динамические и кинематические контактные условия:

при $z = h_0$

$$\sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{xz}^{(1)}, \quad \sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(1)}, \quad U_0 = U_1,$$

$$W_0 = W_1;$$

при $z = -h_0$

$$\sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{xz}^{(2)}, \quad \sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(2)}, \quad U_0 = U_2, \quad W_0 = W_2. \quad (3)$$

Начальные условия нулевые.

Метод решения.

Для решения поставленной задачи необходимо задать выражения для функций $f_x^{(1,2)}(x, t)$ и $f_z^{(1,2)}(x, t)$ из граничных условий. Следуя [5], функции внешних воздействий представим в виде

$$f_x^{(1,2)}(x, t) = \int_0^\infty \frac{\cos kx}{\sin kx} \left\{ dk \int_{(i)} \tilde{f}_x^{(1,2)}(k, p) e^{pt} dp, \right. \\ \left. f_z^{(1,2)}(x, t) = \int_0^\infty \frac{\sin kx}{-\cos kx} \right\} dk \int_{(i)} \tilde{f}_z^{(1,2)}(k, p) e^{pt} dp, \quad (4)$$

где $f_x^{(1,2)}(k, p), f_z^{(1,2)}(k, p)$ - функции, регулярные при $\text{Re } p \geq 0$, имеющие конечное число полюсов, принимающие произвольные значения внутри некоторой области $\Omega(k, p)$, содержащий промежуток $(-i\omega_0, i\omega_0)$ мнимой оси, убывающие при $p \rightarrow \mp i\infty$ не медленнее, чем $|p|^{-n_0}$, где $n_0 \gg 1$, и такие, что вне $\Omega(k, p)$ их значения пренебрежимо малы. Кроме того функции $\tilde{f}_x^{(1,2)}(k, p)$ и $\tilde{f}_z^{(1,2)}(k, p)$ - аналитические, принимающие произвольные значения в промежутки $(0, k_0)$, убывающие при $k \rightarrow \infty$, как k^{-n_0} , и пренебрежимо малые при $k > k_0$; (l) - контур $\text{Re } p = \nu > 0$ на комплексной плоскости (p), оставляющего область $\Omega(k, p)$ правее себя.

В соответствии с принятыми представлениями функций внешнего воздействия решение поставленной задачи также ищем в виде (4). Это позволяет получить из (1) обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. В случае симметричных воздействий, когда будут иметь место продольные колебания пластины, решением полученных уравнений будет

$$\tilde{\varphi}_m(z, k, p) = A_m^{(1)} c h \alpha_m z, \quad \tilde{\psi}_m(z, k, p) = B_m^{(1)} s h \beta_m z. \quad (5)$$

где

$$\alpha_m^2 = k^2 + p^2 / a_m^2; \quad \beta_m^2 = k^2 + p^2 / b_m^2.$$

Перемещения U_m и W_m также представим в виде (4) и подставляя вместе с (5) в выражения перемещений, для преобразованных \tilde{U}_m и \tilde{W}_m будем иметь выражения через гиперболические функции и постоянные интегрирования. Далее с использованием стандартных разложений гиперболических функций в степенные ряды, получим

$$\tilde{U}_m = \sum_{n=0}^{\infty} \left[k \alpha_m^{2n} \cdot A_m^{(1)} - \beta_m^{2n+1} B_m^{(1)} \right] \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \quad (6)$$

$$\tilde{W}_m = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_m^{2n+2} \cdot A_m^{(1)} - k \beta_m^{2n+1} B_m^{(1)} \right] \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

В качестве искоемых функций в уравнениях колебания трехслойной пластинки примем главные части преобразованных перемещений \tilde{U}_0 и \tilde{W}_0 такой поверхности нулевого слоя, расстояние от поверхности $z = 0$ которой определяется формулой

$$\xi = \chi \cdot h_0 \quad -1 \leq \chi < 0; \quad 0 \leq \chi < 1$$

где χ - постоянное число, удовлетворяющее неравенству $-1 \leq \chi \leq 1$. Для этого в выражениях

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 3.939
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

(6) примем $z = \xi$, $m = 0$ и $n = 0$. Тогда введя обозначения $\tilde{U}_0^{(0)}$ и $\tilde{W}_0^{(0)}$ получим

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0^{(0)} &= kA_0^{(1)} - \beta_0 B_0^{(1)} \\ \tilde{W}_0^{(0)} &= [\alpha_0^2 A_0^{(1)} - k\beta_0 B_0^{(1)}] \xi \end{aligned} \quad (7)$$

