

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИЦ (Russia) = 0.126
ESJI (KZ) = 9.035
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2021 Issue: 04 Volume: 96

Published: 20.04.2021 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



N.A. Abiev

Taraz Regional University
Candidate of physical and mathematical sciences
Head of the Department of Mathematics

Z. Turar

Taraz Regional University
Master's degree student in 2 courses

IMPLEMENTATION IN MAPLE BOGOLIUBOV-KRYLOV AVERAGING METHOD

Abstract: In the present paper questions of computer implementation of Bogoliubov-Krylov averaging method for approximative solving nonlinear oscillation equations is considered. The main subject of our study are Van der Pol and Rayleigh equations. In the paper we suggest a Maple program, realizing the algorithm of Bogoliubov-Krylov averaging method on the computer. On numerical computations the main idea of the method is shown. The advantage of using computer technology is also shown.

Key words: nonlinear oscillations Bogoliubov-Krylov averaging method, Van der Pol equation, Rayleigh equation.

Language: Russian

Citation: Abiev, N. A., & Turar, Z. (2021). Implementation in maple Bogoliubov-Krylov averaging method. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 04 (96), 201-210.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-04-96-40> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2021.04.96.40>

Scopus ASCC: 2600.

РЕАЛИЗАЦИЯ В СРЕДЕ MAPLE МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ БОГОЛЮБОВА-КРЫЛОВА

Аннотация: В этой статье рассматриваются вопросы компьютерной реализации метода усреднения Крылова-Боголюбова для приближенного решения уравнения нелинейных колебаний. Основным объектом изучения являются уравнения Ван дер Поля и Рэля. В работе мы предлагаем программу на Maple, которая осуществляет алгоритм метода усреднения на компьютере. На численных экспериментах продемонстрирована основная идея метода. Также показано преимущество использования компьютерных технологий.

Ключевые слова: нелинейные колебания, метод усреднения Боголюбова-Крылова, уравнение Ван дер Поля, уравнение Рэля.

Введение

УДК 517.928.1, 517.928.7

$$x(0) = p, \quad \frac{dx(0)}{dt} = q. \quad (2)$$

Рассмотрим начальную задачу для нелинейного уравнения [4,5]

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (1)$$

Если бы правая часть (1) равнялась нулю, мы бы получили уравнение свободных гармонических колебаний с решением

$$x_g(t) = a \cos(\omega t + \beta).$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

Исходя из этого, идея метода усреднения Боголюбова-Крылова (МУБК) состоит в поиске решения уравнения (1) в виде функции

$$x(t) = a(t) \cos(\omega t + \beta(t)), \quad (3)$$

«близкой» к $x_g(t)$, где $a(t), \beta(t)$ - неизвестные функции. Далее будем опускать теоретические подробности. Их можно найти в соответствующих первоисточниках [1,9]. Соответствующую информацию можно найти также в работах [3,8].

Дифференцированием из (3) получаем

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega \cos\phi + \frac{da}{dt} \cos\phi - a \frac{d\beta}{dt} \sin\phi,$$

где $\phi = \omega t + \beta(t)$.

Поскольку $x \approx x_g$, то из соображений

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{dx_g}{dt} \text{ потребуем, чтобы}$$

$$\frac{da}{dt} \cos\phi - a \frac{d\beta}{dt} \sin\phi = 0. \quad (4)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{da}{dt} \omega \sin\phi - a\omega \frac{d(\cos\phi)}{dt} \\ &= -\frac{da}{dt} \omega \sin\phi - a\omega(\cos\phi \cdot (\omega t + \beta')). \end{aligned}$$

Подставляя это в уравнение (1), получаем

$$-\frac{da}{dt} \omega \sin\phi - a\omega \cos\phi \frac{d\beta}{dt} = f(a \cos\phi, -a\omega \sin\phi). \quad (5)$$

Разрешая систему уравнений (4) и (5), находим

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{\omega} f(a \cos\phi, -a\omega \sin\phi) \sin\phi, \quad (6)$$

