

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИЦ (Russia) = 0.126
ESJI (KZ) = 9.035
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2021 Issue: 03 Volume: 95

Published: 26.03.2021 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



Zokir Bozorboyevich Khudayberdiyev
Samarkand State University
Senior Lecturer to Department of
Theoretical and Applied Mechanics,
xudoyberdiyevz@mail.ru

Jamoliddin Shokirovich Achilov
Jizzax Polytechnic Institute
Lecturer to Department of
General technical sciences

Rashid Sharafovich Usanov
Samarkand State University
Lecturer to Department of
Differential equations

SYMMETRICAL VIBRATIONS OF AN ELASTIC THREE-LAYER PLATE

Abstract: The article deals with symmetric vibrations of a three-layer elastic plate. Symmetric equations for vibrations of a three-layer elastic plate are obtained. A system of equations of vibrations of a single-layer elastic plate is derived from the obtained equations. Comparison of solutions of equations of vibrations of a single-layer elastic plate with solutions of equations of other authors is carried out. The comparison results show the reliability of the obtained equations.

Key words: layer, displacements, plate, stresses, vibrations.

Language: Russian

Citation: Khudayberdiyev, Z. B., Achilov, J. S., & Usanov, R. S. (2021). Symmetrical vibrations of an elastic three-layer plate. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 03 (95), 321-327.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-03-95-51> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2021.03.95.51>

Scopus ASCC: 2200.

СИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ

Аннотация: В статье рассматриваются симметричные колебания трехслойной упругой пластины. Получены симметричные уравнения колебаний трехслойной упругой пластины. Из полученных уравнений выводится система уравнений колебаний однослойной упругой пластины. Проведено сравнение решений уравнений колебаний однослойной упругой пластины с решениями уравнений других авторов. Результаты сравнения показывают надежность полученных уравнений.

Ключевые слова: слой, перемещения, пластинки, напряжения, колебания.

Введение

В мире изучение вопросов динамики слоистых конструкций имеет важное практическое значение в различных областях техники и строительства, в частности, разработке новых моделей динамического их

деформирования, близких к экспериментальным, применению эффективных математических и численных методов. В последние годы для повышения прочности инженерных конструкций используются различные слоистые конструкции и применяются неклассические модели их расчета.

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

Поэтому, по современным требованиям снижению весогабаритных показателей конструкций в промышленности и строительстве получение экономической выгоды, обеспечением надлежащую прочность конструкций имеет важное значение.

В различных областях техники и строительства широко применяются многослойные, в частности трехслойные пластинки. При этом во многих случаях динамические расчеты пластин основываются на классические теории опирающихся на гипотезы Кирхгофа [1-3]. Исследования которых, можно разделить на два направления: разработка асимптотических теорий и теорий типа Тимошенко и Рейсснера. За последние несколько десятилетий разработаны теории колебания пластин, основанные на методе точных решений в преобразованиях Г.И.Петрашеня [4,5].

Указанным методом разработаны различные варианты однородных и трехслойных пластин в упругой и вязкоупругой постановках профессором И.Г.Филипповым и его учениками.

Задачи, рассматриваемые в работе, основываются на уравнениях колебания трехслойных пластин, выведенных на основе метода, предложенных профессорами Г.И.Петрашенем и И.Г.Филипповым.

Постановка задачи и метод решения.

Рассматривается бесконечная в плане трёхслойная упругая пластинка. Считается, что рассматриваемая пластинка является трехмерным телом. Слои пластинки изготовлены из упругих материалов одинаковой структуры и той же геометрии при условии геометрической и физической линейности, сверху и снизу имеют разные толщины, и не ограничены в плоскости, границы раздела между слоями являются плоскими и находятся в тех или иных условиях контактного взаимодействия. При этом нижний и верхний слои в дальнейшем названы «несущими слоями».

Пластинка отнесена к декартовой системе прямоугольных координат $Oxyz$ [6-8]. Слои пластинки пронумерованы, верхний несущий слой назван первым слоем, нижний несущий слой – вторым, а срединный слой или наполнитель – нулевым слоем.

Через $2h_0$ и h_2 обозначены толщины первого, нулевого и второго слоев; через λ_m, μ_m – упругие постоянные материалов слоев, т.е. коэффициенты Ламе; ρ_m – объёмные плотности слоев. При этом индекс «m» всегда пробегает значения 0,1,2.

