

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИИ (Russia) = 3.939
ESJI (KZ) = 9.035
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2021 Issue: 09 Volume: 101

Published: 06.09.2021 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



Sharif Ruzievich Axmedov

Bukhara Branch of Irrigation Engineering Technological Institute
Senior Lecturer to Department of Technology Engineering,
dotsent, Bukhara, Uzbekistan

Nurillo Raximovich Kulmuratov

Navoi State Mining Institute
Senior Lecturer to Department of Technology Engineering,
docent, Navoi, Uzbekistan
nurillo.Kulmuratov.64@mail.ru

Uchqun Isroilovich Safarov

Tashkent Institute of Chemical Technology
Senior Lecturer to Department of Technology Engineering,
assistant, Bukhara, Uzbekistan

Mirjalol Choriev

Tashkent Institute of Chemical Technology
Senior Lecturer to Department of Technology Engineering,
assistant, Bukhara, Uzbekistan

Nurbek Nurilloevich Hamraev

Navoi State Mining Institute
Senior Lecturer to Department of Technology Engineering,
assistant, Navoi, Uzbekistan

VIBRATIONS OF DEFORMABLE CYLINDRICAL SHELLS WITH A VISCOELASTIC FILLER

Abstract: The variational principle is used to study the vibrations of a thin longitudinally reinforced viscoelastic cylindrical shell under dynamic influences. Oscillatory processes of the filler and the bonded shell satisfy the Lamé equations. At the contact between the shell and the filler, the conditions of rigid contact are fulfilled. The relationship between stresses and strains, for a linear viscoelastic material, is represented in the form of the Boltzmann-Volterra integral. To solve the problem, the following are used: the method of separated variables, methods of the theory of potential functions (special functions) and the Gauss method. The dependence of the change in the dynamism coefficient on the relative weights of the ribs is plotted for different weights of the transverse rib.

Key words: shell, instantaneous modulus of elasticity, deformation, total energy, ribs, viscosity.

Language: Russian

Citation: Axmedov, S. R., Kulmuratov, N. R., Safarov, U. I., Choriev, M., & Hamraev, N. N. (2021). Vibrations of deformable cylindrical shells with a viscoelastic filler. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 09 (101), 178-186.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-09-101-11> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2021.09.101.11>

Scopus ASCC: 2200.

КОЛЕБАНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ВЯЗКОУПРУГИМ
ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 1.582	РИИЦ (Russia) = 3.939	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 9.035	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

Аннотация: С помощью вариационного принципа исследуются колебания тонкой продольно-подкрепленной вязкоупругой цилиндрической оболочки при динамических воздействиях. Колебательные процессы заполнителя и скрепленной оболочки удовлетворяют уравнениям Ламе. На контакте оболочки и заполнителя выполняются условия жесткого контакта. Зависимости между напряжениями и деформациями, для линейного вязкоупругого материала, представляются в виде интеграла Больцмана-Вольтера. Для решения поставленной задачи применяются: метод разделенных переменных, методы теории потенциальных функций (специальные функции) и метод Гаусса. Построена зависимость изменения коэффициента динамичности от относительных весов ребер при различных весах поперечного ребра.

Ключевые слова: оболочка, мгновений модуль упругости, деформация, полная энергия, ребра, вязкость.

Введение

Подкрепленные вязкоупругие цилиндрические оболочки с деформируемыми заполнителями находят большое применение в ракетостроении, самолетостроении, судостроении и строительстве. Для придания большей жесткости тонкостенная часть оболочки подкрепляется ребрами, при этом незначительное увеличение веса конструкции существенно повышает ее прочность, даже если ребра имеют малую высоту. Большой практический интерес представляет изучение и устранение резонансных явлений в оболочках. Исследованию собственных колебаний круговых конусов посвящено значительное число теоретических и экспериментальных работ. Однако, до сих пор отсутствуют надежные решения, позволяющие определять параметры резонансов в широком диапазоне изменения физико-геометрических параметров. Имеются также работы, в которых теоретико-экспериментальным методом получены зависимости для определения резонансных частот [1] и форм колебаний усеченных конических панелей [2,3]. Другой метод в основном используется для исследования оболочек, которые позволяют перейти от уравнений устойчивости конических оболочек к соответствующим уравнениям для цилиндрических оболочек с круговым поперечным сечением. Во многих работах используется безмоментная и полу-безмоментная теории оболочек [4,5]. Также применяются приближенные методы для решения задач собственных колебаний [6,7]. Особую трудность вызывают задачи колебаний подкрепленных конических оболочек в геометрически нелинейной постановке с учетом реологических свойств материала, решения для которых практически отсутствуют. Анализ литературы показывает, что имеющиеся оптимальные проекты оболочек при заданных геометрических и реологических параметрах не

могут быть реализованы на практике, уровень исследований остаётся только теоретическим. В связи с этим, не смотря на большую историю решения, проблема определения резонансной частоты собственных колебаний с учетом конструктивных свойств ребристых оболочек остаётся актуальной.

