SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2021 **Issue:** 05 **Volume:** 97

Published: 27.05.2021 **http://T-Science.org**

QR – Issue QR – Article

Yu. R. Krakhmaleva
M. H. Dulati Taraz Regional University
candidate of technical sciences

ORTHOGONAL TRANSFORMATION OF A QUADRATIC SHAPE IN THE MAPLE ENVIRONMENT

Abstract: *A mathematical program for converting a quadratic form to a canonical form using an orthogonal transformation in the Maple environment has been developed, which allows the solution process to be carried out with minimal time and a high degree of automation.*

Key words: *Quadratic form, eigenvalues, eigenvectors, normalized vectors, orthogonal transformation.*

Language: *Russian*

Citation: Krakhmaleva, Y. R. (2021). Orthogonal transformation of a quadratic shape in the maple environment. *ISJ Theoretical & Applied Science, 05 (97),* 440-443.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-05-97-74 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2021.05.97.74

Scopus ASCC: *2600.*

ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ В СРЕДЕ MAPLE

Аннотация: *Разработана математическая программа приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования в среде Maple, которая позволяет с минимальными затратами времени и с высокой степенью автоматизации осуществлять процесс решения.*

Ключевые слова: *Квадратичная форма, собственные значения, собственные векторы, нормированные векторы, ортогональное преобразование.*

Введение

Многочисленные приложения квадратичных форм создают необходимость поиска и разработки менее трудоемких способов в применении результатов теории квадратичных форм, избегая сложный вычислительный процесс. Один из таких способ представляется в использовании современных интерактивных вычислительных систем, которые имеют свое развитие на современном этапе. Такие преимущества, как автоматизация решения, минимальная затрата времени, точный результат, избежание трудоемкости процесса доказывают рациональность их применения в теории квадратичных форм.

Рассмотрим задачу приведения квадратичной формы к каноническому виду посредством ортогонального преобразования в среде Maple. Пусть квадратичная форма от трех переменных имеет вид:

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=c11x_1^2+c22x_2^2+c33x_3^2+c12x_1x_2+c13x_1x_3+c23x_2x_3$$

Для решения подключаем специализированный пакет линейной алгебры linalg. Вводим коэффициенты формы, квадратичную форму, коэффициенты симметричной матрицы A формы:

```
c11:=_;c12:=_;c13:=_c22:=_;c23:=_;c33:=_;
f1:=c11*X1^2+c12*X1*X2+c13*X1*X3+c22*X2^2+c23*X2*X3+c33*X3^2;
a11:=c11;a12:=c12/2;a13:=c13/2;a21:=a12;a22:=c22;a23:=c23/2;
a31:=a13;a32:=a23;a33:=c33;
```

```
A:=matrix(3,3,[[a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]]);
```

Используем команду *eigenvectors*, в результате которой в квадратных скобках будут записаны собственные значения матрицы, их кратности, а также соответствующие собственные векторы:

```
a2:=eigenvectors(A);
```

Для квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3)$ с 3-мя переменными возможны несколько случаев кратности собственных значений:1) кратность равна 1,т.е. собственные значения различны; 2) кратность равна 2-м первого собственного значения и 1 второго собственного значения ; 3) кратность равна 1 первого собственного значения и кратность равна 2 -м второго собственного значения; 4) кратность равна 3-м единственного собственного значения. . Все эти случаи должны быть прописаны в программе. Рассмотрим 1-й случай на примере квадратичной формы:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

$$A := \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$a2 := [6, 1, \{[1, -2, -2]\}], [3, 1, \{[-2, -2, 1]\}], [9, 1, \{[-2, 1, -2]\}]$$

Как видно, собственные значения различны и имеют кратность равную 1. Разделяем $a2$ и выделяем в первых двух тройках λ_i, k_i и собственные векторы:

```
a3:=a2[1];lambda1:=a3[1];k1:=a3[2];v1:=a3[3];
a4:=a2[2];lambda2:=a4[1];k2:=a4[2];
```

$$a3 := [6, 1, \{[1, -2, -2]\}]$$
$$\lambda 1 := 6$$
$$k1 := 1$$
$$v1 := \{[1, -2, -2]\}$$
$$a4 := [3, 1, \{[-2, -2, 1]\}]$$
$$\lambda 2 := 3$$
$$k2 := 1$$

