Acta et Commentationes, Sciences of Education, nr. 3 (17), 2019 ISSN 1857-0623
p. 41-53 E-ISSN 2587-3636

CZU: 37.037:514 DOI: 10.36120/2587-3636.v17i3.41-53

PROBLEMELE GEOMETRICE DE CONSTRUCȚIE-FACTOR DETERMINANT ÎN EDUCAȚIA INTELECTUALĂ A ELEVILOR ȘI STUDENȚILOR

Laurențiu CALMUȚCHI, dr. hab., prof. univ., UST

Rezumat. În acest articol se cercetează metodologia rezolvării problemelor de constructive plin aplicarea diferitor metode de rezolvare acestor probleme. O atenție deosebită se acordă cercetării soluțiilor problemelor.

Cuvinte cheie: educație intelectuală, problemă de construcție, cercetare.

GEOMETRIC PROBLEMS OF CONSTRUCTION - DETERMINANT FACTOR IN THE INTELLECTUAL EDUCATION OF PUPILS AND STUDENTS

Abstract. This article investigates the methodology of solving constructive problems by applying different methods to solve these problems. Particular attention is paid to researching problem solutions.

Keywords: intellectual education, problem of construction**,** research.

Problemele de construcție au atras atenția matematicienilor din toate timpurile. Cu astfel de probleme s-au ocupat Pitagora, Hippocrates, Euclid, Arhimede, Apoloniu, Descartes, Fermat, Newton, Pascal, Euler, Gauss și alții. În secolul IV î.e.n. au apărut problemele, care au devenit clasice: problema cuadraturii discului, problema dublării cubului și problema trisecției unghiului. Abia la sfârșitul secolului XIX s-a demonstrat, că aceste probleme de construcție nu pot fi rezolvate numai cu rigla și compasul. Cercetările făcute în soluționarea acestor probleme au stat la baza dezvoltării diferitor ramuri ale matematicii, mai cu seamă a algebrei și analizei matematice.

Este greu de apreciat rolul problemelor de construcție în dezvoltarea capacităților intelectuale ale elevilor și studenților. Nici un fel de alte probleme nu contribuie atât de mult pentru dezvoltarea atitudinilor și deprinderilor logice la elevi decât problemele de construcție. Aceste probleme după structura și metodele de rezolvare nu numai că stimulează obținerea unor imaginații geometrice concrete, dar și dezvoltă posibilitatea de a imagina figura geometrică, permit ca mintal de operat cu elementele figurii. Problemele de construcție pot influența la înțelegerea de către elevi a apariției diferitor figuri geometrice, dau posibilitatea transformării figurilor, iar toate acestea stimulează imaginația spațială. Astfel de probleme dezvoltă în mod deosebit gândirea logică, intuiția geometrică. Planul de rezolvare a oricărei probleme de construcție reprezintă un lanț de construcții de bază (elementare), care fiind efectuate duc la soluția problemei. Prin urmare, acest plan poate fi privit ca un oarecare algoritm și de aceea poate fi folosit ca un material util în cursul de informatică și în tehnica de calcul. Problemele de construcție dezvoltă deprinderile de a soluționa problemele practice. Prin intermediul acestor probleme se dezvoltă deprinderile de cercetare și de lucru independent.

Rezolvând problemele de construcție, chiar și cele mai simple, mai profund se conștientizează materialul teoretic acumulat despre figurile geometrice, deoarece în procesul rezolvării acestor probleme se formează un model ilustrativ a proprietăților și al relațiilor studiate și se lucrează cu acest model. Rezolvarea problemelor de construcție dezvoltă așa calități ale personalității ca atenția, disciplina, inițiativa, gândirea logică, creativitatea, dragostea de muncă.

Cu părere de rău în manualele școlare de matematică actuale nu se acordă o atenție meritată problemelor de construcție. Probabil autorii manualelor de matematică n-au consultat suficient manualele [7, 8].