Зависимости напряжений $\sigma_{ij}^{(m)}(i, j=1,2,3; m=0,1,2)$ от деформаций, в точках слоев пластинки описываются законом Гука:

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \lambda_m(\varepsilon^{(m)})\delta_{ij} + 2\mu_m(\varepsilon_{ij}^{(m)}); (i=1,2,3). \quad (1)$$

Здесь

$$\varepsilon^{(m)} = \varepsilon_{11}^{(m)} + \varepsilon_{22}^{(m)} + \varepsilon_{33}^{(m)}; \quad (2)$$

Для описания движений точек составляющих слоев пластинки в системе декартовых координат $Ox^1x^2x^3$ приняты уравнения движения

$$\sigma_{ij,j}^{(m)} = \rho_m \frac{\partial^2 \bar{U}^{(m)}}{\partial t^2}; (m=0,1,2), \quad (3)$$

где $\bar{U}^{(m)}$ – векторы перемещений точек слоев; t – время. Далее введены скалярные φ_m и векторные $\bar{\psi}_m$ потенциалы по формулам

$$\bar{U}^{(m)} = grad \varphi_m + rot \bar{\psi}_m, \quad (4)$$

$$\bar{U}^{(m)} = \bar{U}(U^{(m)}, V^{(m)}, W^{(m)}), \bar{\psi}_m = \bar{\psi}(\psi_{1m}, \psi_{2m}, \psi_{3m})$$

При этом считается, что векторные потенциалы $\bar{\psi}_m$ удовлетворяют условиям соленоидальности векторных полей

$$div \bar{\psi}_m = 0, (m=0,1,2) \quad (5)$$

Подставив (4) в систему (3) нетрудно получить уравнения движения точек вязкоупругих слоев пластинки в виде волновых уравнений для потенциалов продольных φ_m и поперечных $\bar{\psi}_m$ волн

$$\Delta \varphi_m = \frac{\rho_m}{\lambda_m + 2\mu_m} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial t^2}; \Delta \bar{\psi}_m = \frac{\rho_m}{\mu_m} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_m}{\partial t^2}, \quad (6)$$

где введены обозначения

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Далее компоненты векторов перемещений, тензоров деформаций и напряжений выражены через потенциалы φ_m и ψ_m .

Предполагается, что при $t < 0$ пластинка находилась в покое, а в момент $t=0$, к её граничным плоскостям (к внешним плоскостям несущих слоев) при $z = \pm h_i^*$; $h_i^* = h_0 + h_i$, $(i=1,2)$ прикладываются динамические воздействия.

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(i)}(x, y, z, t) \Big|_{z=\pm h_i^*} &= \pm F_{xz}^{(i)}(x, y, t); \\ \sigma_{yz}^{(i)}(x, y, z, t) \Big|_{z=h_i^*} &= \pm F_{yz}^{(i)}(x, y, t); \\ \sigma_{zz}^{(i)}(x, y, z, t) \Big|_{z=\pm h_i^*} &= \pm F_z^{(i)}(x, y, t), (i=1,2). \end{aligned} \quad (7)$$

В соответствии с принятым предположением о том, что при $t < 0$ пластинка находилась в покое, будем считать, что все слои находятся в покое, что равносильно нулевым начальным условиям при $t=0$

$$\varphi_m = \psi_{km} = \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{1m}}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

Кроме граничных условий (7), на контактных с нижней и верхней несущими слоями плоскостях заполнителя, имеют места динамические и кинематические контактные условия:

а) на контактной плоскости между верхним несущим слоем и заполнителем при $z = h_0$:

$$\sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(1)}; \quad \sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{xz}^{(1)}; \quad \sigma_{yz}^{(0)} = \sigma_{yz}^{(1)}; \quad (9)$$

$$U_0 = U_1; \quad V_0 = V_1; \quad W_0 = W_1.$$

б) на контактной плоскости между нижним несущим слоем и заполнителем при $z = -h_0$:

$$\sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(2)}; \quad \sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{xz}^{(2)}; \quad \sigma_{yz}^{(0)} = \sigma_{yz}^{(2)}; \quad (10)$$

$$U_0 = U_2; \quad V_0 = V_2; \quad W_0 = W_2.$$

Следует подчеркнуть, что начальные условия для потенциалов – (8) адекватны начальным условиям для перемещений U_m, V_m, W_m при $t=0$:

$$U_m = V_m = W_m = 0; \quad \frac{\partial U_m}{\partial t} = \frac{\partial V_m}{\partial t} = \frac{\partial W_m}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