> $x := \text{proc}(t) a(t) \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta(t)) \text{ end:}$

> $\text{simplify}\left(\frac{d}{dt} x(t)\right)$

$$-a(t) \sin(\omega t + \beta(t)) \left(\frac{d}{dt} \beta(t)\right) - a(t) \sin(\omega t + \beta(t)) \omega + \left(\frac{d}{dt} a(t)\right) \cos(\omega t + \beta(t))$$

> $xt := \text{op}(2, \%);$

$$xt := -a(t) \sin(\omega t + \beta(t)) \omega$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{a\omega} f(a \cos\phi, -a\omega \sin\phi) \cos\phi. \quad (7)$$

Так как по нашему предположению производные функций $a(t), \beta(t)$ меняются медленно по времени, то

$$\frac{da}{dt} \approx \left(\frac{da}{dt}\right)_{cp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{da}{dt} d\phi,$$

$$\frac{d\beta}{dt} \approx \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_{cp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\beta}{dt} d\phi.$$

Подставляя сюда (6) и (7), получаем дифференциальные уравнения для нахождения $a(t), \beta(t)$:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos\phi, -a \sin\phi) \sin\phi d\phi, \quad (8)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos\phi, -a \sin\phi) \cos\phi d\phi. \quad (9)$$

Таким образом, в качестве приближения к решению задачи (1)-(2) предлагается функция

$$y(t) = a(t, C_1) \cos(\omega t + \beta(t, C_2)), \quad (10)$$

где постоянные интегрирования C_1, C_2 , возникающие в общем решении $a(t, C_1), \beta(t, C_2)$ системы (8)-(9), определяются подстановкой (10) в начальные условия (2).

Основные результаты. На сериях примеров покажем реализацию метода усреднения Боголюбова-Крылова в системе Maple [2]. Покажем компьютерный вывод системы дифференциальных уравнений (6)-(7):

Impact Factor:	ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 1.582	ПИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 9.035	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

$$\begin{aligned}
 &> ur1 := \text{simplify}\left(\frac{d}{dt} x(t) - xt\right) \\
 &\quad ur1 := -a(t) \sin(\omega t + \beta(t)) \left(\frac{d}{dt} \beta(t)\right) + \left(\frac{d}{dt} a(t)\right) \cos(\omega t + \beta(t)) \\
 &> xtt := \frac{d}{dt} xt \\
 &\quad xtt := -\left(\frac{d}{dt} a(t)\right) \sin(\omega t + \beta(t)) \omega - a(t) \cos(\omega t + \beta(t)) \left(\omega + \frac{d}{dt} \beta(t)\right) \omega \\
 &> ur2 := \text{simplify}(xtt + \omega^2 \cdot x(t) - f) \\
 &\quad ur2 := -a(t) \cos(\omega t + \beta(t)) \omega \left(\frac{d}{dt} \beta(t)\right) - \left(\frac{d}{dt} a(t)\right) \sin(\omega t + \beta(t)) \omega - f \\
 &> \text{simplify}\left(\text{solve}\left(\{ur1, ur2\}, \left\{\frac{d}{dt} a(t), \frac{d}{dt} \beta(t)\right\}\right)\right) \\
 &\quad \left\{\frac{d}{dt} a(t) = -\frac{f \sin(\omega t + \beta(t))}{\omega}, \frac{d}{dt} \beta(t) = -\frac{f \cos(\omega t + \beta(t))}{a(t) \omega}\right\}
 \end{aligned}$$

Далее правые части системы дифференциальных уравнений (8)-(9) находятся следующими командами:

$$\begin{aligned}
 &> a_ave := \text{simplify}\left(-\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(a \cdot \cos(\phi), -a \cdot \omega \cdot \sin(\phi)) \cdot \sin(\phi) d\phi\right) \\
 &> \beta_ave := \text{simplify}\left(-\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot a} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(a \cdot \cos(\phi), -a \cdot \omega \cdot \sin(\phi)) \cdot \cos(\phi) d\phi\right)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров.