Încă în secolul IV î.e.n. a fost elaborată metodologia rezolvării problemelor de construcție, care este actuală și în prezent. Conform acestei metodologii, se consideră că problema de construcție este bine rezolvată, dacă sunt respectate următoarele etape: 1) analiza; 2) construcția; 3) demonstrația; 4) cercetarea. Din practica acumulată putem afirma, că primele trei etape sunt ceva mai bine însușite de elevi. Cercetarea însă, este mult mai dificilă pentru elevi și nu numai doar pentru ei. Scopul cercetării este de a stabili condițiile în care problema are soluții și de a determina numărul acestora. Metodiștii recomandă de a face cercetarea „după pașii de construcție". Vom arăta că această condiție este necesară, dar nu și suficientă. Pentru a ilustra această afirmație, vom folosi un exemplu din [4], care după părerea noastră este foarte reușit.

Se cere de construit o dreaptă, care trece printr-un punct dat A la distanțe egale de la două puncte arbitrare B și C.

Analiza. Construim o dreaptă a, notăm pe această dreaptă un punct A și la distanțe egale (de părți diferite a dreptei a) construim punctele B și C.

Construim perpendicularele BB_1 și CC_1 la dreapta a, segmentul BC și notăm punctul M de intersecție a segmentului BC cu dreapta a (Fig.1). Observăm, că punctul M este mijlocul segmentului BC și deja devine clară metoda de rezolvare a problemei date.

Construcția.

1. $[BC]$;
2. M- mijlocul segmentului BC;
3. (AM)- dreapta ce verifică condiției problemei.

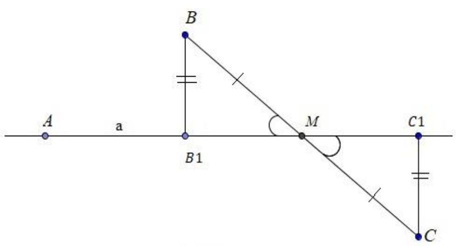


Figura 1

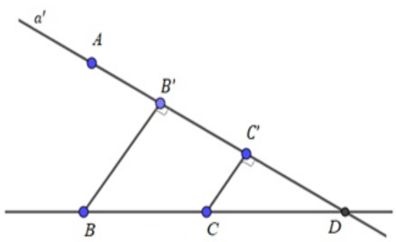


Figura 2

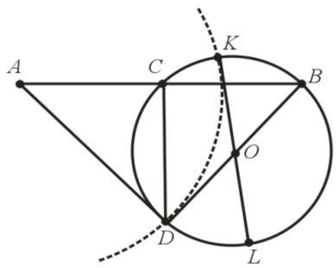


Figura 3

Demonstrația. Urmează nemijlocit din construcție.

Cercetarea. Primul pas întotdeauna este posibil și în mod unic. De asemenea este posibil în mod unic și al doilea pas. Întotdeauna este posibil și pasul trei, dar prin două puncte trece o singură dreaptă numai dacă aceste puncte sunt diferite. Dacă însă punctele A și M

coincid, atunci prin aceste două puncte trec o infinitate de drepte. Evident, fiecare din aceste drepte satisface condiției problemei. Așa dar, problema are o infinitate de soluții, dacă punctul A concide cu mijlocul segmentului BC. Aceasta însă nu înseamnă, că nu pot exista și alte soluții, făcând construcția în alt mod. Într-adevăr, analizând mai profund problema, observăm că dreapta paralelă la BC (dacă așa dreaptă există) de asemenea este soluție a problemei. Pentru a face așa concluzie este suficient, făcând analiza, de avut în vedere că punctele B și C pot fi situate și de aceiași parte a dreptei a. Apare întrebarea: nu mai există oare și alte soluții? Acum se cere de demonstrat, că alte soluții nu există. Într-adevăr, fie dreapta a' nu trece prin mijlocul segmentului BC și nici nu este paralelă la dreapta BC (Fig.2). Atunci, dreapta a' va intersecta dreapta BC. Să notăm prin D punctul de intersecție a dreptei a' cu dreapta BC, iar prin BB' și CC' perpendicularele construite corespunzător din punctele B și C pe dreapta a'. Deoarece $\Delta BB'D \sim \Delta CC'D$, atunci $\frac{|BB'|}{|CC'|} = \frac{|BD|}{|CD|}$. Din faptul că dreapta a' nu trece prin mijlocul segmentului BC, urmează, că $|BD| \neq |CD|$ și deci, $|BB'| \neq |CC'|$, adică dreapta a' nu poate fi solție a problemei.