Целью настоящей работы является разработка методики, алгоритма и программ для нахождения резонансных частот и форм колебаний для круговых ребристых вязкоупругих цилиндрических оболочек при различных краевых условиях.

2. Методы

2.1. Постановка задачи и основные соотношения

Данная работа посвящена исследованию свободных колебаний цилиндрических оболочек с заполнителем, усиленных дискретно распределенными продольными системами ребер при осевом сжатии и с учетом трения между оболочкой и заполнителем. Проведен анализ влияния параметров внешней среды на параметры частоты собственных колебаний системы.

Рассмотрим замкнутую круговую цилиндрическую оболочку с радиусом R , толщиной h , с ребрами k и n (соответственно по продольным и кольцевым направлениям). Для получения уравнений собственных колебаний используем принцип возможных перемещений Лагранжа, который учитывает граничные условия

$$\delta(K + \Pi - A) = 0, \quad (1)$$

где K - кинетическая энергия оболочки и ребра, Π - потенциальная энергия оболочки и ребра, A - работа внешних сил. Задача решена энергетическим способом. Потенциальная энергия оболочки, нагруженной осевыми сжимающими силами, имеет вид [8]:

$$\Pi = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{\zeta_1} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right)^2 + 2(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) - \right.$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 1.582	ПИИЦ (Russia) = 3.939	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 9.035	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 \Big] d\xi d\theta \frac{Eh}{24(1-\nu^2)R^2} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right)^2 - \\
 & -2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 \right] d\xi d\theta + \\
 & + \frac{E_c}{2R} \sum_{l=1}^k \int_0^{\xi_1} \left[F_c \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{h_c}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)^2 + \frac{I_{yc}}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{G_c}{E_c} I_{kp.c} \times \frac{G_c}{E_c} I_{kp.c} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 \right]_{\theta=\theta_1} d\xi - \\
 & - \frac{\sigma_x h}{2} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 d\xi d\theta - \frac{\sigma_x F_c}{2R} \sum_{i=1}^k \int_0^{\xi_1} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 \Big|_{\theta=\theta_1} d\xi
 \end{aligned}$$

Здесь $\xi_1 = \frac{L}{R}$, $\xi = \frac{x}{R}$, $\theta = \frac{y}{R}$; x, y, z - координаты, E_c, G_c - модули упругости и сдвиги материала продольных ребер, k – количество продольных ребер, σ_x - осевые сжимающие напряжения, u, v, w - компоненты вектора перемещений оболочки, E, ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки, $F_c, I_{yc}, I_{kp.c}$ - соответственно, площади и моменты инерции поперечного сечения продольного стержня относительно осей OX и OZ , а также момент инерции при кручении.

Взаимодействие заполнителя с оболочкой представляется как поверхностная нагрузка, приложенная к оболочке, которая совершает работу на перемещениях поверхности контакта при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное состояние

$$\begin{aligned}
 A_0 = & - \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} (q_x u + q_\theta v + q_z w) d\xi d\theta + \\
 & + \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} f q_z (u + v) d\xi d\theta \quad (2)
 \end{aligned}$$

где q_x, q_θ, q_z - давления со стороны заполнителя на оболочку, f - коэффициент трения. Полная энергия системы:

$$\Pi = \mathcal{U} + K + A_0.$$

Физические соотношения для изотропного вязкоупругого тела принимают вид [9]

$$\begin{aligned}
 \sigma_x = & \frac{E^-}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^z + \nu \varepsilon_y^z); \sigma_y = \frac{E^-}{1-\nu^2} (\varepsilon_y^z + \nu \varepsilon_x^z); \\
 \tau_{xy} = & \frac{E^-}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}^z; \tau_{xz} = \frac{E^-}{2(1+\nu)} \gamma_{xz}^z; \\
 \tau_{yz} = & \frac{E^-}{2(1+\nu)} \gamma_{yz}^z.
 \end{aligned}$$

Здесь μ - коэффициент Пуассона материала оболочки, который считается постоянным; \tilde{E}_κ - операторные модули упругости конической оболочки и ребра

$$\tilde{E}_\kappa [f(t)] = E_{0\kappa} \left[f(t) - \int_0^t R_{E\kappa}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right], \quad (3)$$

$E_{0\kappa}$ - мгновенный модуль упругости Юнга ($\kappa=1,2,3...L$); $\kappa=1$ -мгновенный модуль упругости оболочки, $\kappa=2,3...L$ -мгновенные модули упругости ребер, $f(t)$ - непрерывная функция; $R_{E\kappa}(t-\tau)$ - ядро релаксации.