$$x(0) = 1, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0. \quad (12)$$

Пример 1. Идею метода покажем сначала на задаче Коши для линейного уравнения [5]

Следовательно, в нашем случае

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = -2\omega \frac{dx}{dt}, \quad (11)$$

$$f(a \cos \phi, -a \omega \sin \phi) = 2\omega^2 a(t) \sin(\omega t + \beta(t)).$$

Как показывают вычисления на Maple:

$$\begin{aligned}
 &> a_ave := \text{simplify}\left(-\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(a \cdot \cos(\phi), -a \cdot \omega \cdot \sin(\phi)) \cdot \sin(\phi) d\phi\right) \\
 &\quad a_ave := -a \omega \\
 &> \beta_ave := \text{simplify}\left(-\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot a} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(a \cdot \cos(\phi), -a \cdot \omega \cdot \sin(\phi)) \cdot \cos(\phi) d\phi\right) \\
 &\quad \beta_ave := 0
 \end{aligned}$$

Следовательно, система (7)-(8) для нашего уравнения имеет вид

$$\frac{da}{dt} = -\omega a, \quad \frac{d\beta}{dt} = 0.$$

Impact Factor:	ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 1.582	РИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 9.035	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

Её решение

$$a(t) = C_1 e^{-\omega t}, \quad \beta(t) = C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2 определяются подстановкой $y(t) = C_1 e^{-\omega t} \cos(\omega t + C_2)$ в начальные условия (2):

> $Z := rhs(dos[1]) \cdot \cos(\omega \cdot t + rhs(dos[2]));$

$$Z := -C_1 e^{-\omega t} \cos(\omega t + C_2)$$

> $us1 := simplify(subs(t=0, Z) = p)$

$$us1 := -C_1 \cos(C_2) = 1$$

> $us2 := simplify\left(subs\left(t=0, \frac{d}{dt}Z\right) = q\right)$

$$us2 := -C_1 \omega (\sin(C_2) + \cos(C_2)) = 0$$

> $solve(\{us1, us2\}, \{C_1, C_2\}) : allvalues(\%)$

$$\left\{C_1 = \sqrt{2}, C_2 = -\frac{1}{4}\pi\right\}, \left\{C_1 = -\sqrt{2}, C_2 = \frac{3}{4}\pi\right\}$$

> $y := subs\left(C_1 = \sqrt{2}, C_2 = -\frac{1}{4}\pi, Z\right)$

$$y := \sqrt{2} e^{-\omega t} \cos\left(\omega t - \frac{1}{4}\pi\right)$$

Итак для задачи (11)-(12) его приближенное решение по МУБК, представляемое формулой (10), имеет вид:

Поскольку уравнение (11) линейное, мы знаем и точное решение задачи (11)-(12):

$$y(t) = \sqrt{2} e^{-\omega t} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right). \quad (13)$$

> $dsolve(\{dequ, init\}, X(t)); x := rhs(\%)$

$$X(t) = e^{-\omega t} + \omega e^{-\omega t} t$$

Графики

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 1.582	ПИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 9.035	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

