

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИЦ (Russia) = 0.126
ESJI (KZ) = 9.035
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2021 Issue: 03 Volume: 95

Published: 26.03.2021 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



Zokir Bozorboyevich Khudayberdiyev
Samarkand State University
Senior Lecturer to Department of
Theoretical and Applied Mechanics,
xudoyberdiyevz@mail.ru

Shohsanam Mahmudjon qizi Khudayberdiyeva
Samarkand State University
Lecturer to Department of
Theoretical and Applied Mechanics.

Ikrom Nurali o'g'li Amirov
Samarkand State University
Lecturer to Department of
Theoretical and Applied Mechanics.

NON-STATIONARY VIBRATIONS OF THREE-LAYERED ELASTIC CONICAL SHELL

Abstract: The article presents the equations of torsional vibrations of a three-layer conical shell. For this, a surface is selected at a certain distance from the middle layer of the conical shell. Shear heads on this surface are selected as searchable objects. Then, the equations of torsional vibrations of a three-layer conical shell with respect to these sought-for functions were formed.

Key words: Conical shell, middle layer, three-layer shell, torsional vibration, stress, deformation, displacement.

Language: Russian

Citation: Khudayberdiyev, Z. B., Khudayberdiyeva, S. M., & Amirov, I. N. (2021). Non-stationary vibrations of three-layered elastic conical shell. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 03 (95), 328-336.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-03-95-52> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2021.03.95.52>

Scopus ASCC: 2200.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Аннотация: В статье представлены уравнения крутильных колебаний трехслойной конической оболочки. Для этого выбирается поверхность на некотором расстоянии от среднего слоя конической оболочки. Головки сдвигов на этой поверхности выбираются как доступные для поиска объекты. Затем были сформированы уравнения крутильных колебаний трехслойной конической оболочки относительно этих искомым функций.

Ключевые слова: Конических оболочки, срединный слой, трехслойная оболочка, крутильные колебания, напряжения, деформации, перемещение.

Введение

Решение прикладных задач динамики слоистых конических оболочек основывается на известные Кирхгоффа-Лява, Германна-Мирски и другие уточненные теории колебания [1-2]. Указанные теории разработаны для однослойных,

однородных оболочек [3-4], и поэтому, применение их для исследования динамики слоистых элементов конструкций сопровождаются с определенными трудностями математического характера и обеспечения выполнения условий контакта между слоями [5-

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

6]. Поэтому, в последние несколько десятилетия стали разрабатывать теории колебания слоистых элементов конструкций [7-8]. Количество работ, посвященных разработке новых теорий колебания конструктивных элементов, с учетом различных реологических, температурных, анизотропных и других свойств материалов составляет большое число. Несмотря на это и в настоящее время продолжается изучение нестационарных колебаний таких элементов на основе новых теорий и уравнений колебания [9-11].

Настоящая статья посвящена изучению уравнений крутильных колебаний слоистых конических упругих оболочек, вытекающих из общих уравнений колебания трехслойной упругой оболочки, как предельные случаи.

Постановка задачи. В цилиндрической системе координат (r, θ, z) рассматривается задача о крутильных колебаниях однородной и изотропной конической оболочки из упругого материала, внутренний r_1 и внешний r_2 радиусы которой являются линейными функциями продольной координаты, т.е.

$$r_1 = r_0 + kz; \quad r_2 = r_0 + kz + d$$

где $r_0 = const$, d - толщина оболочки; $k = tg\alpha$ (рис.1). При выводе уравнений колебания считается, что коническая оболочка, как трехмерное тело, строго подчиняется математической теории упругости и в точной постановке описывается ее уравнениями. В цилиндрической системе координат рассмотрим неоднородную по толщине трехслойную коническую оболочку из упругого материала. Будем считать, что рациональная конструкция

конической оболочки с точки зрения её работы на действие динамических нагрузок будет такой когда основная масса жесткого материала в виде двух слоев, называемые в дальнейшем несущими слоями [1] разнесена на некоторое расстояние с помощью тонкой стенки или третьего слоя. Третий слой может быть из того же материала что и несущие слои. Когда пространство между двумя жесткими слоями заполнено более легким, а следовательно, менее жестким материалом, называется в дальнейшем наполнителем. Третий слой или наполнитель удерживает несущие слои на расстоянии, равном его толщине и осуществляет их совместную работу.

При этом, если рассматриваются задачи, отличные от задач поперечного колебания оболочки, то как нетрудно догадаться, что совместная работа несущих слоев зависит от способности наполнителя сопротивляться их относительному сдвигу. Исходя, из этих соображений будем считать, что контакты между несущими слоями и наполнителем жесткие.

Ось Oz системы координат направим по оси симметрии оболочки и пронумеруем слои так, как показана на рис.1. Через a и b обозначаем внутренний и внешний радиусы оболочки, а через r_1 и r_2 - внутренний и внешний радиусы срединного слоя (заполнителя). При выводе уравнений колебания будем считать, что как цилиндрическая оболочка в целом, так и несущие слои и наполнитель, строго подчиняются математической теории упругости и в точной постановке описываются трехмерными её уравнениями в линейной постановке.

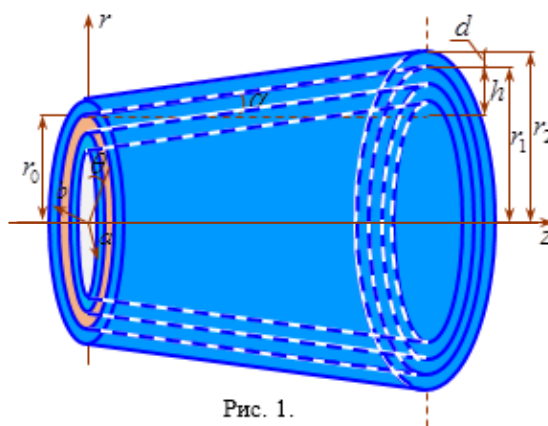


Рис. 1.