Таким образом, при общей постановке задачи о нестационарных колебаниях пластинки, задача приводится к решению для каждого слоя четырех уравнений (например, относительно функций $\varphi_0, \psi_{10}, \psi_{20}, \psi_{30}$ для нулевого слоя или заполнителя) – (6), при граничных (7) и контактных – (9), (10) и нулевых начальных условиях – (8) или (11).

Учитывая неограниченность размеров пластинки, в дальнейшем считается, что она находится в условиях плоской деформации и, отнесена к системе прямоугольных координат Oxz (рис.1).

В случае плоской деформации векторы перемещений точек слоев равны

$$\vec{U}^m = U_m \vec{i} + W_m \vec{k}; \quad (12)$$

$$U_m = U_m(x, z, t); \quad W_m = W_m(x, z, t).$$

где \vec{i}, \vec{k} – единичные орты осей координат, достаточно в (4) положить

$$\varphi_m = \varphi_m(x, z, t); \quad \vec{\psi}_m = \psi_m(x, z, t) \vec{j} \quad (13)$$

где \vec{j} – единичный орт оси Oy , чтобы уравнения движения точек слоев пластинки из двенадцати обыкновенных дифференциальных уравнений (6) приобрели вид шести волновых уравнений относительно потенциальных функций $\varphi_m(x, z, t)$ и $\psi_m(x, z, t)$. При этом оператор Лапласа примет вид

$$\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2. \quad (14)$$

Заметим, что условие соленоидальности векторных полей $\vec{\psi}_m$ – (5), в случае представлений (13) выполняются автоматически.

Легко выразить компоненты векторов перемещений, а также тензоров деформаций и напряжений слоев пластинки через введенные потенциальные функции (3). Например

$$U_m = \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} - \frac{\partial \psi_m}{\partial z}; \quad \varepsilon_{xx}^{(m)} = \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial z}. \quad (15)$$

В силу линейности теории вязкоупругости можно представить воздействия общего вида, а следовательно, соответствующего ему поля смещений (12), в виде наложения симметричной и антисимметричной частей

$$\vec{U}_m = \vec{U}_m^s + \vec{U}_m^a, \quad (16)$$

где \vec{U}_m^s – симметричная (продольная), \vec{U}_m^a – антисимметричная (изгибная) части полей перемещений слоев пластинки. При этом суммарное поле (16) удовлетворяет граничным условиям (7), а симметричная её часть должна удовлетворять условиям (7) при

$$f_x^{(1)}(x, t) = -f_x^{(2)}(x, t) = \frac{1}{2} (F_x^{(1)} + F_x^{(2)}); \quad (17)$$

$$f_z^{(1)}(x, t) = f_z^{(2)}(x, t) = \frac{1}{2} (F_z^{(1)} + F_z^{(2)}).$$

т.е. граничные условия задачи (7) в этом случае имеют вид

$$\sigma_{xz}^{(i)}(x, z, t) \Big|_{z=(-1)^{i-1} h_i^*} = f_x^i(x, t);$$

$$\sigma_{zz}^{(i)}(x, z, t) \Big|_{z=(-1)^{i-1} h_i^*} = f_z^i(x, t); \quad (18)$$

$$\sigma_{yz}^{(i)}(x, z, t) \Big|_{z=(-1)^{i-1} h_i^*} = 0; \quad h_i^* = h_0 + h_i, (i = 1, 2)$$