Prin urmare, problema are o infinitate de soluții, dacă punctul A coincide cu mijlocul segmentului BC, și are exact două soluții, dacă punctul A nu aparține dreptei BC. Dacă însă, punctul A este un punct arbitrar al dreptei BC, diferit de mijlocul acestui segment, atunci problema are o singură soluție.

În continuare vom rezolva unele probleme de construcție utilizând diferite metode de rezolvare a astfel de probleme.

1. Este dat un cerc $\omega(O,R)$ și un punct A în exteriorul cercului. Din punctul A de construit o secantă astfel, încât cercul să o împartă în jumătate.

Soluție. Fie secanta AB este dusă astfel, încât $|AC| = |CB|$ (Fig. 3). Evident, problema se reduce la determinarea punctului B sau C. Să observăm, că punctul B se determină ușor, dacă am cunoaște punctul $D, simetricul\ punctului\ B\ în\ raport\ cu\ centrul\ O$. Unim punctul D cu punctele A și C. Deoarece unghiul DCB se sprijină pe diametru, urmează că este unghi drept, dar atunci $\Delta ACD \equiv \Delta BCD$ și deci, $|AD| = |DB| = 2R$. Așa dar, punctul D este punctul de intersecție a cercului $\omega(O,R)$ cu cercul $\omega_1(A,2R)$.

Prin urmare, pentru a rezolva problema vom proceda în felul următor: descriem cercul $\omega_1(A,2R)$ și punctul de intersecție D al cercurilor ω_1 și ω_2 îl unim cu centrul O; prelungim segmentul DO până la intersecție cu cercul ω în punctul B și unim punctul B cu punctul A. Triunghiul ADB este isoscel, DC este înălțimea acestui triunghi, dar și mediană, urmează, că$|AC| = |CB|$.

O altă soluție obținem, dacă unim punctul К, cel de-al doilea punct de intersecție a cercurilor ω și ω_1 , cu punctul O. Prelungind KO până la punctul L și unim punctele L, A. Problema are o singură soluție, dacă cercul $\omega_1(A,2R)$ este tangent la cercul $\omega(O,R)$ și nu are soluție, dacă $\omega \cap \omega_1 = \{\emptyset\}$.

2. Un lot de pământ are forma unui patrulater convex arbitrar. De construit un gard astfel încât aria lotului să se împartă în două părți egale.

Soluție. Fie lotul are forma patrulaterului $ABCD$ (Fig. 4).