Компоненты векторов перемещений точек слоев по осям координат, которые считаются малыми, обозначим через $u_m(r, \theta, z, t)$, $u_{\theta m}(r, \theta, z, t)$, $u_{zm}(r, \theta, z, t)$. Здесь и далее везде индекс m принимает значения 0,1,2. Поэтому, в

дальнейшем, не будем подчеркивать это каждый раз подразумевая, что это всегда имеет место.

Зависимости между компонентами напряжений и деформаций в точках слоев конической трехслойной оболочки считаются заданными в виде [2]

$$\sigma_{ij}^{(m)}(r, \theta, z, t) = \lambda_m(\varepsilon^{(m)}) + 2\mu_m(\varepsilon_{ij}^{(m)}); \quad (i, j = r, \theta, z), (1)$$

λ_m, μ_m – коэффициенты Ламе материалов слоев.

Уравнения движения точек слоев, как конических трехмерных тел, при отсутствии объемных сил имеют вид [3].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(m)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(m)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(m)}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr}^{(m)} - \sigma_{\theta\theta}^{(m)}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(m)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(m)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(m)}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(m)} &= \rho \frac{\partial^2 u_{\theta m}}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(m)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(m)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(m)}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}^{(m)}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_{zm}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее следуя [4] потенциалы продольных $\varphi^{(m)}$ и поперечных $\vec{\phi}^{(m)}$ волн введем по формуле

$$\vec{U}^{(m)} = \text{grad} \varphi_m + \text{rot}[\vec{e}_z \psi_m + \text{rot}(\vec{e}_z \chi_m)]. \quad (3)$$

Заметим, что при представлении векторных потенциалов $\vec{\phi}^{(m)}$ в виде

$$\vec{\phi}_m = \vec{e}_z \psi_m + \text{rot}(\vec{e}_z \chi_m), \quad (4)$$

где \vec{e}_z – единичный вектор по оси z , условия солено дальности векторных полей $\vec{\phi}^{(m)}$, $\text{div} \vec{\phi}^{(m)} = 0$ выполняются автоматически [5].

Подстановка выражений (3) в уравнения движения (2) позволяет написать их через волновые уравнения относительно потенциалов волн [6]

$$\Delta \varphi^{(m)} = \frac{\rho_m}{\lambda_m + 2\mu_m} \ddot{\varphi}_m; \quad \Delta \vec{\phi}_m = \frac{\rho_m}{\mu_m} \ddot{\vec{\phi}}_m; \quad (5)$$

где ρ_m – плотности материалов слоев; Δ – оператор Лапласа.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Из выражений (3) легко определить компоненты векторов смещений слоев оболочки $u_m, u_{\theta m}, u_{zm}$ через потенциалы продольных φ_m и поперечных ψ_m, χ_m волн

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_m}{\partial r} - \frac{\partial^2 \chi_m}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi_m}{\partial \theta^2}; \\ u_{\theta m} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_m}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi_m}{\partial z \partial \theta}; \\ u_{zm} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\varphi_m + \frac{\partial \chi_m}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_m}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Последние выражения для компонент векторов смещений точек слоев оболочки позволяют выразить и компонент деформации через потенциалы волн

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(m)} &= \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^3 \chi_m}{\partial z \partial r^2}, \\ \varepsilon_{zz}^{(m)} &= \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial z^2} - \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \chi_m}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta}^{(m)} &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\varphi_m + \frac{\partial \chi_m}{\partial z} \right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial \psi_m}{\partial \theta}, \\ \gamma_{r\theta}^{(m)} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \varphi_m}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial^2 \chi_m}{\partial \theta \partial z} + \\ &+ \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \theta^2} - \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_m}{\partial r} \right), \\ \gamma_{\theta z}^{(m)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial z \partial r} - \frac{1}{2r} \left(\Delta - 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \chi_m}{\partial \theta}, \\ \gamma_{rz}^{(m)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Delta \right) \chi_m + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial r \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \theta \partial z}. \end{aligned} \quad (7)$$

При этом, легко проверить по этим формулам справедливость равенства

$$\varepsilon^{(m)} = \varepsilon_{rr}^{(m)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(m)} + \varepsilon_{zz}^{(m)} = \Delta \varphi_m$$

Если рассматриваются задачи симметричные относительно оси, то компоненты векторов смещений слоев оболочки не зависят от угловой координаты θ и, выражения (6) принимают вид

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \chi_m}{\partial r} \right), \quad u_{\theta m} = -\frac{\partial \psi_m}{\partial r}, \\ u_{zm} &= \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 \chi_m}{\partial r \partial z}. \end{aligned} \quad (8)$$

В этом случае упрощаются и формулы для компонент деформации, которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(m)} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\varphi_m + \frac{\partial \chi_m}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{zz}^{(m)} = \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2 \chi_m}{\partial r \partial z} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(m)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\varphi_m + \frac{\partial \chi_m}{\partial z} \right) \\ \gamma_{r\theta}^{(m)} &= -\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_m}{\partial r} \right), \quad \gamma_{\theta z}^{(m)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial z \partial r} \\ \gamma_{rz}^{(m)} &= \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial r \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \chi_m \end{aligned} \quad (9)$$