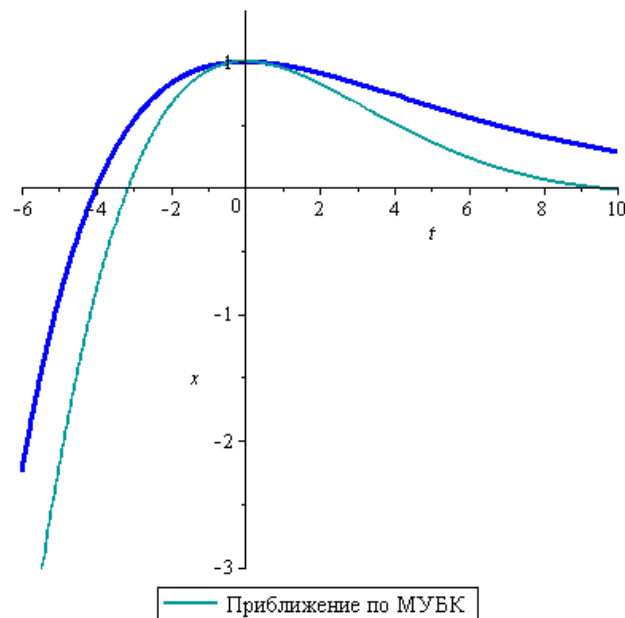


Рисунок 1- Графики решения задачи (11)-(12) (синий цвет) и его приближения (13) по МУБК (темно-зеленый цвет).

Пример 2. МУБК будем использовать теперь к решению задачи Коши для нелинейного уравнения колебаний Ван дер Поля [6,7,10] при $\omega = 1$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = (1 - x^2) \frac{dx}{dt}, \quad (14)$$

$$x(0) = 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 1. \quad (15)$$

Ввод исходных данных

> $p := 0; q := 1; \omega_0 := 1$:

$$p := 0$$

$$q := 1$$

> $f := \text{proc}(x, y) y \cdot (1 - x^2) \text{ end}$:

> $\text{dequ} := \frac{d^2}{dt^2} X(t) + \omega^2 \cdot X(t) = \frac{d}{dt} X(t) \cdot (1 - X(t)^2); \text{init} := X(0) = p, D(X)(0) = q$

$$\text{dequ} := \frac{d^2}{dt^2} X(t) + \omega^2 X(t) = \left(\frac{d}{dt} X(t) \right) (1 - X(t)^2)$$

$$\text{init} := X(0) = 0, D(X)(0) = 1$$

Вывод системы уравнений (8)-(9) и его решение

$$> a_{ave} := \text{simplify} \left(-\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(a \cdot \cos(\phi), -a \cdot \omega \cdot \sin(\phi)) \cdot \sin(\phi) d\phi \right)$$

$$a_{ave} := -\frac{1}{8} a (a^2 - 4)$$

$$> \beta_{ave} := \text{simplify} \left(-\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot a} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(a \cdot \cos(\phi), -a \cdot \omega \cdot \sin(\phi)) \cdot \cos(\phi) d\phi \right)$$

$$\beta_{ave} := 0$$

Impact Factor:	ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 1.582	ПИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 9.035	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

$$\begin{aligned} > \text{deqs} := \left\{ \frac{d}{dt} a(t) = a_{\text{ave}}(t), \frac{d}{dt} \beta(t) = \beta_{\text{ave}}(t) \right\}; \\ & \text{deqs} := \left\{ \frac{d}{dt} a(t) = -\frac{1}{8} a(t) (a(t)^2 - 4), \frac{d}{dt} \beta(t) = 0 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \text{dos} := \text{dsolve}(\text{deqs}, \{a(t), \beta(t)\}); \\ \text{dos} := \left[\{\beta(t) = _C2\}, \left\{ a(t) = -\frac{2}{\sqrt{4e^{-t} _C1 + 1}}, a(t) = \frac{2}{\sqrt{4e^{-t} _C1 + 1}} \right\} \right] \end{aligned}$$

Для определения $a(t), \beta(t)$ мы получаем систему

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{8} a(a^2 - 4), \quad \frac{d\beta}{dt} = 0 \quad \text{с решением} \quad a(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + 4C_1 e^{-t}}}, \quad \beta(t) = C_2.$$