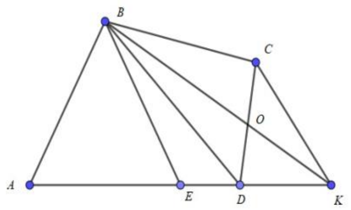


Figura 4

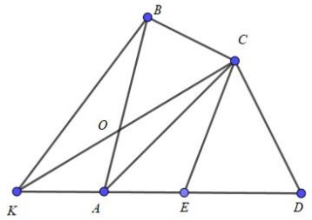


Figura 5

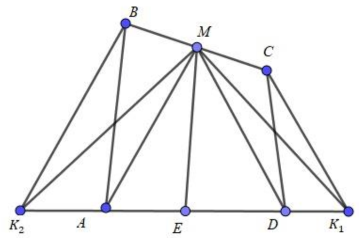


Figura 6

Construim diagonala BD, iar din punctul C construim o paralelă la BD. Notăm prin K punctual de intersecție a acestei paralele cu dreapta AD și unim punctele B, K. Observăm că $A_{\Delta BCD} = A_{\Delta BDK}$ (au baza comună BD și aceeași înălțime) și deci, $A_{\Delta BOC} = A_{\Delta DOK}$. Prin urmare, $A_{ABCD} = A_{\Delta ABK}$. Împărțind segmentul AK în jumătate, determinăm punctual E. Evident, $A_{\Delta ABE} = A_{BCDE}$.

Analogic, se procedează în cazul, dacă gardul începe din vârful C (Fig. 5).

Fie M un punct interior arbitrar de pe latura BC. Din Fig.6 este clar, cum poate fi construit gardul din punctul M. Evident, E este mijlocul segmentului $K_2\,K_1$.

3. Un lot are forma unui pentagon convex arbitrar. Cu ajutorul unui gard de împărțit acest lot în două părți cu ariile egale.

Soluție. Fie lotul dat are forma pentagonului arbitrar $ABCDE$,iar M un punct arbitrar pe latura *ED*.

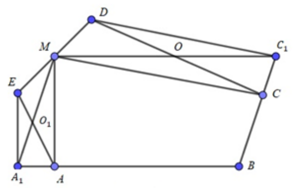


Figura 7

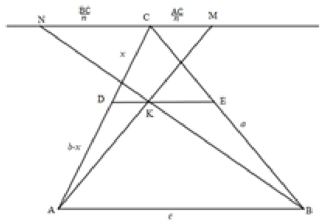


Figura 8

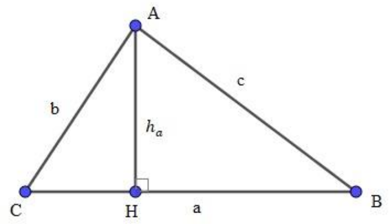


Figura 9

Construim $DC_1||MC$ și $EA_1||\,MA$ (Fig. 7).

$A_{\Delta MDC} = A_{\,\Delta MCC_1}$. Atunci, $A_{\Delta MDO} + A_{\Delta MOC} = A_{\Delta MOC} + A_{\,\Delta OCC_1}$, adică $A_{\Delta MDO} = A_{\,\Delta DCC_1}$. Analogic, ca în problema precedent, putem demonstra că $A_{\Delta MEO_1} = A_{\Delta AO_1A_1}$. Prin urmare, $A_{ABCDE} = A_{A_1MC_1B}$. Așa dar, pentru a împărți aria pentagonului $ABCDE$ în jumătate, este suficient să împărțim aria patrulaterului A_1MC_1B în jumătate (vezi exemplul precedent).

4. Este dat un triunghi arbitrar ABC. De construit pe laturile AC și BC punctele D și E corespunzător, astfel încât DE$||AB$ și $|AD| + |BE| = n \cdot |DE|$.

Soluție.

În [2] această problemă este rezolvată prin metoda algebrică. Vom rezolva acum această problemă prin metoda geometrică.

Presupunem, că problema este rezolvată și segmentul DE satisface condițiilor problemei. Deoarece $|AD| + |BE| = n \cdot |DE| \Rightarrow \frac{|AD|}{n} + \frac{|BE|}{n} = |DE|$. Pe DE depunem $|DK| = \frac{|AD|}{n}$, atunci $|KE| = |DE| - |DK| = \frac{|BE|}{n}$. Construim prin C o dreaptă paralelă la dreapta AB. Notăm punctele de intersecție a acestei drepte construite cu semidreptele $[AK)$ și $[BK)$ prin M și N corespunzător. Din asemănarea triunghiurilor ADK și ACM, avem:
$|CM|:|AC| = |DK|:|AD| = 1:n$ de unde $|CM| = \frac{|AC|}{n}$. Din asemănarea triunghiurilor BKE și BNK, obținem: $|CN| = \frac{|BC|}{n}$. Deci, punctele M și N pot fi construite, dar atunci putem determina punctul K. Rămâne de construit prin punctul K o paralelă la dreapta AB. Problema întotdeauna are o singură soluție.