Кроме того, на поверхностях заполнителя $z = \pm h_0$ имеют места динамические и кинематические контактные условия

$$\sigma_{zz}^{(0)}(x, z, t) \Big|_{z=\pm h_0} = \begin{cases} \sigma_{zz}^{(1)}(x, z, t) \Big|_{z=h_0}, \\ \sigma_{zz}^{(2)}(x, z, t) \Big|_{z=-h_0}; \end{cases}$$

$$\sigma_{xz}^{(0)}(x, z, t) \Big|_{z=\pm h_0} = \begin{cases} \sigma_{xz}^{(1)}(x, z, t) \Big|_{z=h_0}, \\ \sigma_{xz}^{(2)}(x, z, t) \Big|_{z=-h_0}; \end{cases} \quad (19)$$

$$\sigma_{yz}^{(0)}(x, z, t) \Big|_{z=\pm h_0} = 0,$$

и

$$U_0(x, z, t) \Big|_{z=\pm h_0} = \begin{cases} U_1(x, z, t) \Big|_{z=h_0}; \\ U_2(x, z, t) \Big|_{z=-h_0}, \end{cases} \quad (20)$$

$$W_0(x, z, t) \Big|_{z=\pm h_0} = \begin{cases} W_1(x, z, t) \Big|_{z=h_0}; \\ W_2(x, z, t) \Big|_{z=-h_0}. \end{cases}$$

Начальные условия задачи считаются нулевыми, т.е. при $t = 0$

$$\varphi_m = \psi_m = 0, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = \frac{\partial \psi_m}{\partial t} = 0. \quad (21)$$

Таким образом, решение задачи о нестационарных колебаниях трехслойной пластинки приводится к решению шести интегродифференциальных уравнений второго порядка (6) с двенадцатью граничными и контактными условиями (18)- (20), а также нулевыми начальными условиями (21).

Метод решения.

Для решения поставленной задачи функции внешних воздействий, т.е. функций $f_x^{(1,2)}(x,t)$ и $f_z^{(1,2)}(x,t)$ из (17) представлены в виде

$$f_x^{(1,2)}(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{\sin kx} dk \int_{(l)} \tilde{f}_x^{(1,2)}(k,p) e^{pt} dp; \quad (22)$$

$$f_z^{(1,2)}(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{-\cos kx} dk \int_{(l)} \tilde{f}_z^{(1,2)}(k,p) e^{pt} dp,$$

где $\tilde{f}_x^{(i)}(k,p)$, и $\tilde{f}_z^{(i)}(k,p)$, ($i=1,2$) – функции, регулярные при $\text{Re } p > 0$. Эти функции имеют конечное число полюсов, принимают произвольные значения внутри некоторой области $\Omega(k,p)$, содержащий промежуток $(-i\omega_0, i\omega_0)$ мнимой оси и пренебрежимо малые при $k > k_0$; (l) – контур $\text{Re } p = \nu > 0$ на комплексной области (P), оставляющего область $\Omega(k,p)$ правее себя по k .

В соответствие с принятыми представлениями для функций внешних воздействий, решение задачи (6), (18)- (20) и (21) будем искать в виде (22), подстановка которых в уравнения (6) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно потенциальных функций. Общие решения полученных уравнений имеют вид

$$\tilde{\varphi}_m(z,k,p) = A_1^{(m)}(k,p) ch \alpha_m z + A_2^{(m)}(k,p) sh \alpha_m z; \quad (23)$$

$$\tilde{\psi}_m(z,k,p) = B_1^{(m)}(k,p) sh \beta_m z + B_2^{(m)}(k,p) ch \beta_m z;$$

где

$$\alpha_m^2 = k^2 + \rho_m p^2 (\lambda_m + 2\mu_m)^{-1}; \quad (24)$$

$$\beta_m^2 = k^2 + \rho_m p^2 \mu_m^{-1}.$$

В случае симметричных воздействий в соответствии с (17),

$$f_x^{(2)} = -f_x^{(1)} \text{ и } f_z^{(2)} = f_z^{(1)}$$

что влечет за собой то, что в (23) следует полагать $A_2^{(m)} = 0, B_2^{(m)} = 0$.

Тогда, решениями уравнений (6) в случае симметричных колебаний пластины будут

$$\tilde{\varphi}_m(z,k,p) = A_1^{(m)}(k,p) ch(\alpha_m z); \quad (25)$$

$$\tilde{\psi}_m(z,k,p) = B_1^{(m)}(k,p) sh(\beta_m z).$$

Перемещения U_m и W_m также представим в виде (22). Подставляя которых и в выражения

перемещений типа (15) получим формулы для преобразованных перемещений \tilde{U}_m и \tilde{W}_m . Используя в полученных выражения стандартные разложения гиперболических функций в степенные ряды, получим

$$\tilde{U}_m = \sum_{n=0}^{\infty} \left[k \alpha_m^{2n} \cdot A_1^{(m)} - \beta_m^{2n+1} B_1^{(m)} \right] \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \quad (26)$$

$$\tilde{W}_m = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_m^{2n+2} \cdot A_1^{(m)} - k \beta_m^{2n+1} B_1^{(m)} \right] \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