Физические соотношения, при учете ползучести материала (3) на основе линейной теории наследственности, принимают вид [10]

$$\begin{aligned}
 \sigma_x = & \frac{E_0}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_x^z + \nu_1 \varepsilon_y^z - \int_0^t (\varepsilon_x^z + \nu_1 \varepsilon_y^z) R_{E1}(t-\tau) d\tau \right]; \\
 \sigma_y = & \frac{E_0}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_y^z + \nu_1 \varepsilon_x^z - \int_0^t (\varepsilon_y^z + \nu_1 \varepsilon_x^z) R_{E1}(t-\tau) d\tau \right]; \\
 \tau_{xy} = & \frac{E_0}{2(1+\nu)} \left[\gamma_{xy}^z - \int_0^t \gamma_{xy}^z R_{E2}(t-\tau) d\tau \right]; \\
 \tau_{zx} = & \frac{E_0}{2(1+\nu)} \left[\gamma_{zx}^z - \int_0^t \gamma_{zx}^z R_{E2}(t-\tau) d\tau \right], \quad (4) \\
 \tau_{yz} = & \frac{E_0}{2(1+\nu)} \left[\gamma_{yz}^z - \int_0^t \gamma_{yz}^z R_{E2}(t-\tau) d\tau \right].
 \end{aligned}$$

Здесь $R_{E1}(t-\tau), R_{E2}(t-\tau)$ - ядра релаксации. Влияние жесткости ребер учитывается с помощью импульсной функции Дирака.

Место расположение и высота ребер задается функцией

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 3.939
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{i+j} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \quad (5)$$

Интегрируя напряжения (3) по z , в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2} + H$, получим усилия, моменты и поперечные силы, приведенные к срединной поверхности оболочки, для единицы длины срединной поверхности

$$\begin{aligned} N_y &= \bar{G}_2[(h + \bar{F}) \cdot \varepsilon_2 + \bar{S}\psi_2]; \\ N_{xy} &= \bar{G}_{12}[(h + \bar{F})\gamma_{xy} + \bar{S}\psi_{12}]; \\ M_x &= \bar{G}_1[\bar{S}\varepsilon_1 + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)\psi_1]; \\ M_y &= \bar{G}_2[\bar{S}\varepsilon_2 + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)\psi_2], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \bar{G}_{12}[\bar{S}\gamma_{xy} + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)\psi_{12}]; \\ Q_x &= k\bar{G}_{13}(h + \bar{F}) \cdot \left(\psi_x + \frac{\partial W}{\partial x}\right), \\ Q_y &= k\bar{G}_{23}(h + \bar{F}) \left(\psi_y + \frac{1}{x\sin\theta} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{ctg\theta}{x} V\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}, \\ \psi_1 &= \chi_1 + \nu\chi_2, \quad \psi_2 = \chi_2 + \nu\chi_1, \quad \psi_{12} = 2\chi_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_1[f(t)] &= \bar{G}_2[f(t)] = \frac{\bar{E}}{1 - \nu^2} [f(t)] = \\ &= \frac{E_0}{1 - \nu^2} \left(f(t) - \int_0^t R_E(t - \tau) f(\tau) d\tau \right), \\ \bar{G}_{12}[f(t)] &= \bar{G}_{13}[f(t)] = \bar{G}_{23}[f(t)] = \frac{\bar{E}[f(t)]}{2(1 + \nu)} = \\ &= \frac{E_0}{2(1 + \nu)} \left(f(t) - \int_0^t R_E(t - \tau) f(\tau) d\tau \right) \end{aligned}$$

\bar{F} , \bar{S} , \bar{J} - площади (поперечного или продольного) сечения ребер, приходящиеся на единицу длины срединной поверхности. Статический момент и момент инерции срединной поверхности оболочки имеют вид

$$\bar{F} = \int_{h/2}^{h/2+H} dz; \quad \bar{S} = \int_{h/2}^{h/2+H} z dz; \quad \bar{J} = \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz.$$

Пусть на оболочку действует поперечная динамическая нагрузка $q(x, y, t)$. Тогда неизвестные искомые функции смещений U , V , W и углов поворота нормали ψ_x , ψ_y являются функциями переменных x , y и t . Функционал полной энергии деформации вязкоупругой оболочки имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi + A) dt. \quad (7)$$

Кинетическая энергия оболочки:

$$K = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t_1} \right)^2 \right] d\xi d\theta + \frac{\bar{\rho}_c E_c F_c}{2R(1-\nu^2)} \sum_{i=1}^{k_1} \int_0^{\xi_1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t_1} \right)^2 \right]_{\theta=\theta_1} d\xi \quad (8)$$

здесь $\bar{\rho}_c = \frac{\rho_c}{\rho_0}$, где ρ_0, ρ_c - плотности материалов оболочки и стержня соответственно, $\theta_i = \frac{2\pi}{k_1} i$.

Уравнение движения среды, в векторной форме, имеет вид [11, 12]:

$$a_e^2 \text{graddiv} \vec{S} - a_t^2 \text{rotrot} \vec{S} + \omega^2 \vec{S} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, 0 \leq r \leq R \quad (9)$$

где $a_t^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $a_e^2 = \mu/\rho$, a_t, a_e - скорости распространения продольных и поперечных волн в заполнителе соответственно; $S = S(S_x, S_\theta, S_z)$ - вектор перемещения; λ, μ - коэффициенты Ламе. К системам уравнений движения среды (9) прибавляются контактные условия. Предполагается, что контакт между оболочкой и заполнителем жесткий, т.е. при $r = R$:

$$u = S_x; v = S_\theta; w = S_z \quad (10)$$

$$q_x = -\sigma_{rx}, q_y = -\sigma_{r\theta}, q_z = -\sigma_{rr}, w = S_r \quad (11)$$