Предполагается, что при $t < 0$ конической оболочка находится в покое, а в момент $t = 0$ к её граничным поверхностям прикладываются напряжения, вызывающие крутильные её колебания, т.е. считаются, что граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } r = a, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)}(a, z, t) &= f_{r\theta}^{(1)}(z, t) \\ \text{при } r = b, \quad \sigma_{r\theta}^{(2)}(b, z, t) &= f_{r\theta}^{(2)}(z, t) \end{aligned} \quad (10)$$

Кроме того, по условиям жесткого контакта на граничных поверхностях между слоями должны выполняться условия равенства смещений и напряжений, т.е.

$$\begin{aligned} \text{при } r = r_1, \\ u_{\theta 0}(r_1, z, t) &= u_{\theta 1}(r_1, z, t); \\ \sigma_{r\theta}^{(0)}(r_1, z, t) &= \sigma_{r\theta}^{(1)}(r_1, z, t). \end{aligned} \quad (11)$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

при $r = r_2$

$$\begin{aligned} u_{\theta 0}(r_2, z, t) &= u_{\theta 2}(r_2, z, t); \\ \sigma_{r\theta}^{(0)}(r_2, z, t) &= \sigma_{r\theta}^{(2)}(r_2, z, t). \end{aligned} \quad (12)$$

Начальные условия задачи считаются нулевыми.

Крутильные колебания конических оболочки являются осесимметричными, и поэтому перемещения и деформации точек слоев, а следовательно, и напряжения, не зависят от угловой координаты. Отличными от нулями будут только перемещения $u_{\theta m}^{(m)}$, напряжения $\sigma_{r\theta}^{(m)}$, $\sigma_{\theta z}^{(m)}$ и деформации $\varepsilon_{r\theta}^{(m)}$, $\varepsilon_{\theta z}^{(m)}$ [7]. При этом перемещения и деформации определяются по формулам (8) и (9), из которых следуют, что они зависят только от потенциалов ψ_m ,

В этом случае уравнения движения (2) принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(m)}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(m)} = \rho \frac{\partial^2 u_{\theta m}^{(m)}}{\partial t^2} \quad (13)$$

Которые, после применения (5) переходят к волновым уравнениям относительно потенциалов ψ_m , т.е. уравнениями движения конической упругой трехслойной оболочки, при её крутильных будут

$$\Delta \psi_m = \frac{\rho_m}{\mu_m} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}; \quad (14)$$

где

$m=1$ при $a \leq r \leq r_1$,

$m=0$ при $r_1 \leq r \leq r_2$ и $m=2$ при $r_2 \leq r \leq b$.

Таким образом задача о крутильных колебаниях трехслойной конической оболочки приводится к интегрированию уравнений (14) при граничных – (10), контактных – (11), (12), а также нулевых при $t=0$

$$\psi_m = \frac{\partial \psi_m}{\partial t} = 0; \quad (15)$$

начальных условиях.

Решение задачи.

Для решения поставленной задачи функции внешних воздействий можно представить в виде

$$f_{r\theta}^{(i)}(z, t) = \int_0^\infty \frac{\sin kz}{0 - \cos kz} \left\{ dk \int_{(i)} \tilde{f}_{r\theta}^{(i)}(k, p) e^{pt} dp, (i=1,2). \right. \quad (16)$$

В соответствии с принятыми представлениями для функции внешнего воздействия – (16) решение задачи (5) (14), (11), (12) и (15) будем искать в виде

$$[\varphi_m, \psi_m] = \int_0^\infty \frac{\sin kz}{0 - \cos kz} \left\{ dk \int_{(i)} [\tilde{\varphi}_m, \tilde{\psi}_m] e^{pt} dp; \quad (17)$$

$$\chi_m = \int_0^\infty \frac{\cos kz}{\sin kz} \left\{ dk \int_{(i)} \tilde{\chi}_m e^{pt} dp.$$

Подставив преобразования (14) для потенциальных функций ψ_m в волновые уравнения будем иметь

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \beta_m^2 \right) \tilde{\psi}_m = 0, \quad (18)$$

где

$$\beta_m^2 = k^2 + \rho_m / \mu_m^{-1}; \quad (18^*)$$

Общие решения уравнений (18) имеют вид

$$\tilde{\psi}_m(r) = C_m^{(1)} I_0(\beta_m r) + C_m^{(2)} K_0(\beta_m r); \quad (19)$$

где $I_0(r)$, $K_0(r)$, -модифицированные функции Бесселя [1].

Дальнейшая задача состоит в том, что выразить компоненты векторов перемещений и тензоров напряжений в точках всех трех слоев через полученные решения (19). С этой целью сперва это выполним для перемещений. Поэтому, перемещения $u_{\theta m}$ также представим в виде

$$u_{\theta m}(r, z, t) = \int_0^\infty \frac{\sin kz}{\cos kz} \left\{ dk \int_{(i)} \tilde{u}_{\theta m}(r, k, p) e^{pt} dp. \quad (20)$$

Подставив (17) и (20) в (8) для преобразованных величин перемещений $\tilde{u}_{\theta m}(k, p)$ получим

$$\tilde{u}_{\theta m}(r, k, p) = -\frac{d}{dr} \tilde{\psi}_m; \quad (21)$$

Представим напряжения $\sigma_{r\theta}$ также как (16)

$$\sigma_{r\theta}^{(m)}(r, z, t) = \int_0^\infty \frac{\sin kz}{0 - \cos kz} \left\{ dk \int_{(i)} \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(m)}(r, k, p) e^{pt}; \quad (22)$$