Определение констант интегрирования и нахождение функции (10)

$$> Z := \text{rhs}(\text{dos}[2, 2]) \cdot \cos(\omega \cdot t + \text{rhs}(\text{dos}[1, 1]));$$

$$Z := \frac{2 \cos(\omega t + _C2)}{\sqrt{4e^{-t} _C1 + 1}}$$

$$> \text{us1} := \text{simplify}(\text{subs}(t=0, Z) = p);$$

$$\text{us1} := \frac{2 \cos(_C2)}{\sqrt{4 _C1 + 1}} = 0$$

$$> \text{us2} := \text{simplify}\left(\text{subs}\left(t=0, \frac{d}{dt} Z\right) = q\right)$$

$$\text{us2} := -\frac{2(-2 \cos(_C2) _C1 + 4 \sin(_C2) \omega _C1 + \sin(_C2) \omega)}{(4 _C1 + 1)^{3/2}} = 1$$

$$> \text{simplify}\left(\text{subs}\left(_C2 = -\frac{\pi}{2}, \text{us2}\right)\right)$$

$$\frac{2 \omega}{\sqrt{4 _C1 + 1}} = 1$$

$$> \text{solve}(\{\text{us1}, \text{us2}\}, \{_C1, _C2\});$$

$$\left\{ _C1 = \omega^2 - \frac{1}{4}, _C2 = \frac{1}{2} \pi \right\}, \left\{ _C1 = \omega^2 - \frac{1}{4}, _C2 = -\frac{1}{2} \pi \right\}$$

$$> y := \text{collect}\left(\text{subs}\left(_C2 = -\frac{\pi}{2}, _C1 = \frac{4\omega^2 - 1}{4}, Z\right), e^{-t}\right)$$

$$y := \frac{2 \cos\left(\omega t - \frac{1}{2} \pi\right)}{\sqrt{4e^{-t} \left(\omega^2 - \frac{1}{4}\right) + 1}}$$

Таким образом задача (14)-(15) имеет следующее приближенное решение по МУБК:

$$y(t) = \frac{2 \sin(\omega t)}{\sqrt{1 + 4e^{-t} \omega^2 - e^{-t}}}. \quad (16)$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 1.582	РИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 9.035	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

Графики

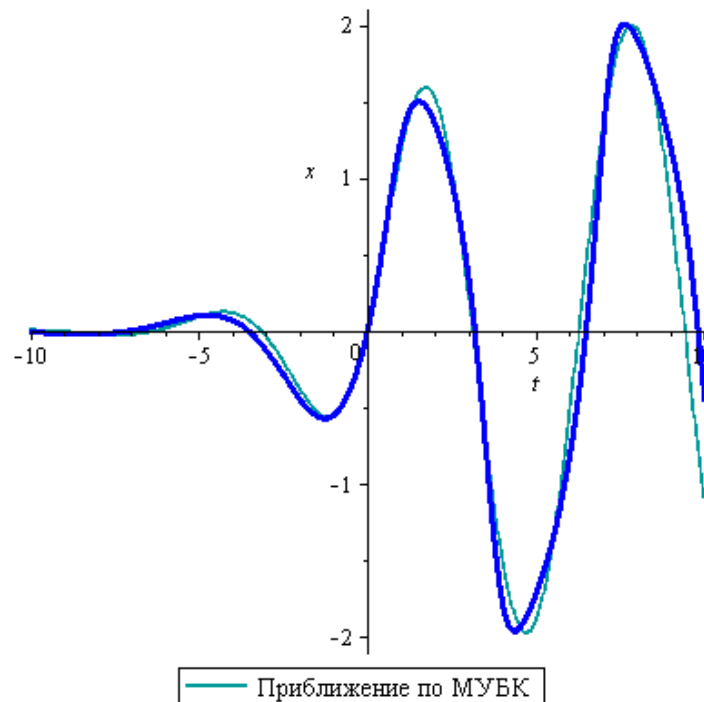


Рисунок 2- Графики решения задачи (14) - (15) (синий цвет) и его приближения (16) по МУБК (темно-зеленый цвет).