5. De construit triunghiul ABC, dacă se cunoaște latura a, înălțimea $h_a = h$ și suma $b + c = s$ (Fig. 9).

Soluție.

Fie înălțimea AH împarte latura CB în segmentele CH și HB astfel încât, $|CH| = \frac{a}{2} - x$, $|HB| = \frac{a}{2} + x$ (Fig. 9). Atunci, $b = \sqrt{(\frac{a}{2} - x)^2 + h^2}$,$c = \sqrt{(\frac{a}{2} + x)^2 + h^2}$. Conform condiției, avem:

$$\sqrt{(\frac{a}{2} - x)^2 + h^2} + \sqrt{(\frac{a}{2} + x)^2 + h^2} = s.$$

Rezolvând această ecuație, obținem unica soluție pozitivă

$$x = \frac{s\sqrt{s^2-a^2-4h^2}}{2\sqrt{s^2-a^2}}.$$

Construcția.

1. $y = \sqrt{s^2 - a^2}$
2. $z = \sqrt{y^2 - 4h^2}$
3. $x = \frac{sx}{2y}$
4. $|CH| = \frac{a}{2} - x$
5. $|HB| = \frac{a}{2} + x$
6. ΔAHC
7. ΔAHB
8. ΔABC −căutat.

Problema are o singură soluție pentru $s > a$ și $s^2 > a^2 - 4h^2$.

Patru puncte A, B, C, D situate pe o dreaptă, se numesc puncte armonice, dacă are loc egalitatea: $|AC|:|CB| = |AD|:|DB|$.

Dacă în triunghiul ABC construim bisectoarele unghiului interior și a celui exterior de la vârful C, atunci, dacă notăm corespunzător prin M și N punctele de intersecție a bisectoarelor respective cu dreapta AB, obținem că punctele A, B, M, N sunt armonice (Fig.10). Într-adevăr, din proprietățile bisectoarelor de la vârful triunghiului, avem:

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AC|}{|BC|}, \frac{|AN|}{|BN|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Din aceste două egalități, obținem:

$$|AM|:|MB| = |AN|:|BN|.$$

Prin urmare, punctele A, B, M, N sunt armonice.

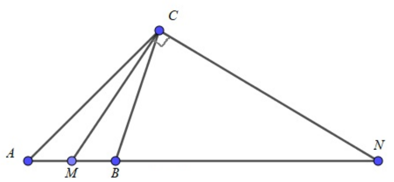


Figura 10

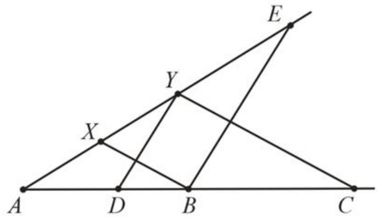


Figura 11

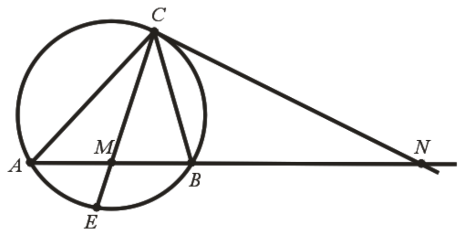


Figura 12

6. Pe o dreaptă sunt date trei puncte A, B și C. De construit al patrulea punct D, astfel încât aceste patru puncte să fie armonice.

Soluție.