Компоненты $\sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rr}$ - тензоры напряжений, определяются следующим образом [13]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rx} &= \tilde{\lambda}_s \left(\frac{\partial S_x}{\partial r} + \frac{\partial S_r}{\partial x} \right); \quad \sigma_{r\theta} = \tilde{\mu}_s \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{S_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_r}{\partial \theta} \right], \\ \sigma_{rr} &= \tilde{\lambda}_s \left(\frac{\partial S_r}{\partial x} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{S_r}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\tilde{\mu}_s \frac{\partial S_r}{\partial r} \end{aligned} \quad (12)$$

где $\tilde{\lambda}_s, \tilde{\mu}_s$ - операторные коэффициенты Ламе для среды в виде (2).

Дополняя контактными условиями (11) и (12) уравнения движения заполнителя (9), приходим к контактной задаче о колебаниях цилиндрической оболочки, подкрепленной перекрестными системами ребер, заполненной средой. Другими словами, задача о колебаниях подкрепленных перекрестными системами ребер цилиндрической оболочки с заполнителем при осевом сжатии сводится к совместному интегрированию уравнений теории оболочек и уравнений движения заполнителя при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

Вариационное уравнение, для тонкой вязкоупругой оболочки, подкрепленной ребрами k -того и j -того направления, получаются как вариация от суммы потенциальной и кинетической энергий с учетом условия сопряжения [14]

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 3.939
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$$\delta K + \sum_{l=1}^N \delta K_l + \sum_{j=1}^n \delta K_j + \delta \mathcal{E} + \sum_{l=1}^m \delta \mathcal{E}_l = 0,$$

$$N = n + m, \quad (13)$$

где $\mathcal{E}_l = \Pi_l - A_l$ - разность потенциалов внешних сил и работы, приложенных ребрам. Данная сумма содержит в качестве слагаемых столько же уравнений (8), сколько имеется ребер по соответствующим направлениям. Таким образом, применительно к рассматриваемой ребристой оболочке, принцип Лагранжа можно сформулировать так [15]:

- действительные перемещения срединной поверхности оболочки u, v, w и ребер u_m, v_m, w_m ($m = k, j$), соответствующие данным граничным условиям и нагрузке, а также переводящие оболочку из естественного положения в состояние упругого равновесия, отличаются от всех возможных перемещений тем, что сообщают рассматриваемой системе минимальное количество потенциальной энергии.

Таким образом, поставлена математическая постановка задачи и приведены основные соотношения вязкоупругих цилиндрических оболочек при собственных колебаниях, которые учитывают геометрическую нелинейность, дискретное введение вязкоупругих ребер, их сдвиговую и крутильную жесткость, поперечные сдвиги и инерцию вращения.

3. Методики решения

Предполагается, что интегральные члены в (4) –(6) малые. Тогда для функции $f(t)$ существует функция $f(t) = \phi(t)e^{-i\omega_R t}$ и интегральные члены заменяются следующими выражениями [16]

$$\tilde{E}_k \phi = E_{0k} [1 - \Gamma_k^C(\omega_R) - i\Gamma_k^S(\omega_R)] \phi, \quad (14)$$

где $\Gamma^C(\omega_R) = \int_0^\infty R_E(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau$,

$\Gamma^S(\omega_R) = \int_0^\infty R_E(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau$ - соответственно

косинус и синус преобразования Фурье, ω_R - действительная величина. При вычислениях используется трёхпараметрическое ядро Колтунова - Ржаницына

$$R_k(t) = A_k e^{-\beta_k t} / t^{1-\alpha_k} \quad [16].$$

Далее будут рассматриваться оболочки, края которых шарнирно оперты. Компоненты вектора перемещений таких оболочек ищем в виде:

$$u = A \cos kx \cos n\phi \exp(i\omega_1 t_1),$$

$$\vartheta = B \sin kx \sin n\phi \exp(i\omega_1 t_1),$$

$$w = C \sin kx \cos n\phi \exp(i\omega_1 t_1) \quad (15)$$

где, A, B, C - неизвестные постоянные;

$k = \frac{m\pi}{L}$ ($m = 1, 2, \dots$), m, n - волновые числа в продольном и окружном направлениях, соответственно, L - длина оболочки,

$$\omega_1 = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad t_1 = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{E_0}{(1-\nu^2)\rho_0 R^2}},$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho_0 R^2 \omega^2}{E_0}}.$$

При равных весах подкрепленной оболочки и оболочки без подкрепления, их собственные частоты обозначены через ω и ω_0 . Решения системы (9) имеют вид [17]:

а) при малых инерционных действиях со стороны заполнителя на процесс колебаний системы:

$$S_x = \left(-kr \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} - 4(1-\nu_s)kI_n(kr) \right) A_s +$$

$$+ kI_n(kr)B_s \cos n\phi \cos kx \exp(i\omega_1 t_1)$$

$$S_\phi = \left[-\frac{n}{r} I_n(kr)B_s - \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} \gamma_1 r C_s \right] \times$$

$$\times \sin \phi \cos kx \exp(i\omega_1 t_1)$$

$$S_r = \left[-k^3 r I_n(kr)A_s + \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} B_s + \frac{n}{r} I_n(kr)C_s \right] \times$$

$$\times \cos n\phi \sin kx \exp(i\omega_1 t_1) \quad (16)$$

б) инерционные действия заполнителя на процесс колебаний системы существенны:

$$S_x = A_s k I_n(\gamma_e r) -$$

$$- \frac{C_s \gamma_e^2}{\partial r} I_n(\gamma_1 r) \cos n\phi \cos kx \exp(i\omega_1 t_1)$$

$$S_\phi = \left[-\frac{A_s n}{r} I_n(\gamma_e r) - \frac{C_s n k}{r \mu} I_n(\gamma_1 r) - \frac{B_s}{n} \frac{\partial I_n(\gamma_1 r)}{\partial r} \right] \times$$

$$\times \sin n\phi \sin kx \exp(i\omega_1 t_1)$$

$$S_r = \left[A_s \frac{\partial I_n(\gamma_e r)}{\partial r} - \frac{C_s k}{\mu_1} \frac{\partial I_n(\gamma_1 r)}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \frac{B_s}{r} I_n(\gamma_1 r) \right] \cos n\phi \sin kx \exp(i\omega_1 t_1) \quad (17)$$

Здесь I_n - модифицированная функция Бесселя n -го порядка первого рода комплексного аргумента, A_s, B_s, C_s - комплексные постоянные.

Используя контактные условия (10) и (11), перемещения оболочек, решение уравнения движения среды (16) и (17), постоянные A_s, B_s, C_s выразим через A, B, C . В результате, для q_x, q_θ, q_r находим [18]:

$$q_x = (\tilde{C}_{x1} A + \tilde{C}_{x2} B + \tilde{C}_{x3} C) \cdot$$

$$\cdot \cos n\phi \cos kx \exp(i\omega_1 t_1)$$

$$q_\theta = (\tilde{C}_{\theta1} A + \tilde{C}_{\theta2} B + \tilde{C}_{\theta3} C) \sin n\phi \cdot$$

$$\cdot \phi \sin kx \exp(i\omega_1 t_1)$$

$$q_r = (\tilde{C}_{r1} A + \tilde{C}_{r2} B + \tilde{C}_{r3} C) \cos n\phi \cdot$$

$$\cdot \sin kx \exp(i\omega_1 t_1) \quad (18)$$

После подстановки (18) в (10) и интегрирования по ξ и θ получаем, для работы распределенных нагрузок со стороны заполнителя, приложенных к оболочке:

$$A = -R^2 \pi [S_2 \tilde{C}_{x1} A^2 + (S_2 \tilde{C}_{x2} + S_1 \tilde{C}_{\theta1}) AB + (S_2 \tilde{C}_{x3} + S_1 \tilde{C}_{r1}) AC +$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 3.939
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$$+S_1(\check{C}_{\theta_3} + \check{C}_{r_2})BC + S_1\check{C}_{\theta_2}B^2 + S_1\check{C}_{r_3}C^2 \quad (19)$$

Здесь \check{C}_{ra} - постоянная, $S_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sin 2k\xi_1}{4k}$.

Используя (10), (11), (19) для полной энергии системы получим полином второго порядка относительно параметров постоянных A, B, C :

$$\begin{aligned} \prod &= (\check{\Phi}_{11} - S_2\check{C}_{x1} - \psi_{11}\omega_1^2)A^2 + \\ &+ (\check{\Phi}_{22} - S_1\check{C}_{\theta_2} - \psi_{22}\omega_1^2)B^2 + \\ &+ (\check{\Phi}_{23} - S_1\check{C}_{r3} - \psi_{33}\omega_1^2 + I_1\sigma_x)C^2 + \\ &+ (\check{\Phi}_{44} - S_2\check{C}_{x2} + S_1\check{C}_{\theta_1})AB + \\ &+ (\check{\Phi}_{55} - S_2\check{C}_{x3} + S_1\check{C}_{r1})AC + \\ &+ S_1(\check{\Phi}_{66} + \check{C}_{\theta_3} + \check{C}_{r_2})BC \end{aligned}$$

Отметим, что величины $\check{\Phi}_{ii} (i = 1, 2, \dots, 6)$, $\psi_{ii} (i = 1, 2, \dots, 6)$, $I_i (i = 1, 2)$ имеют громоздкий вид, поэтому их здесь не приводим.