Пример 3. Рассмотрим уравнение Рэля при $\omega = \frac{3}{2}$:

$$x(0) = 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 1. \quad (18)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{dx}{dt} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^3, \quad (17)$$

Ввод исходных данных

> $p := 0; q := 1; \omega_0 := 1$:

$p := 0$

$q := 1$

> $f := \text{proc}(x, y) \ y - y^3 \ \text{end}$:

> $\text{dequ} := \frac{d^2}{dt^2} X(t) + \omega^2 \cdot X(t) = \frac{d}{dt} X(t) - \left(\frac{d}{dt} X(t)\right)^3; \text{init} := X(0) = p, D(X)(0) = q$

$$\text{dequ} := \frac{d^2}{dt^2} X(t) + \omega^2 X(t) = \frac{d}{dt} X(t) - \left(\frac{d}{dt} X(t)\right)^3$$

$\text{init} := X(0) = 0, D(X)(0) = 1$

Вывод системы уравнений (8) - (9) и его решение

Impact Factor:	ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 1.582	ПИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 9.035	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

$$\begin{aligned} > a_{ave} := \text{simplify} \left(-\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(a \cdot \cos(\phi), -a \cdot \omega \cdot \sin(\phi)) \cdot \sin(\phi) \, d\phi \right) \\ a_{ave} := -\frac{1}{8} a (3 a^2 \omega^2 - 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \beta_{ave} := \text{simplify} \left(-\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot a} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(a \cdot \cos(\phi), -a \cdot \omega \cdot \sin(\phi)) \cdot \cos(\phi) \, d\phi \right) \\ \beta_{ave} := 0 \end{aligned}$$

$$> deqs := \left\{ \frac{d}{dt} a(t) = -\frac{1}{8} a(t) (3 a^2(t) \omega^2 - 4), \frac{d}{dt} \beta(t) = \beta_{ave}(t) \right\};$$

$$deqs := \left\{ \frac{d}{dt} a(t) = -\frac{1}{8} a(t) (3 a(t)^2 \omega^2 - 4), \frac{d}{dt} \beta(t) = 0 \right\}$$

$$> dos := \text{dsolve}(deqs, \{a(t), \beta(t)\});$$

$$dos := \left[\{\beta(t) = _C2\}, \left\{ a(t) = -\frac{2}{\sqrt{4 e^{-t} _C1 + 3 \omega^2}}, a(t) = \frac{2}{\sqrt{4 e^{-t} _C1 + 3 \omega^2}} \right\} \right]$$

Для определения $a(t), \beta(t)$ мы получаем систему

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{8} a(a^2 - 4), \quad \frac{d\beta}{dt} = 0 \quad \text{с решением} \quad a(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + 4C_1 e^{-t}}}, \quad \beta(t) = C_2.$$

Определение констант интегрирования и нахождение функции (10)

$$> Z := \text{rhs}(dos[2, 2]) \cdot \cos(\omega \cdot t + \text{rhs}(dos[1, 1]));$$

$$Z := \frac{2 \cos(\omega t + _C2)}{\sqrt{4 e^{-t} _C1 + 3 \omega^2}}$$

$$> us1 := \text{simplify}(\text{subs}(t = 0, Z) = p);$$

$$us1 := \frac{2 \cos(_C2)}{\sqrt{3 \omega^2 + 4 _C1}} = 0$$

$$> us2 := \text{simplify} \left(\text{subs} \left(t = 0, \frac{d}{dt} Z \right) = q \right)$$

$$us2 := -\frac{2 (3 \sin(_C2) \omega^3 + 4 \sin(_C2) _C1 \omega - 2 \cos(_C2) _C1)}{(3 \omega^2 + 4 _C1)^{3/2}} = 1$$

$$> \text{simplify} \left(\text{subs} \left(_C2 = -\frac{\pi}{2}, us2 \right) \right)$$

Impact Factor:	ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 1.582	ПИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 9.035	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

$$\frac{2\omega}{\sqrt{3\omega^2 + 4_{-C1}}} = 1$$

> solve({us1, us2}, {_C1, _C2});

$$\left\{_{-C1} = \frac{1}{4}\omega^2, _{C2} = \frac{1}{2}\pi\right\}, \left\{_{-C1} = \frac{1}{4}\omega^2, _{C2} = -\frac{1}{2}\pi\right\}$$