Так как в программе необходимо рассмотреть все случаи, то каждый из них запишем в цикле с условным оператором *if*. Для этого в цикле сравниваются значения кратности первого и второго собственных значений. При их равенстве следует, что и кратность третьего собственного значения так же будет равна кратности первого и второго. Тогда собственные векторы симметричной матрицы ортогональны, так как соответствуют различным собственным значениям. И для составления матрицы ортогонального преобразования каждый собственный вектор необходимо нормировать. Далее, записываем каждую координату ортогональных и нормированных векторов, как элемент требуемой матрицы:

```
if (k1=1)and(k2=1) then S1:=v1[1];nS1:=normalize(S1);
q11:=simplify(nS1[1]);q21:=simplify(nS1[2]);;q31:=simplify(nS1[3]);
v2:=a4[3];S2:=v2[1];nS2:=normalize(S2);
q12:=simplify(nS2[1]);q22:=simplify(nS2[2]);;q32:=simplify(nS2[3]);
a5:=a2[3];
lambda3:=a5[1];k3:=a5[2];v3:=a5[3];S3:=v3[1];nS3:=normalize(S3);
q13:=simplify(nS3[1]);q23:=simplify(nS3[2]);;q33:=simplify(nS3[3]);
end if;
```

При нахождении элементов матрицы Q, использована команда *simplify* для упрощения выражений , полученных при нормировании векторов . В результате матрица ортогонального преобразования будет вычислена и проверена на ортогональность командой *orthog*:

$$Q := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$$

true

Записываем ортогональное преобразование переменных , используя элементы матрицы Q:

sys3:={q11*z1+q12*z2+q13*z3=X1,q21*z1+q22*z2+q23*z3=X2,q31*z1+q32*z2+q33*z3=X3};

Покажем, что для ортогональной матрицы Q справедлива формула $Q^T AQ = D$. Для этого используем команды *transpose* - транспонирование матрицы Q и *multiply*- умножение матриц:

QT:=transpose(Q);
QTA:=multiply(QT,A);
QTAQ:=multiply(QTA,Q);

$$QT := \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$QTA := \begin{bmatrix} -6 & 3 & -6 \\ 2 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$QTAQ := \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Далее, записываем ортогональное преобразование переменных с элементами матрицы Q в виде системы:

sys3:={q11*z1+q12*z2+q13*z3=X1,q21*z1+q22*z2+q23*z3=X2,q31*z1+q32*z2+q33*z3=X3};

$$sys3 := \{-\frac{2\,z1}{3} - \frac{2\,z2}{3} + \frac{z3}{3} = X1, -\frac{2\,z1}{3} + \frac{z2}{3} - \frac{2\,z3}{3} = X3, \frac{z1}{3} - \frac{2\,z2}{3} - \frac{2\,z3}{3} = X2\}$$

И последнее, записываем приведенную квадратичную форму f с новыми переменными, используя условный оператор *if*:

if (k1=1)and(k2=1) then f2:=lambda1*y1^2+lambda2*y2^2+lambda3*y3^2;
end if;

$$f2 := 9\,y1^2 + 3\,y2^2 + 6\,y3^2 .$$

Рассмотрим 2-й случай на примере формы :

$$f(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2 - 7x_2^2 + 7x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$$

Вводим коэффициенты формы и саму квадратичную форму, затем коэффициенты симметричной матрицы A формы, аналогично предыдущему рассмотренному случаю. Используем команду *eigenvectors* и имеем :

$$a2 := [9, 2, \{[-1, 0, 1], [4, 1, 0]\}], [-9, 1, \{[1, -4, 1]\}] .$$

Разделяем $a2$ - выделяем первую квадратную скобку и разделяем эту скобку. Затем во второй скобке собственное значение и его кратность. Так как одному собственному значению соответствуют 2 собственных вектора, которые не являются ортогональными. Поэтому решаем систему с собственным значением λ_1 и находим собственный вектор, затем систему с собственным значением λ_2 и находим соответствующий собственный вектор. Затем находим векторное произведение этих векторов, который и будет собственным вектором, ортогональный собственному вектору с собственным значением λ_1. Таким образом, у собственного значения λ_1 имеется 2 ортогональных собственных вектора:

$$V11 := [-1, 0, 1]$$

$$S2 := [4, 2, 4]$$

Для собственного значения с кратностью 1 поступаем, как в выше рассмотренном случае. В результате имеем, ортогональное преобразование переменных с элементами матрицы Q в виде системы и приведенную квадратичную форму f с новыми переменными:

$$sys3 :=$$

$$\left\{\frac{z2}{3} - \frac{2\sqrt{2}\,z3}{3} = X2, -\frac{\sqrt{2}\,z1}{2} + \frac{2\,z2}{3} + \frac{\sqrt{2}\,z3}{6} = X1, \frac{\sqrt{2}\,z1}{2} + \frac{2\,z2}{3} + \frac{\sqrt{2}\,z3}{6} = X3\right\}$$

$$f2 := 9\,z1^2 + 9\,z2^2 - 9\,z3^2$$

Команда *eigenvectors* системы Maple по своему усмотрению записывает тройки с позицией (собственное значение, кратность, собственный вектор).Это означает, что могут иметь, как случай 2) , так и случай 3) при новой загрузке программы. Поэтому, аналогично записываем программу для 3-го случая. Объединяем все случаи в одну программу. В результате программа нахождения ортогонального преобразования будет состоять из циклов в которых осуществляются вычисления для собственных значений с разными кратностями. Более того, в программе заложен выбор того или иного цикла. исходя из исходных данных. В заключении программы вносятся команда правильности вычисления матрицы ортогонального преобразования, команды, которые позволяют визуально увидеть верность для справедливость теоретических выводов. а также формируются циклы для записи приведенной квадратичной формы:

```
if (k1=1)and(k2=1) then f2:=lambda1*z1^2+lambda2*z2^2+lambda3*z3^2;
end if;
if (k1=1)and(k2=2) then f2:=lambda1*z1^2+lambda2*z2^2+lambda2*z3^2;
end if;
if (k1=2)and(k2=1) then f2:=lambda1*z1^2+lambda1*z2^2+lambda2*z3^2;
end if;
```

Эта программа является автоматизированной и может применяться для квадратичных форм с 3-мя вещественными переменными. К достоинствам программы следует отнести избежание сложных вычислений, что непосредственно влияет на трудоемкость процесса решения и возможность минимальных временных затрат вычисления.

References:

1. Mal`cev, I.A. (2010). *Linejnaja algebra*. (p.384). SPb.: Izd. «Lan`».
2. Faddeev, D.K. (2007). *Lekcii po linejnoj algebre*. (p.416). SPb.: Izd. «Lan`».
3. Kostrikin, A.I. (2012). *Vvedenie v algebru*.Ch2. Linejnaja algebra. (p.367). Moscow: MCNMO.
4. Il`in, V.A., & Poznjak, Je.G. (2012). *Linejnaja algebra i analiticheskaja geometrija*. (p.400). Moscow: Prospekt.
5. Gorlach, B.A. (2010). *Linejnaja algebra*. (p.480). SPb.: Izd. «Lan`».
6. Kochetkov, E.S. (2012). *Linejnaja algebra*. (p.416). Moscow: Forum.
7. Postnikov, M.M. (2009). *Linejnaja algebra*. 3-Izd. (p.400). Moscow.
8. Fadeev, D.K., & Fadeeva, V.N. (2009). *Vychislitel`nye metody linejnoj algebry*. (p.736). SPb.: Izd. «Lan`».
9. Tyrtyshnikov, E.E. (2007). *Matrichnyj analiz i linejnaja algebra*. (p.480). Moscow: Fizmatlit.
10. Govoruhin, V.N., & Cibulin, V.G. (1997). *Vvedenie v Maple*. Matematicheskij paket dlja vseh. (p.208). Moscow: Mir.
11. Gorbachenko, V.I. (2011). *Vychislitel`naja linejnaja algebra s primerami na MATLAB*. (p.320). SPb.:BHV.