Условия экстремума \prod по параметрам A, B, C сводят к решению задачи о колебаниях подкрепленных продольными системами ребер, заполненных средой и подверженной продольному сжатию оболочки с учетом трения в контакте, к однородным системам линейных алгебраических уравнений третьего порядка, нетривиальные решения которых возможны лишь в случае, если определитель этой системы равен нулю. Приравнявая далее определители указанных систем нулю, получаем следующее частотное уравнение:

$$\begin{aligned} &2(\check{\Phi}_{11} - S_2\check{C}_{x1} - \psi_{11}\omega_1^2)A + \\ &+ (\check{\Phi}_{44} + S_2\check{C}_{x2} + S_1\check{C}_{\theta_1})B + \\ &+ (\check{\Phi}_{55} - S_2\check{C}_{x3} + S_1\check{C}_{r1})C = 0 \\ &(\check{\Phi}_{44} + S_2\check{C}_{x2} + S_1\check{C}_{\theta_1})A + \\ &+ 2(\check{\Phi}_{22} - S_1\check{C}_{\theta_2} - \psi_{22}\omega_1^2)B + \\ &+ (\check{\Phi}_{66} + \check{C}_{\theta_3} + \check{C}_{r_2})C = 0 \\ &(\check{\Phi}_{55} + S_2\check{C}_{x3} + S_1\check{C}_{r1})A + (\check{\Phi}_{66} + \check{C}_{\theta_3} + \check{C}_{r_2})B + \\ &+ 2(\check{\Phi}_{33} - S_1\check{C}_{r3} - \psi_{33}\omega_1^2 + I_1\sigma_x)C = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Нетрудно заметить, что в случае а) система уравнений (20) приводится к кубическому уравнению относительно ω_1^2 , в противном случае оно является трансцендентным. Поскольку в дальнейшем нас будут интересовать только низкие частоты изгибных колебаний, это уравнение в случае а) можно упростить, отбросив слагаемые с ω_1^4 и ω_1^6 . В результате получаем ($\omega_1^2 = \lambda_a$):

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \frac{f_3^2 f_4 + f_1 f_5^2 + f_2^2 f_6}{2f_5^2 \psi_{11} + f_2^2 \psi_{33} - 4f_1 f_4 \psi_{33} - 0,5f_6 (f_1 \psi_{22} + f_4 \psi_{11})} \\ f_1 &= \check{\Phi}_{11} - S_2\check{C}_{x1}; f_2 = \check{\Phi}_{44} + S_2\check{C}_{x2} + S_1\check{C}_{\theta_1}; \\ f_3 &= \check{\Phi}_{55} + S_2\check{C}_{x3} + S_1\check{C}_{r1}; \\ f_4 &= \check{\Phi}_{66} + \check{C}_{\theta_3} + \check{C}_{r_2}; f_5 = \check{\Phi}_{33} - S_1\check{C}_{r3} + I_1\sigma_x \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогичным образом определяется λ_b для случая б).

В качестве исходных данных следует задать радиусы (большие и маленькие), высоту и толщину оболочки, угол полу раствора усеченного конуса, модуль упругости, коэффициент Пуассона,

параметры ядра релаксации материала, геометрические и механические параметры ребер. В качестве ядра релаксации вязкоупругого материала примем трехпараметрическое ядро $R(t) = \frac{Ae^{-\beta t}}{t^{1-\alpha}}$ Ржаницына–Колтунова [19], обладающее слабой сингулярностью. Здесь A, α, β - параметры материала.

4. Анализ результатов и сравнения

Приведем результаты исследования влияния числа ребер и жесткости заполнителей на критическое напряжение осевого сжатия. Вычисления выполнены для оболочки, среды и ребер с параметрами:

$$E = E_c = E_h = 6,7 \cdot 10^9 \text{Н/м}^2;$$

$$\nu = 0,25; \quad x = 1; \quad n = 8; \quad h_n = 1,4 \text{мм};$$

$$R = 150 \text{мм}; L_1 = 650 \text{мм};$$

$$\frac{F_c}{2\pi R h} = 0,1491 \cdot 10^{-1}; \quad \frac{I_{yc}}{2\pi R^3 h} = 0,7199;$$

$$h = 0,45 \text{мм};$$

$$F_x = 5,55 \text{мм}^2; \quad I_{sh} = 20,0 \text{мм}^4;$$

$$|h_c| = 0,1270 \cdot 10^{-1} \text{Р};$$

$$\frac{I_{kpc}}{2\pi R^3 h} = 0,5225 \cdot 10^{-6};$$

$$I_{kph} = 0,48 \text{мм}^4; \quad f = 0,25$$

Результаты расчетов представлены на рис. 1.

Здесь приведена зависимость от напряжения осевого сжатия ($\sigma_x \cdot 10^{-6} \text{Н/м}^2$). Из рис.1 видно, что с увеличением напряжения частота системы падает. Кроме того, учет трения приводит к снижению значения собственной частоты исследуемой конструкции.

Как отмечено, методика определения оптимальных параметров подкрепленной оболочки построена на сопоставлении минимальных частот колебаний ребристой и гладкой цилиндрической оболочки, усиленными продольными системами ребер, заполненной средой.