В качестве искоемых функций, в уравнениях колебания трехслойной пластинки, примем главные части преобразованных перемещений \tilde{U}_0 и \tilde{W}_0 такой поверхности нулевого слоя, расстояние от поверхности $z = 0$ которой определяется формулой

$$\xi = \chi \cdot h_0, \quad -1 \leq \chi < 0; \quad 0 \leq \chi < 1. \quad (27)$$

где χ – постоянное число, удовлетворяющее неравенству $-1 \leq \chi \leq 1$. Для этого в уравнениях (26) примем $z = \xi$, $m = 0$ и $n = 0$. Тогда введя обозначения $\tilde{U}_0^{(0)}$ и $\tilde{W}_0^{(0)}$ получим

$$A_1^{(0)} = \frac{\frac{1}{\xi} \tilde{W}_0^{(0)} - k \tilde{U}_0^{(0)}}{\alpha_0^2 - k^2}; \quad \beta_0 B_1^{(0)} = \frac{\frac{k}{\xi} \tilde{W}_0^{(0)} - \alpha_0^2 \tilde{U}_0^{(0)}}{\alpha_0^2 - k^2}. \quad (28)$$

Далее выражая перемещения и напряжения через введенные функции $\tilde{U}_0^{(0)}$ и $\tilde{W}_0^{(0)}$ и подставляя их в граничные и контактные условия, получены следующие уравнения симметричных колебаний трехслойной вязкоупругой пластинки

$$\left\{ c_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + c_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + c_{13} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + c_{14} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + c_{16} + \right.$$

$$+ c_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left. \right\} \frac{\partial}{\partial x} W_0^{(0)}(x,t) + \left\{ d_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + d_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + d_{13} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \right.$$

$$+ d_{14} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + d_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left. \right\} U_0^{(0)}(x,t) = \left\{ s_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \right.$$

$$+ s_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + s_{13} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + s_{14} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + s_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + s_{16} \left. \right\} f_x^{(1)}(x,t);$$

$$\left\{ c_{21} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + c_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + c_{23} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + c_{24} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \right. \quad (29)$$

$$+ c_{25} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{26} \left. \right\} W_0^{(0)}(x,t) + \left\{ d_{21} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + d_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + \right.$$

$$+ d_{23} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + d_{24} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + d_{25} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + d_{26} \left. \right\} \frac{\partial}{\partial x} U_0^{(0)}(x,t) =$$

$$= \left\{ s_{21} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + s_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + s_{23} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \right.$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$$+ s_{24} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + s_{25} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + s_{26} \left. \right\} f_z^{(2)}(x, t).$$

где коэффициенты c_{ij} , d_{ij} , s_{ij} определяются по формулам типа

$$c_{11} = -\frac{1}{\xi} \left[(q_0 \rho_1 \mu_1^{-1} + (1 - q_1) \rho_0 (\lambda_0 + 2\mu_0)^{-1}) \rho_1 (\lambda_1 + 2\mu_1)^{-1} \frac{(h_0 + h_1) h_0^4}{12} + ((2q_1 \rho_0 (\lambda_0 + 2\mu_0)^{-1} + 3(1 + q_1 - q_0 q_1) \rho_1 (\lambda_1 + 2\mu_1)^{-1} + 2q_0 q_1 \rho_0 (\lambda_0 + 2\mu_0)^{-1}) \rho_1 (\lambda_1 + 2\mu_1)^{-1} + ((1 + q_1) \rho_0 \mu_0^{-1} + (1 + q_1) q_0 \rho_0 (\lambda_0 + 2\mu_0)^{-1}) \rho_1 \mu_1^{-1} + 3q_0 (1 - q_1) \rho_1^2 (\lambda_0 + 2\mu_0)^{-2} \right) \frac{(h_0 + h_1)^3 h_0^2}{36} \right];$$

Полученные уравнения являются уравнениями в частных производных гиперболического типа. Это является важным для правильного описания процессов нестационарного колебания пластин. Кроме того, они содержат в своих структурах члены, учитывающие инерцию вращения и деформации поперечного сдвига. Данное обстоятельство позволяет сделать вывод о том, что полученные уравнения являются более общими, чем уравнения типа С.П.Тимошенко. При этом, следует подчеркнуть, что эти уравнения выведены, в отличие от классических Кирхгоффа и типа Тимошенко уравнений, без привлечения дополнительных гипотез и предпосылок, а также искусственно вводимых поправочных коэффициентов.