и подставим представления (16) и (22) в граничные условия (10). Получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin kz}{0 - \cos kz} \left\{ dk \int_{(i)} \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(i)}(r, k, p) e^{pt} dp = \right. \\ \left. = \int_0^\infty \frac{\sin kz}{0 - \cos kz} \left\{ dk \int_{(i)} f_{r\theta}^{(i)}(k, p) e^{pt} dp \right. \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда

$$\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(1)}(a, k, p) = \tilde{f}_{r\theta}^{(1)}(k, p), \quad (24)$$

$$\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(2)}(b, k, p) = \tilde{f}_{r\theta}^{(2)}(k, p).$$

С другой стороны, на основании имеем

$$\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(m)}(r) = \tilde{\mu}_m \left(\frac{1}{r} - \frac{d}{dr} \right) \frac{d\tilde{\psi}_m}{dr}. \quad (25)$$

Подставив (25) в (24) получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} - \frac{d}{dr} \right) \frac{d\tilde{\psi}_1}{dr} \Big|_{r=a} &= \tilde{\mu}_1^{-1} [\tilde{f}_{r\theta}^{(1)}]; \\ \left(\frac{1}{r} - \frac{d}{dr} \right) \frac{d\tilde{\psi}_2}{dr} \Big|_{r=b} &= \tilde{\mu}_2^{-1} [\tilde{f}_{r\theta}^{(2)}]. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично преобразованные контактные условия (11) и (12), на основании выражений (20), (21) и (25) будут иметь следующие виды:

при $r = r_1$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$$\frac{d}{dr}\tilde{\psi}_1 = \frac{d}{dr}\tilde{\psi}_0, \quad (27)$$

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{d}{dr}\right)\frac{d\psi_0}{dr} = \mu_0^{-1}\mu_1\left(\frac{1}{r} - \frac{d}{dr}\right)\frac{d\psi_1}{dr}, \quad (28)$$

и при $r = r_2$

$$\frac{d}{dr}\tilde{\psi}_0 = \frac{d}{dr}\tilde{\psi}_2, \quad (29)$$

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{d}{dr}\right)\frac{d\tilde{\psi}_0}{dr} = \mu_0^{-1}\mu_2\left(\frac{1}{r} - \frac{d}{dr}\right)\frac{d\psi_2}{dr}. \quad (30)$$

Общие решения (19) для всех трех слоев имеют одинаковую структуру, учитывающая ограниченность решений при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$ одновременно. При этом границы первого слоя равны a и r_1 , $a \leq r \leq r_1$. Он ограничен снизу (изнутри) поверхностью $r = a$, который в пределе может стремиться к нулю, т.е. $a \rightarrow 0$ но никак не может превысить значения r_1 , т.е. не может стремиться к бесконечности.

Поэтому, при написании общего решения потенциальной функции первого слоя- $\varphi_1(r)$ можно ограничиться учетом её ограниченности только при $r \rightarrow 0$. Исходя из этого, общее решение (19) для первого слоя примем в виде

$$\tilde{\psi}_1(r) = C_1^{(1)}I_0(\beta_1 r); \quad (a \leq r \leq r_1), \quad (31)$$

где $C_1^{(1)}$ - постоянное интегрирования.

Аналогично, границами второго, внешнего слоя являются цилиндрические поверхности $r = r_2$ и $r = b$; $r_2 \leq r \leq b$. Он ограничен сверху (с внешней стороны) поверхностью $r = b$, радиус которой может стремиться к бесконечности, т.е. $b \rightarrow \infty$. С другой стороны внутренняя поверхность этого слоя не может быть стянута к прямой, б.к. это привело бы к однородному стержню круглого сечения с радиусом $r = b$.

Поэтому, в общем решении для потенциальной функции второго слоя- $\varphi_2(r)$ можно ограничиться учетом её ограниченности только при $r \rightarrow \infty$.

Исходя из этого, общее решение (19) для второго слоя, примем в виде

$$\tilde{\psi}_2(r) = C_2^{(2)}K_0(\beta_2 r); \quad (r_2 \leq r \leq b) \quad (32)$$

Для срединного слоя примем общее решение (19) учитывая то, что наше решение при отсутствии двух внешних слоев, должно переходить в известное решение для однородного цилиндрического слоя, ограниченное при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$ т.е.

$$\tilde{\psi}_0(r) = C_0^{(1)}I_0(\beta_0 r) + C_0^{(2)}K_0(\beta_0 r), \quad r_2 \leq r \leq b. \quad (33)$$

Таким образом, число постоянных интегрирования подлежащих определению из контактных условий сокращается до двух $C_1^{(1)}$ и

$C_2^{(2)}$. Поэтому отпадает необходимость в четырех контактных условиях (11) и (12). С учетом этого обстоятельства ограничимся только двумя контактными условиями, оставив в (11)-(12) только условия равенства перемещений,

при $r = r_1$

$$u_{\theta 1}(z, t) = u_{\theta 0}(z, t) \quad (34)$$

и при $r = r_2$

$$u_{\theta 2}(z, t) = u_{\theta 0}(z, t) \quad (35)$$

Условия (34) и (35) равносильны условиям (27) и (29), соответственно. Подставив решения (31), (32) и (33) в преобразованные граничные условия (26) и контактные условия (27) и (29), получим

$$\left[\frac{2\beta_1}{a}I_1(\beta_1 a) - \beta_1^2 I_0(\beta_1 a)\right]C_1^{(1)} = \tilde{\mu}_1^{-1}[\tilde{f}_{r\theta}^{(1)}(k, p)], \quad (36)$$

$$-\left[\frac{2\beta_2}{b}K_1(\beta_2 b) + \beta_2^2 K_0(\beta_2 b)\right]C_2^{(2)} = \tilde{\mu}_2^{-1}[\tilde{f}_{r\theta}^{(2)}(k, p)], \quad (37)$$

$$\beta_1 I_1(\beta_1 r_1)C_1^{(1)} = \beta_0 I_1(\beta_0 r_1)C_0^{(1)} - \beta_0 K_1(\beta_0 r_1)C_0^{(2)},$$

$$-\beta_2 K_1(\beta_2 r_2)C_2^{(2)} = \beta_0 I_1(\beta_0 r_2)C_0^{(1)} - \beta_0 K_1(\beta_0 r_2)C_0^{(2)}.$$