В качестве варьируемых параметров рассматриваются: относительная толщина оболочки $h^* = h/R$, расстояния между продольными и поперечными ребрами, отнесенные к толщине оболочки, отношение веса всех ребер к весу оболочки η_1 и отношение веса продольных ребер к весу поперечных ребер η_2 . При этом предполагается, что радиус и длина оболочки, а также характеристики формы сечений продольных и поперечных ребер заранее заданы. Отметим, что для прямоугольных сечений необходимо задавать отношения ψ_1 и ψ_2 высот соответственно продольных и кольцевых ребер к их толщинам. Безразмерные характеристики ребер, входящие в (10), (11), выражаются через указанные параметры:

$$\overline{\gamma}_c^{(1)} = \frac{\phi_1 \phi_2'}{1 + \phi_2'}, \quad \overline{\gamma}_s^{(2)} = \frac{\phi_1'}{1 + \phi_2'}$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 3.939
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$$\frac{h_c}{R} = -\frac{h^*}{2} \left(1 + \sqrt{a_1 \phi_1 \bar{\gamma}_c^{(1)}} \right),$$

$$\mu_{s2} = \frac{1-\nu}{6} \frac{a_2}{\psi_2} (h^*)^2 (\bar{\gamma}_s^{(2)})^2;$$

$$\frac{h_c}{R} = -\frac{h^*}{2} \left(1 + \left(1 + \frac{1}{k_1} \right) \sqrt{a_1 \phi_1 \bar{\gamma}_c^{(1)}} \right),$$

$$\eta_{s1}^{(2)} = \bar{\gamma}_{s1}^{(2)} \bar{\gamma}_s^{(2)} \frac{a_2 \psi_2 (h^*)^2}{12},$$

$$\eta_{s1}^{(2)} = \bar{\gamma}_{s1}^{(2)} \bar{\gamma}_s^{(2)} \frac{a_2 \psi_2 (h^*)^2}{12},$$

$$\eta_c^{(1)} = \bar{\gamma}_c^{(1)} \left[\frac{a_1}{12} \psi_1 \bar{\gamma}_c^{(1)} (h^*)^2 + \left(\frac{h_c}{R} \right)^2 \right],$$

$$\mu_{s1} = \frac{1-\nu}{6} (h^*)^2 (\bar{\gamma}_c^{(1)})^2 \frac{a_1}{\psi_1}$$

При такой постановке результат исследования практически не зависит от характеристик материала оболочки, поскольку (ω_{min}^2) , как известно, слабо зависят от коэффициента Пуассона ν , а их отношение μ не зависит от модуля упругости E . Следует отметить, что для улучшения несущей способности оболочки необходимо найти такое сочетание параметров h^* , a_1 , a_2 , ϕ_1 и ϕ_2 , при которых μ принимает наибольшее значение.

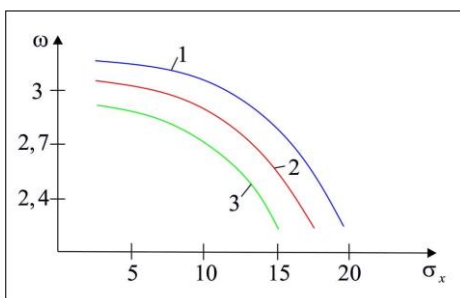


Рис.1. Зависимость частоты системы $\omega = \omega_1 \omega_0$ от сжимающих напряжений при различных значениях n : 1. $n=2$; 2. $n=3$; 3. $n=4$.

В качестве примера, иллюстрирующего изменение μ в зависимости от относительных весов ребер, приведены результаты вычислений усиленных продольно подкрепленными системами ребер цилиндрических оболочек, заполненных средой.

Результаты вычислений представлены на рис. 2 в виде кривых $\mu(\eta_1) = \frac{\omega_R^2}{\nu^2}$ для различных значений η_2 . Сплошные кривые соответствуют колебаниям ребристой оболочки без заполнителей.

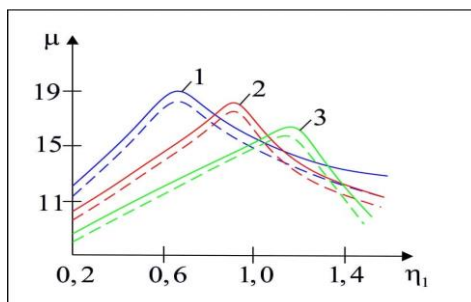


Рис.2. Изменение коэффициента динамичности μ в зависимости от относительных весов ребер при различных весах поперечного ребра 1. $\eta_1 = 0$; 2. $\eta_1 = 0,2$; 3. $\eta_1 = 0,4$.

Анализируя результаты вычислений, нетрудно заметить, что наилучшая несущая способность оболочки достигается при усилении только поперечными ребрами ($\eta_2=0$), для которых $\mu_{max} = 18,7031$. Абсцисса этой точки равна 0,50.

Учет реологических свойств материала позволяет увеличить (или уменьшить) частотные значения оболочки до 10%. Для изгибных колебаний наблюдается существенное уменьшение

локальных максимумов нормальных перемещений с увеличением площади кольцевых ребер оболочки.

5. Заключение

1. Разработан алгоритм решения задач собственных колебаний оболочек для ребристых вязкоупругих цилиндрических оболочек. Для решения динамических задач применяется метод

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 3.939
ESJI (KZ) = 9.035
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

разделения переменных и специальных функции предмета уравнений математической физики, метод замораживания, методы Мюллера и Гаусса.