Выведены уравнения двухслойной пластинки и однородной пластинки для сравнения с известными результатами других авторов. В случае однородной пластинки сравнение с результатами Г.И.Петрашени и Э.В.Хинена показало, что уравнения колебания по обеим теориям совпадают по структуре, но имеются некоторые различия в значениях коэффициентов.

Численные расчеты перемещений (рис.2 и рис.3) по этим теориям, которые показали почти полное совпадение результатов, что является доказательством достоверности полученных результатов.

Численному решению конкретных прикладных задач о симметричных колебаниях трехслойной упругой пластинки, находящейся под действием внешних нагрузок.

Результаты расчетов.

Решена задача о симметричных колебаниях трехслойной упругой пластинки, неограниченной длины и шириной l в плоской постановке. Пластинка считается шарнирно закрепленной по торцам. Считается, что симметричные колебания пластинки возбуждаются силами (17) $f_x^{(1)}(x, t) = f_x(x, t)$ и $f_z^{(1)}(x, t) = f_z^{(2)}(x, t) = f_z(x, t)$ заданными на граничных плоскостях пластинки при $z = \pm(h_0 + h_1)$, $i = 1, 2$. Эти функции при разработке методики решения задачи считаются произвольными, удовлетворяющими условиям, сформулированным выше (формулы (22)).

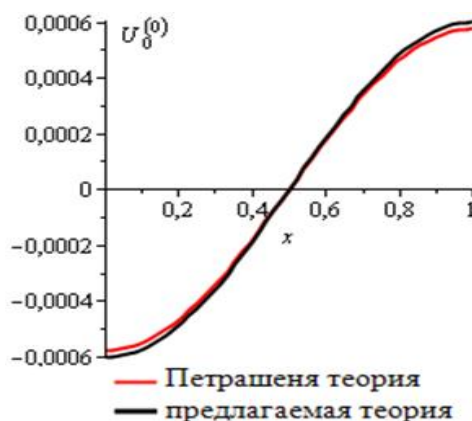


Рис.1. 2-расм. Сравнение продольного перемещения U по различным теориям при $t = 0.6$; $0 \leq x \leq 1$.

Impact Factor:

| | | |
|--------------------------|------------------------|----------------------|
| ISRA (India) = 6.317 | SIS (USA) = 0.912 | ICV (Poland) = 6.630 |
| ISI (Dubai, UAE) = 1.582 | РИИЦ (Russia) = 0.126 | PIF (India) = 1.940 |
| GIF (Australia) = 0.564 | ESJI (KZ) = 9.035 | IBI (India) = 4.260 |
| JIF = 1.500 | SJIF (Morocco) = 7.184 | OAJI (USA) = 0.350 |

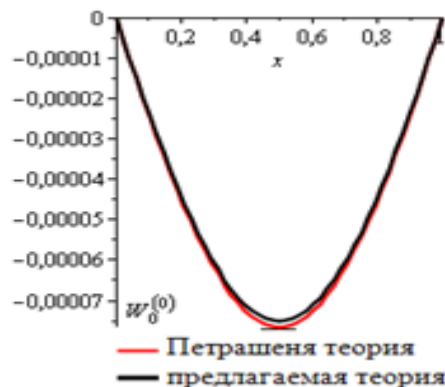


Рис.2. 3-расм. Сравнение поперечного перемещения W по различным теориям при $t = 0.6$; $0 \leq x \leq 1$.

Конкретные виды функций $f_x(x, t)$ и $f_z(x, t)$ заданы при численной реализации задачи. Числовые значения искомых величин получены с помощью пакета прикладных программ Maple 12, при заданных значениях геометрических и физико-механических параметров слоев пластинки

Доказано, что точки сечений пластинки, находящихся левее срединного сечения $x = 0,5$, получают положительные перемещения, т.е. продольные волокна пластинки в левой ее половине испытывают растяжения. С другой стороны в тех же моментах времени точки сечений пластинки, находящихся правее срединного сечения $x = 0,5$, получают отрицательные перемещения, т.е. продольные волокна пластинки в правой ее половине испытывают сжатие. Следует подчеркнуть, что данное двойное поведение сечений, находящихся по разным сторонам срединного сечения пластинки, полностью согласуется с физической сущностью решаемой задачи.