Metoda I. Fie A, B și C aparțin unei drepte. Din punctul A construim o semidreaptă arbitrară [AM), iar prin punctele B și C construim dreptele $BX \parallel CY$ arbitrare(Fig.11).Notăm prin X și Y punctele de intersecție a acestor paralele cu semidreapta [AM) corespunzător. Pe semidreapta [AM) depunem $|YE| = |XY|$. Se unesc punctele B și E, iar din punctul Y se construiește $YD \parallel BE$. Punctul D este cel căutat. Într-adevăr,

$$|\mathrm{AC}|:|\mathrm{CB}| = |\mathrm{AY}|:|\mathrm{YX}| \text{ , (1)}$$

$$|\mathrm{AD}|:|\mathrm{DB}| = |\mathrm{AY}|:|\mathrm{YE}| \text{ . (2)}$$

Așa cum, $|YE| = |XY|$ din (1) și (2), avem: $|AC|:|CB| = |AD|:|DB|$.

Metoda II. Fie pe o dreaptă sunt date punctele A, M, B astfel încât, punctul M este situat între punctele A și B (Fig.12). Pentru a construi cel de-al patrulea punct vom folosi proprietățile bisectoarelor unghiului interior și a celui exterior de la vârful triunghiului. Prin punctele A și B construim un cerc arbitrar.Fie E mijlocul arcului AB, iar dreapta ME intersectează cercul în al doilea punct C. Unim punctul C cu punctele A și B. În rezultat se obține triunghiul ABC, în care CM este bisectoarea unghiului interior de la vârful C. Semidreapta $[CN)$este bisectoarea unghiului exterior de la vârful C și intersectează dreapta AB în punctul N, cel căutat.

Observație. Dacă punctul M este mijlocul segmentului AB, atunci triunghiul ABC este isoscel și bisectoarea unghiului exterior de la vârful C nu intersectează dreapta AB. În acest caz punctul N nu poate fi determinat prin această metodă.

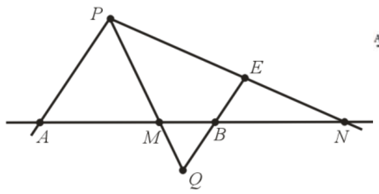
Metoda III. Această metodă se bazează pe folosirea triunghiurilor asemenea (Fig. 13). Fie date punctele A, M și B astfel încât punctul M să fie situat între punctele A și B. Prin punctele A și B construim două drepte paralele arbitrare, iar prin punctul M construim o secantă arbitrară la aceste două drepte paralele. Notăm prin P și Q corespunzător punctele de intersecție a secantei cu dreptele paralele construite. Pe dreapta BQ depunem $|BE| = |BQ|$. Atunci dreapta PE va intersecta dreapta AB în punctul N, cel căutat.
Într-adevăr, din asemănarea triunghiurilor APN și BEN, avem:

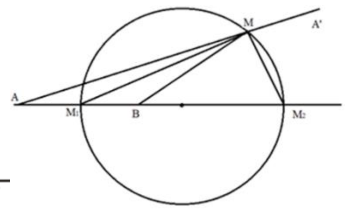
$$|\mathrm{AN}|:|\mathrm{BN}| = |\mathrm{AP}|:|\mathrm{BE}|, (3)$$

Din asemănarea triunghiurilor APM și BQM obținem:

$$|\mathrm{AM}|:|\mathrm{MB}| = |\mathrm{AP}|:|\mathrm{BQ}|, (4).$$

Având în vedere că $|BE| = |PQ|$, din (3) și (4), obținem: $|\mathrm{AM}|:|\mathrm{MB}| = |\mathrm{AN}|:|\mathrm{BN}|$.





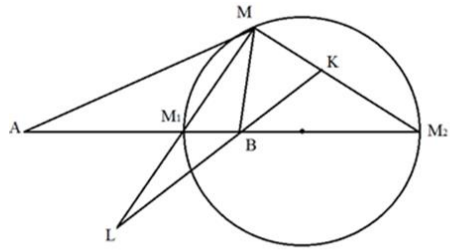


Figura 13 Figura 14 Figura 15

Prin urmare, *N* este punctul căutat.