2. Анализ результатов расчета показывает, что с уменьшением толщины вязкоупругой цилиндрической оболочки, реальные и мнимые части первой и второй частот колебаний монотонно убывают. Реальные части третьей и

четвертой частот умеренно снижаются, а соответствующие мнимые части плавно возрастают.

3. Учет реологических свойств материала позволяет увеличить (или уменьшить) частотные значения оболочки до 10%.

References:

1. Lal, R. (2003). Transverse vibrations of orthotropic non-uniform rectangular plate with continuously varying density. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 34, 587–606.
2. Kaplunov, J.D., & Wilde, M.V. (2000). Edge and interfacial vibrations in elastic shells of revolution. *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, - 51, pp. 29-48.
3. Latifov, F.C. (1999). *Kolebaniya obolochek s uprugoy i jidkoy sredoy*. (p.164). Baku: "Elm".
4. Semenov, A. A. (2016). Model of deformation stiffened orthotropic shells under dynamic loading. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 9(4), pp.485-497.
5. Bosyakov, S.M., & Chjivey, V. (2011). Analiz svobodnix kolebaniy slindricheskix obolochki is stekloplastika pri granichnix usloviyax Nave. *Mexanika mashin, mexanizmov i materialov*, №3, pp. 24-27.
6. Latifov, F.S., Seyfullaev, F.A., & Alyev, Sh. Sh. (2016). Free vibrations reinforced by transverse ribs of an anisotropic cylindrical shell made of fiberglass with a liquid flowing in it. *Applied mechanics and technical physics*, Vol. 57, No. 4, pp. 158-162.
7. Seyfullayev, A.I., & Novruzova, K. A. (2015). Oscillations of longitudinally reinforced orthotropic cylindrical shell filled with a viscous fluid. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, no. 3/7 (75), 29-33.
8. Mamedov, J.N. (2007). Svobodniye kolebaniya slindricheskix obolochek s zapolnitelem, usilennimi prodilnimi rebrami pri osevom sjatii s uchetom diskretnix razmeshaniy reber. *Mexanika mashinstroyeniya*, № 4, pp.7-11.
9. Mirsaidov, M.M., Safarov, I.I., & Teshae, M.X. (2020). *Dynamic instability of vibrations of thin-wall composite curvilinear viscoelastic tubes under the influence of pulse pressure* *E3S Web of Conferences* 164 (14013), pp. 1-12.
10. Khudainazarov, Sh., Mavlanov, T., Qosimov, J., & Nurova, O. (2020). *Forced vibrations of high-rise buildings* IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 869 pp. 1-13.
11. Maiboroda, V. P., Troyanovskii, I. E., Safarov, I. I., Vazagashvili, M. G., & Katalymova, I. V. (1992). Wave attenuation in an elastic medium. *Journal of Soviet Mathematics*, 60 (2), pp. 1379–1382.
12. Maiboroda, V.P., Safarov, I.I., & Troyanovskii, I.E. (1983). Free and forced Oscillations of a System of Rigid bodies on Inhomogeneous Viscoelastic snobbery. *Soviet Machine Science (English Translation of Mashinovedenie)*, (3), pp. 25–31.
13. Mirsaidov, M., Safarov, I., Boltayev, Z., & Teshae, M. (2020). *Spread waves in a viscoelastic cylindrical body of a sector cross section with cutouts*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 869 (4) 042011.
14. Safarov, I. I., Teshae, M., Toshmatov, E., Boltayev, Z., & Homidov, F. F. (2020). *Torsional vibrations of a cylindrical shell in a linear viscoelastic medium*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 883 (1) 012190.
15. Mirsaidov, M.M., Safarov, I.I., Teshae, M.K., & Boltayev, Z. I. (2020). Dynamics of structural Inhomogeneous coaxial-multi-layered systems cylinder-shells. *Journal of Physics: Conference Series*, 1706 (1) 012033
16. Teshae, M. Kh., Safarov, I. I., & Mirsaidov, M. M. (2019). Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, 13 (2), pp. 104-115. DOI: 10.24874/jsscm.2019.13.02.02.08
17. Safarov, I. I., Homidov, F. F., Rakhmonov, B. S., & Almuratov, S. N. (2020). Seismic vibrations of complex relief of the surface of the naryn canyon (on the Norin river in Kyrgyzstan) during large-scale underground explosions. *Journal of Physics Conference Series*, 1706 (1) 012125.

Impact Factor:	ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 1.582	ПИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 9.035	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

18. Mirsaidov, M. M., Safarov, I. I., & Teshae, M. Kh. (n.d.). Dynamics Structurally inhomogeneous lamellae intertexta, et ex *Mechanica Crusta Systems Aequationes Mathematicae parte 1*. Journal et I. 7 (10), October XIV, MMXIX.
19. Teshae, M.K., Safarov, I.I., Kuldashov, N.U., Ishmamatov, M.R., & Ruziev, T.R. (n.d.). On the Distribution of Free Waves on the Surface of a Viscoelastic Cylindrical, *Cavity Journal of Vibrational Engineering and Technologies*, 8 (4), pp. 579-585.