Решив систему относительно $A_0^{(1)}$ и $\beta_0 B_0^{(1)}$, выразим их через $\tilde{U}_0^{(0)}$ и $\tilde{W}_0^{(0)}$. Из контактных условий (3) находятся выражения для постоянных $A_m^{(1)}$ и $B_m^{(1)}$ при $m = 1, 2$. Затем они подставляются в граничные условия (2). Это позволяет получить уравнения симметричных колебаний трехслойной пластинки в следующем виде

$$A_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} W_0^{(0)} \right] + B_1 [U_0^{(0)}] = S_1 [f_x^{(1)}]; \quad (8)$$

$$A_2 [W_0^{(0)}] + B_2 \left[\frac{\partial}{\partial x} U_0^{(0)} \right] = S_2 [f_z^{(2)}],$$

где A_k, B_k, S_k - дифференциальные операторы одинаковой структуры, имеющие вид

$$\begin{aligned} D_k &= D_{k1} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + D_{k2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + D_{k2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \\ &+ D_{k4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + D_{k5} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{k6} \end{aligned}$$

D_{kj} равны A_{kj}, B_{kj} или S_{kj} :

$$\dots, A_{26} = 1 - q_2, \dots, B_{26} = -\xi(1 + q_2);$$

где $(i = 1, 2)$; $z_1 = h_0 + h_1$; $z_2 = h_0 + h_2$;

$$q_m = 1 - \frac{\lambda_m}{\mu_m}; \quad a_m, b_m - \text{соответственно}$$

скорости продольных и поперечных волн в материале пластинки. При этом перемещения точек пластинки определяются по формулам

$$U_0 = \left[(1 - q_0) \frac{z^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + 1 \right] U_0^{(0)} - \frac{q_0 z^2}{2\xi} \frac{\partial}{\partial x} W_0^{(0)}; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{1}{\xi} \left[\frac{z^3}{6} \left(\left(\frac{1}{b_0^2} + q_0 \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (1 + q_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + z \right] W_0^{(0)} + \\ &+ q_0 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{z^3}{6} \frac{\partial}{\partial x} U_0^{(0)} \end{aligned}$$

Постановка прикладной задачи и её решение.

Рассмотрим задачу о симметричных колебаниях заземленной в продольном направлении пластинки, при $x = 0$ и $x = l$, где l - длина пластинки в направлении оси Ox . В качестве уравнений колебания примем систему (8). Граничные условия задачи имеют вид

$$U_0^{(0)} = 0; \quad \frac{\partial^2 U_0^{(0)}}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial W_0^{(0)}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^3 W_0^{(0)}}{\partial x^3} = 0.$$

Начальные условия считаются нулевыми.

Решение системы уравнений (8), удовлетворяющее условиям закрепления торцов, а также функции внешних воздействий представим в виде

$$\begin{aligned} U_0^{(0)} &= \sum_{m=1}^{\infty} u(t) \sin \frac{m\pi x}{l}; \quad W_0^{(0)} = \sum_{m=1}^{\infty} w(t) \cos \frac{m\pi x}{l}; \\ f_x &= \sum_{m=1}^{\infty} f_{xm}(t) \sin \frac{m\pi x}{l}; \quad f_z = \sum_{m=1}^{\infty} f_{zm}(t) \cos \frac{m\pi x}{l}; \end{aligned} \quad (10)$$

Подстановка (10) в (8) приводит к системе двух дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно функций $u(t)$ и $w(t)$. Задача решена численно при следующих значениях физико-механических и геометрических параметров трехслойной пластинки:

$$\begin{aligned} \xi &= 0.9h_0, \quad l = 0.4m, \quad h_0 = 0.04m, \quad h_1 = 0.001m, \\ h_2 &= 0.001m, \quad \rho_0 = 30 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_1 = 2700 \text{ kg/m}^3, \\ \rho_2 &= 2700 \text{ kg/m}^3, \quad E_0 = 0.165010^9 \text{ Pa}, \quad E_1 = 6910^9 \text{ Pa}, \\ E_2 &= 6910^9 \text{ Pa}, \quad \nu_0 = 0.03125, \quad \nu_1 = 0.33, \quad \nu_2 = 0.33, \\ f_{xm}(t) &= t^2, \quad f_{zm}(t) = 3t^2. \end{aligned}$$

По результатам решения системы дифференциальных уравнений (2.3.1) с помощью пакета прикладных программ "Maple-12" вычислены главные части продольного и поперечного перемещения точек срединного слоя в зависимости от времени и координаты. Полученные результаты приведены на рис. 2. а) б); рис. 3. а) б).

Выводы.

На рис.2-3 а, приведены графики зависимостей главных частей перемещений $U_0^{(0)}(x, t)$ и $W_0^{(0)}(x, t)$ от времени при различных значениях координаты x . На рис.2-3 б приведены графики зависимостей главных частей перемещений $U_0^{(0)}(x, t)$ и $W_0^{(0)}(x, t)$ от координаты x при различных значениях времени t .