Из последних двух уравнений находим

$$C_1^{(1)} = \frac{\beta_0 I_1(\beta_0 r_1)C_0^{(1)} - \beta_0 K_1(\beta_0 r_1)C_0^{(2)}}{\beta_1 I_1(\beta_1 r_1)}; \quad (38)$$

$$C_2^{(2)} = -\frac{\beta_0 I_1(\beta_0 r_2)C_0^{(1)} - \beta_0 K_1(\beta_0 r_2)C_0^{(2)}}{\beta_2 K_1(\beta_2 r_2)}. \quad (39)$$

Подставим (38) и (39) в граничные условия (36), (37) и получим следующую систему уравнений

$$\frac{2}{a}I_1(\beta_1 a) - \beta_1 I_0(\beta_1 a) \left[\frac{\beta_0 I_1(\beta_0 r_1)C_0^{(1)} - \beta_0 K_1(\beta_0 r_1)C_0^{(2)}}{I_1(\beta_1 r_1)} \right] = \tilde{\mu}_1^{-1}[\tilde{f}_{r\theta}^{(1)}(k, p)], \quad (42)$$

$$\frac{2}{b}K_1(\beta_2 b) + \beta_2 K_0(\beta_2 b) \left[\frac{\beta_0 I_1(\beta_0 r_2)C_0^{(1)} - \beta_0 K_1(\beta_0 r_2)C_0^{(2)}}{K_1(\beta_2 r_2)} \right] = \tilde{\mu}_2^{-1}[\tilde{f}_{r\theta}^{(2)}(k, p)], \quad (43)$$

Выразим преобразованные перемещения слоев $\tilde{u}_{\theta m}$ через решения (31), (32) и (33). Для этого достаточно вспомнить формулы (20) для $\tilde{u}_{\theta m}(r, k, p)$ т.е.

$$\tilde{u}_{\theta m}(r, k, p) = -\frac{\partial \psi_m}{\partial r}, \quad (44)$$

Подставив (31), (32) и (33) в (44) при $m=0$; $m=1$; и $m=2$ получим соответственно

$$\begin{cases} \tilde{u}_{\theta 0}(r, k, p) = -\beta_0 I_1(\beta_0 r)C_0^{(1)} + \beta_0 K_1(\beta_0 r)C_0^{(2)}; \\ \tilde{u}_{\theta 1}(r, k, p) = -\beta_1 I_1(\beta_1 r)C_1^{(1)}; \\ \tilde{u}_{\theta 2}(r, k, p) = \beta_2 K_1(\beta_2 r)C_2^{(2)}. \end{cases} \quad (44^*)$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

В выражении для крутильного перемещения $\tilde{u}_{\theta 0}(r, k, p)$ срединного слоя разложим функции Бесселя $I_1(\beta_0 r)$ и $K_1(\beta_0 r)$ в степенные ряды по аргументу $(\beta_0 r)$, или выражаясь по другому, используем стандартные разложения в степенные ряды Бесселевых функции $I_1(\beta_0 r)$ и $K_1(\beta_0 r)$ по степеням $(\beta_0 r)$. Получим

$$\tilde{u}_{\theta 0}(r, k, p) = -\beta_0 C_0^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^{2n+1} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{1}{2} C_0^{(2)} + \beta_0 C_0^{(2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \ln \frac{\beta_0 r}{2} - \frac{1}{2} [\gamma(n+1) + \gamma(n+2)] \right\} \beta_0^{2n+1} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}$$

Объединив здесь суммы, получим окончательно

$$\tilde{u}_{\theta 0}(r, k, p) = \frac{1}{r} C_0^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -C_0^{(1)} + C_0^{(2)} \left[\ln \frac{\beta_0 r}{2} - \frac{1}{2} (\gamma(n+1) + \gamma(n+2)) \right] \right\} \beta_0^{2n+2} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \quad (45)$$

Здесь $\gamma(n)$ – логарифмическая производная от Гамма функции

$$\gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

Следуя работе [23] за неизвестные величины примем значения перемещения и напряжения, вычисленных в точках некоторой “промежуточной” поверхности срединного слоя. Радиус этой поверхности определим в промежутке $\xi \in [r_1, r_2]$. При $\xi = r_1$ и $\xi = r_2$ данная “промежуточная” поверхность переходит в контактные поверхности между слоями, а при $\xi = \frac{r_1 + r_2}{2}$. Она переходит в срединную поверхность заполнителя. При $r_1 = r_2$ радиус промежуточной поверхности переходит в радиус контактной поверхности между несущими слоями.