> y := simplify(subs(_C2 = -1/2 pi, _C1 = omega^2/4, Z))

$$y := \frac{2\sin(\omega t)}{\sqrt{\omega^2(e^{-t} + 3)}}$$

Таким образом, задача (14)-(15) имеет следующее приближенное решение по МУБК:

$$y(t) = \frac{2\sin(\omega t)}{\sqrt{\omega^2(e^{-t} + 3)}}. \quad (19)$$

Графики

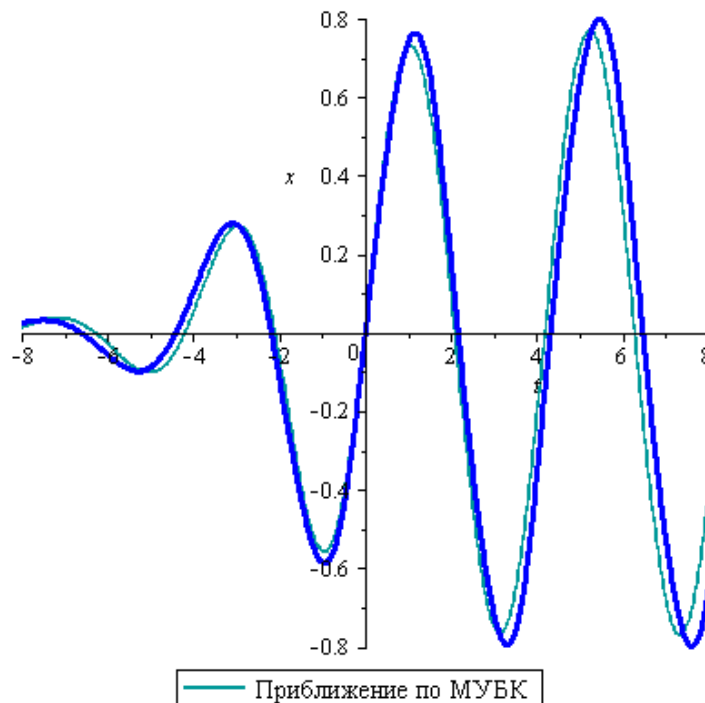


Рисунок 3- Графики решения задачи (17)-(18) (синий цвет) и его приближения (19) по МУБК (темно-зеленый цвет).

Impact Factor:	ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 1.582	ПИИИ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 9.035	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

References:

1. Bogoliubov, N.N., & Mitropolsky, Y.A. (1961). *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations.* (p.537). Hindustan Publishing Corp., Delhi.
2. Borwein, J.M., & Skerritt, M.P. (2011). *An introduction to modern mathematical computing. With Maple.* (p.216). Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. Springer, New York.
3. Cveticanin, L. (2015). Generalization of the Krylov-Bogoliubov method for nonlinear oscillators. *Appl. Mech. Mater.*, 801:3-11.
4. Drazin, P.G. (1992). *Nonlinear systems. Cambridge Texts in Applied Mathematics.* (p.392). Cambridge University Press, Cambridge.
5. Esmailzadeh E., Younesian, D., & Askari, H. (2019). *Analytical Methods in Nonlinear Oscillations* (p.286). Springer, Netherlands.
6. Hale, J. K. (1966). Periodic Differential Equations. *Amer. Math. Monthly.* 73(4): 430.
7. Hale, J.K. (1980). *Ordinary differential equations.* Second edition. (p.361). R.Krieger Publishing Co., Inc., Huntington, N.Y.
8. He, J.H., & Lee, E.W. (2009). New analytical methods for cleaning up the solution of nonlinear equations. *Comput. Math. Appl.*, 58 (11): 2081-2083.
9. Mitropolsky, Iy.A. (1967). *Averaging method in non-linear mechanics. Inter. J. Nonlinear Mech.*, 2: 69-96.
10. Moiseev, N.N. (1981). *Asymptotic methods of nonlinear mechanics.* (p.400). Nauka, Moscow. [in Russian]