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 3.939
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

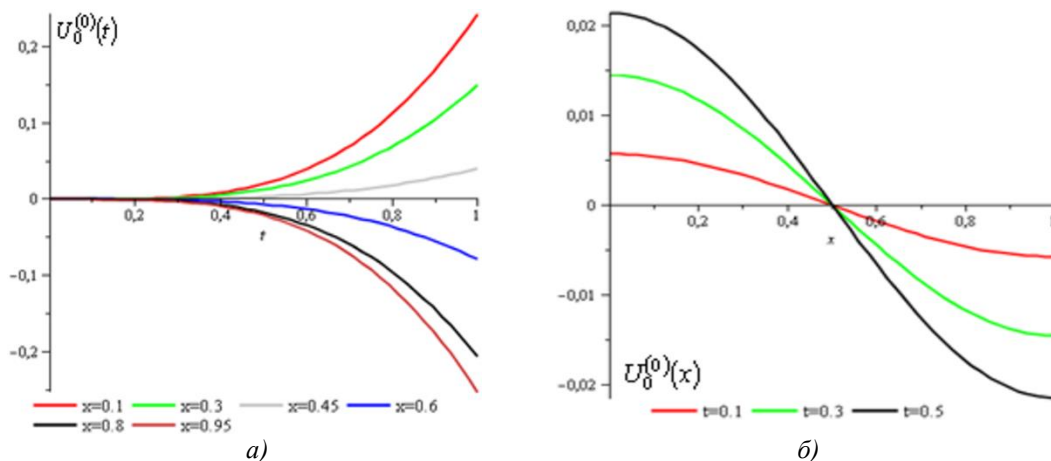


Рис 2. По продольного перемещению U_0

а) от времени и б) от координаты

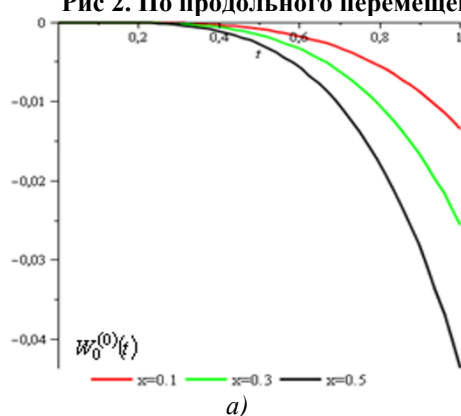
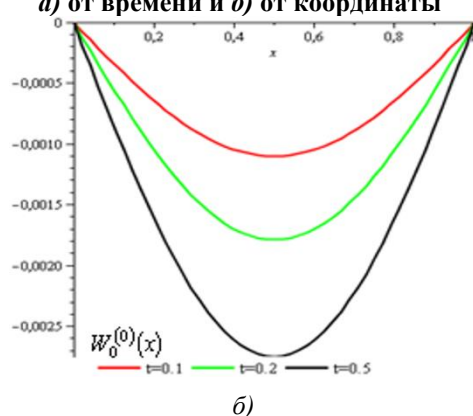


Рис 3. По поперечного перемещению W_0



а) от времени и б) от координаты

Из приведенных графиков на рис. 2. а) и б) следует, что амплитуды главной части продольного перемещения слоя $U_0^{(0)}(x,t)$ в начале процесса имеют небольшие отклонения от нулевой отметки. В моментах времени больших, чем одной пятой части действия нагрузок, т.е. при $t > 0,2$, они начинают резко возрастать для сечений пластинки, расположенных до середины пластинки, т.е. до $x < 0,5$. Это указывает на то, что точки сечений пластинки, находящиеся левее срединного сечения $x = 0,5$ получают положительные перемещения, т.е. продольные волокна пластинки в левой ее половине испытывают растяжения.

С другой стороны в тех же моментах времени точки сечений пластинки, находящиеся правее срединного сечения $x = 0,5$, получают отрицательные перемещения, т.е. продольные волокна пластинки в правой ее половине испытывают сжатие. Данное двойное поведение сечений, находящихся по разным сторонам срединного сечения пластинки, полностью согласуется с физической сущностью решаемой задачи.

При этом, левый и правый края пластинки испытывают продольные перемещения, абсолютные значения которых не превышает 0,25

(величина безразмерная). При $x = 0,5$ главная часть $U_0^{(0)}(x,t)$ продольного перемещения $U_0(x,t)$ равна нулю. Это вызвано тем, что продольного перемещения $U_0^{(0)}(x,t)$ присутствует функция $\cos \frac{m\pi x}{l}$, которая при $x^* = \frac{x}{l} = 0,5$ равна нулю.