Положим $r = \xi$ в выражением преобразованного перемещения (2.1.31) и выделим главные его части, считая, что они определяются как первые слагаемые сходящегося степенного ряда, получим

$$\tilde{u}_{\theta 0}(\xi) = \frac{1}{\xi} C_0^{(2)} + \left\{ -C_0^{(1)} + C_0^{(2)} \left[\ln \frac{\beta_0 \xi}{2} - \gamma(1) - \frac{1}{2} \right] \right\} \beta_0^2 \left(\frac{\xi}{2} \right);$$

Введем следующие обозначения [23]

$$\begin{cases} \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)} = \frac{1}{\xi} C_0^{(2)}; \\ \tilde{u}_{\theta 0}^{(0)} = \left\{ C_0^{(1)} - C_0^{(2)} \left[\ln \frac{\beta_0 \xi}{2} - \gamma(1) - \frac{1}{2} \right] \right\} \beta_0^2 \left(\frac{\xi}{2} \right). \end{cases} \quad (46)$$

где

$$C_0^{(2)} = \xi \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)};$$

$$C_0^{(1)} = \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)} \xi \left[\ln \frac{\beta_0 \xi}{2} - \frac{1}{2} - \gamma(1) \right] - \frac{2}{\beta_0^2} \tilde{u}_{\theta 0}^{(0)};$$

Для того, чтобы выразить преобразованное перемещение $\tilde{u}_{\theta 0}(r, k, p)$ через введенные новые функции $\tilde{u}_{\theta 0}^{(0)}$ и $\tilde{u}_{\theta 0}^{(1)}$ преобразуем (47) следующим образом

$$\tilde{u}_{\theta 0}(r, k, p) = \frac{1}{r} C_0^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 2\beta_0^{2n} \left(-\frac{1}{2} \beta_0^2 \right) \cdot [C_0^{(1)} - C_0^{(2)} \left(\ln \frac{\beta_0 \xi}{2} - \gamma(1) - \frac{1}{2} \right)] \right\} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^{2n+2} \cdot C_0^{(2)} \left[\ln \frac{r}{\xi} - \frac{1}{2} \gamma(n+1) - \frac{1}{2} \gamma(n+2) + \frac{1}{2} \gamma(1) + \frac{1}{2} \right] \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}$$

В последнем выражении введем обозначение

$$\eta_1(n, r) = \ln \frac{r}{\xi} - \frac{1}{2} \gamma(n+1) - \frac{1}{2} \gamma(n+2) + \lambda(1) + \frac{1}{2}$$

или

$$\eta_1(n, r) = \ln \frac{r}{\xi} + \frac{n}{2(n+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (48)$$

С учетом (48) и (46) выражение (2.1.31) принимает вид.

$$\tilde{u}_{\theta 0}(r, k, p) = \frac{\xi}{r} \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^{2n} \tilde{u}_{\theta 0}^{(0)} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \xi \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^{2n+2} \cdot \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)} \eta_1(n, r) \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \quad (49)$$

Заметим что если срединный слой тонкий (например, тонкий слой эпоксидного клея, обычно наносимого между слоями) то можно считать, что $r = \xi$. Тогда

$$\eta_1(n) = \frac{n}{2(n+1)n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (50)$$

которое является числом, например при

$$n=0 \quad \eta_1(0) = 0 \quad \text{а при} \quad n=1 \quad \eta_1(1) = -\frac{3}{4}$$

Для того чтобы выразить граничные условия (42) (43) через введенные по формулам (46) главные части преобразованного перемещения $\tilde{u}_{\theta 0}$ рассмотрим следующую формулу

$$\beta_0 [I_1(\beta_0 r_i) B_1 - K_1(\beta_0 r_i) B_2] = -\tilde{u}_{\theta 0} \quad (51)$$

Тогда, на основании (49) для $\beta_0 [I_1(\beta_0 r_i) B_1 - K_1(\beta_0 r_i) B_2]$ будем иметь (51)

$$\beta_0 [I_1(\beta_0 r_i) B_1 - K_1(\beta_0 r_i) B_2] = \frac{\xi}{r_i} \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} [2\tilde{u}_{\theta 0}^{(0)} + \xi \cdot \eta(n, r_i) \beta_0^2 \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)}] \cdot \beta_0^{2n} \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}$$

С учетом (51) уравнения (42) и (43) можно написать в виде

$$\frac{2}{a} I_1(\beta_1 a) - \beta_1 I_0(\beta_1 a) \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^{2n} [2\tilde{u}_{\theta 0}^{(0)} + \xi \eta_1(n, r_1) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \beta_0^2 \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)} \right\} \frac{(r_1/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi}{r_1} \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)} \Bigg\} = \tilde{\mu}_1^{-1} [\tilde{f}_{r\theta}^{(1)}(k, p);$$

$$\frac{2}{b} K_1(\beta_2 b) + \beta_2 K_0(\beta_2 b) \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^{2n} [2\tilde{u}_{\theta 0}^{(0)} + \xi \eta_1(n, r_2) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \beta_0^2 \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)} \right\} \frac{(r_2/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi}{r_2} \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)} \Bigg\} = \tilde{\mu}_2^{-1} [\tilde{f}_{r\theta}^{(2)}(k, p);$$

Для комбинаций Бесселевых функций, ограничиваясь в их разложениях нулевым и первым приближениями получим

при $m=0$

$$\frac{2}{b} K_1(\beta_2 b) + \beta_2 K_0(\beta_2 b) = \frac{2}{b} \left[\left(\ln \frac{\beta_2 b}{2} + c - \frac{1}{2} \right) \frac{\beta_2 b}{2} + \frac{2}{\beta_2} \right] + \beta_2 \left[- \left(\ln \frac{\beta_2 b}{2} + c \right) \right] = -\frac{1}{2} \beta_2 + \frac{4}{\beta_2 b^2} = -\frac{1}{2\beta_2} \left(\frac{8}{b^2} - \beta_2^2 \right);$$

$$K_1(\beta_2 r_2) = \frac{1}{2\beta_2} \left[\frac{4}{r_2} + \frac{r_2}{2} \left(\ln \frac{\beta_2 r_2}{2} + c - \frac{1}{2} \right) \right] \approx \frac{1}{2\beta_2} \left[\frac{4}{r_2} + \frac{r_2}{2} \left(c - \frac{1}{2} \right) \beta_2^2 \right],$$