Кроме того, показано, что можно наблюдать появление поперечных перемещений точек пластинки, имеющих незначительные числовые значения. Появление этих $w_0^{(n)}$ перемещений являются следствием наличия продольных внешних нагрузок f_x , действующих на лицевой и обратной сторонах пластинки. Полученные при

этом результаты позволяют сделать вывод о том, что при симметричных колебаниях трехслойной пластинки можно пренебречь поперечными перемещениями точек.

Заключение

1. Разработана теория нестационарных симметричных колебаний трехслойной вязкоупругой пластинки в плоской постановке свободной от гипотез и предпосылок.

2. Предложены общие уравнения колебания нестационарных симметричных колебаний трехслойной вязкоупругой пластинки, в плоской постановке из которых, в частных случаях, следуют уравнения колебания упругих трехслойных пластин, для двухслойных вязкоупругих и упругих пластин, однородных упругих и вязкоупругих пластин.

3. Из выведенных общих уравнений симметричных колебаний вязкоупругой пластинки можно получить пригодные для инженерной практики уточненные, типа С.П.Тимошенко уравнения, а также уравнения классического типа, имеющие порядок не выше второго;

4. Разработаны эффективная математическая модель, методика расчёта, вычислительный алгоритм и некоторые аналитические решения расчета колебаний трехслойной пластинки с заданными граничными условиями при внешнем нагружении.

References:

1. Lelniskiy, S.G. (1977). *Teoriya uprugosti anizotropno tela*. (p.416). Moscow: Nauka.
2. Ambarsumyan, S.A. (1987). *Teoriya anizotropnix plastin*. (p.493). Moscow: Nauka.

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИИ (Russia) = 0.126
ESJI (KZ) = 8.997
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

3. Reissner, E. (1984). On a certain mixed variational theory and a proposed application. *Int. Z. Numer. Methods Eng.*, 20, pp.1366-1368.
4. Ren, Z.G. (1986). Bending theory of laminated plates. *J.Comp.Sci. Technol*, 27, pp. 225–239.
5. Petrashen, G.I. (1966). *Problemi injenernoy teorii kolebaniy virojdennix system. Issledovaniya uprugosti i plastichnosti*. L.: Izd-vo LGU, 5. pp. 3-33.
6. Khudoynazarov, Kh., Khudoyberdiyev, Z., & Khudoyberdiyeva, Sh. (2018). Symmetrical vibrations of a three-layered elastic plate. *Int. J. of Advanced Research in Science, Engineering and Technology*, 5(10), pp.7117-7121.
7. Xudayberdiyev, Z., & Yaxshiboyev, Sh. (2020). Simmetrichniye kolebaniya sharnirno-opertoy uprugix dvuxsloynoy plastinki. *International Scientific Journal ISJ Theoretical & Applied Science*, Philadelphia, USA, issue 05, volume 85 published May 30, 2020.
8. Xudayberdiyev, Z., Isroilov, Sh., Axatov, X., & Usanov, R. (2020). Nestasonarniye kolebaniya trexsloynoy uprugoy plastinki. *International Scientific Journal ISJ Theoretical & Applied Science*, Philadelphia, USA issue 08, volume 88 published Avgust 30, 2020.
9. Xudayberdiyev, Z., & Yaxshiboyev, Sh. (2020). *Uravneniya antisimmetrichniye kolebaniy uprugoy trexsloynoy plastini*. IV Mejdunorodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya «Nauka, obrazavaniye, innovasii: aktualniye voprosi i sovremenniye aspekti», 27 noyabrya 2020 g., (pp.70-75). g.Penza, Rossiya.
10. Khudoynazarov, Kh., & Khudoyberdiyev, Z. (2020). *Unsteady vibrations of a three-layer plate with an asymmetric structure*. In recognition of his/her active and invaluable participation during the “1st International Conference on Energetics, Civil and Agricultural Engineering (ICECAE 2020)”.