Из рис. 2 б) следует, что изменение главной части продольного перемещения $U_0^{(0)}(x,t)$ носит синусоидальный характер. На левом и правом краях пластинки оно достигает максимальные значения, которая соответствует поставленным условиям задачи.

В поперечном направлении амплитуда главной части поперечного перемещения слоя $W_0^{(0)}(x,t)$ в начальный момент времени очень мала, которая начинает возрастать с течением времени. Деформация слоя в поперечном направлении становится значительной с течением времени.

При этом на торцах слоя $W_0^{(0)}(x,t)$ равна нулю. Максимальные значения $W_0^{(0)}(x,t)$ наблюдаются в сечении $x = 0,5$ в конце времени расчета при $t = 1$. Это показывает, что амплитуды $W_0^{(0)}(x,t)$ в сечениях срединного слоя возрастают

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 3.939
ESJI (KZ) = 9.035
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

с течением времени (рис.3 а,б). Значение $W_0^{(0)}(x, t)$ в точке максимума небольшое и равно 0.0027, что примерно на один порядка меньше, чем соответствующее значение главной части продольного перемещения.

Следовательно, можно сделать вывод о том, что при симметричных колебаниях трехслойной пластинки можно пренебречь поперечными перемещениями точек. С другой стороны ясно, что появление незначительных поперечных перемещений точек пластинки вызвано действием

продольных внешних нагрузок f_x , на лицевой и обратной сторонах пластинки.

В структуре главной части поперечного перемещения $W_0^{(0)}(x, t)$ присутствует функция $\sin \frac{m\pi x}{l}$, которая при $x^* = \frac{x}{l} = 0,5$, т.е. в срединном сечении равна единице, что обеспечивает достижение максимального значения перемещения $W_0^{(0)}(x, t)$ в этом сечении. Данный фактор также соответствует физической сущности поставленной задачи.

References:

1. Grigoluk, Je.I., & Selezov, I.T. (1973). *Neklassicheskie teorii kolebanij sterzhnej, plastin i obolochek*. Itogi nauki i tehniki. Ser. Mehanika deform. tverdyh tel, T. 5. (p.272). Moscow: VINITI.
2. Hudojnazarov, H. H. (2003). *Nestacionarnoe vzaimodejstvie cilindricheskikh obolochek i sterzhnej s deformiruemoj sredoj*. (p.325). Tashkent: Izd-vo med.lit. imeni Abu Ali Ibn Sina.
3. Aleksandrov, A.Ja., & Kurshin, L.M. (1968). *Trehslujnye plastinki i obolochki. Prochnost', ustojchivost', kolebanija*. (pp.245-308). Moscow: Mashinostroenie, t.2.
4. Petrashen', G.I. (1966). Problemy inzhenernoj teorii kolebanij vyrozhdennyh sistem. *Iss-ja uprugosti i plastichnosti*, L.: Izd-vo LGU, - №5, pp. 3-33.
5. Petrashen', G.I., & Hinen, Je.V. (1968). *Ob inzhenernyh uravnenijah kolebanij neideal'no-uprugih plastin*. Trudy MIAN. T. 95, (pp.151-183). L.: Nauka.
6. Filippov, I.G. (1986). Utochnenie differencial'nyh uravnenij kolebanija vjaskouprugih plastin i sterzhnej. *Prikl.meh*, 22, №2, pp. 71-78.
7. Mirzakobilov, N.H. (1992). *Kolebanija trehslojnyh plastin chastnogo vida*. Diss. na sois. uch. st. kand. nauk. (p.139). Moskva.
8. Filippov, I.G., & Cheban, V.G. (1988). *Matematicheskaja teorija kolebanij uprugih i vajzkouprugih plastin i sterzhnej*. (p.188). Kishinev: «Shtiinca».
9. Hudojnazarov, H.H., & Filippov, I.G. (1990). Utochnenie differencial'nyh uravnenij prodol'no - radial'nyh kolebanij krugovoj cilindricheskoj vjaskouprugoj obolochki. *Prikl. meh*, 26, №2, pp.63 - 71.
10. Khudoynazarov, Kh., Abdirashidov, A., & Burkutboyev, Sh.M. (2016). Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, no.1, pp. 38-51.
11. Khudoynazarov, Kh.Kh., & Burkutboyev, Sh.M. (2017). Mathematical modelling of torsional vibrations of cylindrical shell taking into account of flowing fluid and rotation. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, no.4, pp. 31-47.
12. Petrashen', G.I., & Hinen, Je.V. (1971). Ob uslovijah primenimosti inzhenernyh uravnenij neideal'no-uprugih plastin. *Voprosy dinamiki teorii rasprostraneniya sejsmicheskoj volny*, № 11, Moscow: Nauka, pp. 48-56.