при $m=1$

$$\frac{2}{a} I_1(\beta_1 a) - \beta_1 I_0(\beta_1 a) = \frac{2}{a} \cdot \left(\frac{\beta_1 a}{4} + \frac{(\beta_1 a)^3}{16} \right) - \beta_1 \left(1 + \frac{\beta_1^2 a^2}{4} \right) = \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_1^3 a^2}{8} - \beta_1 - \frac{\beta_1^3 a^2}{4} = -\frac{1}{2} \beta_1 - \frac{\beta_1^3 a^2}{8} = -\frac{1}{2} \beta_1 \left(1 + \frac{a^2}{4} \beta_1^2 \right);$$

$$I_1(\beta_1 r_1) = \frac{\beta_1 r_1}{4} \left(1 + \frac{r_1^2}{4} \beta_1^2 \right).$$

Следовательно

$$\frac{\frac{2}{a} I_1(\beta_1 a) - \beta_1 I_0(\beta_1 a)}{I_1(\beta_1 r_1)} = -\frac{2}{r_1} \cdot \frac{1 + \frac{a^2}{4} \beta_1^2}{1 + \frac{r_1^2}{4} \beta_1^2}; \quad (55)$$

$$\frac{\frac{2}{b} K_1(\beta_2 b) + \beta_2 K_0(\beta_2 b)}{K_1(\beta_2 r_2)} = -\frac{2}{r_2} \cdot \frac{\frac{8}{b^2} - \beta_2^2}{\frac{8}{r_2^2} + (c - \frac{1}{2}) \beta_2^2}, \quad (56)$$

где $c = \dots$ число

Подставив (55) и (56) в уравнения (54) будем иметь

$$-\frac{2}{r_1} \left(1 + \frac{a^2}{4} \beta_1^2 \right) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^{2n} [2\tilde{u}_{\theta 0}^{(0)} + \xi \eta_1(n, r_1) \beta_0^2 \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)}] \cdot \frac{(r_1/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi}{r_1} \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)} \right\} = \tilde{\mu}_1^{-1} \left[\left(1 + \frac{r_1^2}{4} \beta_1^2 \right) \tilde{f}_{r\theta}^{(1)}(k, p) \right]; \quad (57)$$

$$-\frac{2}{r_2} \left(\frac{8}{r_2^2} - \beta_2^2 \right) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^{2n} [2\tilde{u}_{\theta 0}^{(0)} + \xi \eta_1(n, r_2) \beta_0^2 \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)}] \cdot \frac{(r_2/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi}{r_2} \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)} \right\} = \tilde{\mu}_2^{-1} \left[\left(\frac{8}{r_2^2} + \left(c - \frac{1}{2} \right) \beta_2^2 \right) \tilde{f}_{r\theta}^{(2)}(k, p) \right]$$

Перепишем уравнения (57) в виде более удобном для дальнейшего использования

$$\left(1 + \frac{a^2}{4} \beta_1^2 \right) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^{2n} [2\tilde{u}_{\theta 0}^{(0)} + \xi \eta_1(n, r_1) \beta_0^2 \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)}] \cdot \frac{(r_1/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi}{r_1} \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)} \right\} = -\frac{r_1}{2} \tilde{\mu}_1^{-1} \left[\left(1 + \frac{r_1^2}{4} \beta_1^2 \right) \tilde{f}_{r\theta}^{(1)}(k, p) \right],$$

$$\left(1 - \frac{b^2}{8} \beta_2^2 \right) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^{2n} [2\tilde{u}_{\theta 0}^{(0)} + \xi \eta_1(n, r_2) \beta_0^2 \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)}] \frac{(r_2/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi}{r_2} \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)} \right\} = -\frac{b^2}{2r_2} \tilde{\mu}_2^{-1} \left\{ \left[1 + \left(c - \frac{1}{2} \right) \frac{r_2^2}{8} \beta_2^2 \right] \tilde{f}_{r\theta}^{(2)}(k, p) \right\}$$

Введем функции $u_{\theta 0}^{(0)}, u_{\theta 0}^{(1)}$ и операторы λ_m^n по формулам

$$\left[u_{\theta 0}^{(0)}, u_{\theta 0}^{(1)} \right] = \int_{0-\cos kz}^{\infty \sin kz} dk \int_{(t)} (\tilde{u}_{\theta 0}^{(0)}, \tilde{u}_{\theta 0}^{(1)}) e^{pt} dp; \quad (58)$$

$$\lambda_m^n(\zeta) = \int_{0-\cos kz}^{\infty \sin kz} dk \int_{(t)} \beta_m^{2n}(\zeta) e^{pt} dp,$$

Обратив по p и k условия (58), с учетом (57) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^n \left(1 + \frac{a^2}{4} \lambda_1 \right) [2u_{\theta 0}^{(0)} + \xi \eta_1(n, r_1) \lambda_0 u_{\theta 0}^{(1)}] \frac{(r_1/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi}{r_1} \left(1 + \frac{a^2}{4} \lambda_1 \right) u_{\theta 0}^{(1)} = -\frac{r_1}{2} \mu_1^{-1} \left[\left(1 + \frac{r_1^2}{4} \lambda_1 \right) f_{r\theta}^{(1)}(z, t) \right]; \quad (59)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^n \left(1 - \frac{b^2}{8} \lambda_2 \right) [2u_{\theta 0}^{(0)} + \xi \eta_1(n, r_2) \lambda_0 u_{\theta 0}^{(1)}] \frac{(r_2/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi}{r_2} \left(1 + \frac{a^2}{4} \lambda_2 \right) u_{\theta 0}^{(1)} = -\frac{b^2}{2r_2} \mu_2^{-1} \left[\left(1 + \left(c - \frac{1}{2} \right) \frac{r_2^2}{8} \lambda_2 \right) f_{r\theta}^{(2)}(z, t) \right] \quad (60)$$

Введем следующие обозначения [.....]

$$A_{1i} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^n \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}; \quad (61)$$

$$A_{2i} = \frac{1}{r_i} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_1(n, r_i) \lambda_0^{n+1} \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!};$$

С учетом (61) уравнения (60) можно переписать в более удобном для дальнейшего виде

$$\left(1 + \frac{a^2}{4} \lambda_1 \right) [A_{11} u_{\theta 0}^{(0)} + \xi A_{12} u_{\theta 0}^{(1)}] = -\frac{r_1}{2} \mu_1^{-1} \left[\left(1 + \frac{r_1^2}{4} \lambda_1 \right) f_{r\theta}^{(1)}(z, t) \right];$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$$\left(1 - \frac{b^2}{8} \lambda_2\right) [A_{12} u_{\theta 0}^{(0)} + \xi A_{22} u_{\theta 0}^{(1)}] = -\frac{b^2}{2r_2} \mu_2^* \left\{ \left[1 + \left(c - \frac{1}{2} \right) \frac{r_2^2}{8} \lambda_2 \right] f_{r\theta}^{(2)}(z, t) \right\} \quad (62)$$

На основании выражений для β_m (44)* нетрудно получить, что введенные по формулам (58) операторы λ_m^n , при обратном переходе по Фурье и Лапласу, в переменных z, t имеют следующие виды

$$\lambda_m^n(\zeta) = \left[\rho_m \mu_m^{-1} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) \right]^n, \quad (63)$$

где μ_m – упругие операторы материалов слоев.

Уравнения (62) в соответствии с формулами (63) для операторов λ_m^n являются интегро-дифференциальными уравнениями неограниченного порядка. Данные уравнения содержат в себе главные части $u_{\theta 0}^{(0)}$ и $u_{\theta 0}^{(1)}$ крутильного перемещения $u_{\theta 0}$ точек некоторой

“промежуточной” поверхности срединного слоя трехслойной конической оболочки.

Указанная “промежуточная” поверхность имеет радиус, значения которого заключена в интервале $r_1 \leq \xi \leq r_2$. В соответствии с числовым значением радиуса ξ данная “промежуточная” поверхность может перейти в срединную при $\xi = \frac{r_1 + r_2}{2}$ и контактные между слоями

поверхности оболочки при $\xi = r_1$ и $\xi = r_2$. Следовательно, уравнения (62) в зависимости от значений радиуса ξ , могут быть уравнениями колебания трехслойной цилиндрической оболочки относительно главных частей крутильного перемещения точек срединной или контактных поверхностей срединного слоя.

Полученное уравнение в частных случаях переходят в уравнения колебания двухслойной упругой конической оболочки, в уравнения колебания однослойной упругой конической оболочки и другие.

References:

- Hudonazarov, H.H. (2003). *Nestacionarnoe vzaimodejstvie krugovyh cilindricheskikh uprugih i vjaskouprugih obolochek i sterzhnej s deformiruemoj sredoj*. (p.325). Tashkent, izd-vo imeni Abu Ali ibn Sina.
- Filippov, I.G., & Filippov, S.I. (2007). *Kolebatel'nye i volnovye processy v sploshnyh szhimaemyh sredah*. (p.430). Moscow: Izd-vo MGSU.
- Stefan, M. (1988). *The mechanics of cylindrical shells*. (p.195). Amsterdam: Elsevier.
- Netrebko, A.V., & Pshenichnov, S.G. (2015). Nekotorye zadachi dinamiki linejno- vjaskouprugih cilindricheskikh obolochek konechnoj dliny. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, t.77, №1, pp.14-22.
- Pellicano, F. (2007). Vibrations of circular cylindrical shells: Theory and experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 303 (2007) 154–170.
- Khalmuradov, R.I., & Khudonazarov, Kh.Kh. (2002). *Theory of axisymmetrical vibrations of circular cylindrical shells*. The 7th Conference “Shell Structures, Theory and Applications”, Gdansk-Jurata (Poland), October 9-11, 2002.- (pp.131-132). Gdansk: Gdansk University of Technology.
- Hudonazarov, H.H., Skripnjak, V.A., & Jahshiboev, Sh. (2018). Nestacionarnye poperechnye kolebanija trehslojnoj vjaskouprugoj plastinki. *Uzbekskij zhurnal Problemy Mehaniki*, №2, pp.27-32.
- Jalgashev, B.F., & Berdiev, Sh.D. (2020). Uravnenija krutil'nyh kolebanij trehslojnojkrugovoj cilindricheskoj uprugoj obolochki. *Problemy arhitektury i stroitel'stva*, №2, pp.120-125.
- Filippov, I. G., & Kudainazarov, K. (1990). Refinement of equations describing longitudinal-radial vibrations of a circular cylindrical viscoelastic shell. *Soviet Applied Mechanics*, 26(2), 161–168. doi:10.1007/bf00887110
- Hudonazarov, H.H., & Burkutboev, Sh.M. (2017). Matematicheskaja model' krutil'nyh kolebanij cilindricheskogo sloja s uchetom protekaushhej zhidkosti i vrashhenija. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody*, № 4, pp.31–56. DOI:

Impact Factor:	ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 0.829	РИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.997	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

<https://doi.org/10.18698/2309-3684-2017-4-3147>

11. Hudojnazarov, H.H., & Jalgashev, B.Ja. (2017). *Vzaimodejstvie cilindricheskikh sloev i obolochek*

s vjazkoj zhidkost`u. (p.138). LAMBERT Academic Publishing.