7. Pe plan sunt date două puncte A și B. De construit locul geometric de puncte M a planului, astfel încât $|AM|:|MB| = 2$.

Soluție. *Metoda I.* Inițial să admitem, că punctul M nu aparține dreptei AB(Fig.14). Fie M posedă astfel de proprietate, adică $|AM| = 2|MB|$. Prelungim segmentul AB și construim bisectoarele unghiurilor AMB și BMA'. Fie M_1 punctul de intersecție al bisectoarei unghiului AMB cu segmentul AB, iar M_2 punctul de intersecție al bisectoarei unghiului BMA' cu prelungirea segmentului AB. Conform proprietății bisectoarei unghiului interior al triunghiului, avem:

$$|AM_1|:|M_1B| = |AM|:|MB| = 2 \ (1)$$

Conform proprietății bisectoarei unghiului exterior al triunghiului, avem:

$$|AM_2|:|M_2B| = |AM|:|MB| = 2 \ (2)$$

Din (1) și (2) urmează, că poziția punctelor M_1 și M_2 pe dreapta AB nu depinde de aceia, unde este situat punctul M. Având în vedere, că unghiul dintre bisectoarea unghiului interior a triunghiului și bisectoarea unghiului exterior al triunghiului este unghi drept, atunci devine clar, dacă punctul M aparține locului geometric de puncte căutat, atunci segmentul M_1M_2 se vede din punctul M sub un unghi drept. Aceasta înseamnă că punctul M aparține cercului, construit pe M_1M_2, ca pe diametru.

Afirmația de mai sus își pierde sensul în cazul, când punctul M aparține dreptei AB (în acest caz nu se poate, de exemplu, de cercetat unghiul AMB și bisectoarea acestuia). Pe dreapta AB, să determinăm punctul M, care satisface locului geometric de puncte căutat ne ajută punctele M_1 și M_2, deja construite. Punctul M_1 împarte segmentul AB (considerând de la punctul A) în raport $2:1$. Punctul M_2 este îndepărtat de la punctul A la o distanță de două ori mai mare decât de la punctul B.

Să demonstrăm acum afirmația inversă: fiecare punct M al cercului, construit pe segmentul M_1M_2, ca pe diametru, posedă prorpietatea: $|AM| = 2|BM|$, adică aparține locului geometric de puncte căutat. Extremitățile diametrului M_1M_2, adică punctele M_1 și M_2, evident, posedă prorpietatea cerută. Fie $M -$ un punct arbitrar al cercului cu diametrul M_1M_2 (Fig.15). Construim prin punctul B o dreaptă, paralelă la dreapta AM și fie K, L punctele de intersecție ale acestei drepte cu dreptele MM_2 și MM_1 corespunzător. Din asemănarea triunghiurilor AMM_2 și BKM_2, avem: $\frac{|AM|}{|BK|} = \frac{|AM_2|}{|BM_2|} = 2$. Din asemănarea triunghiurilor AMM_1 și BLM_1, avem: $\frac{|AM|}{|BL|} = \frac{|AM_1|}{|BM_1|} = 2$. Din egalitățile primite urmează, că $|BK| = \frac{|AM|}{2}$ și $|BL| = \frac{|AM|}{2}$, adică $|BK| = |BL|$.

Prin urmare, în triunghiul dreptunghic KML, segmentul BM este mediană și deci, $|BM| = |BK|$. Având în vedere, că $\frac{|AM|}{|BK|} = 2$, obținem: $\frac{|AM|}{|BM|} = 2$. Așa dar, fiecare punct al cercului cu diametrul M_1M_2, posedă proprietatea cerută.

Metoda II. Introducem un sistem rectangular cartezian de coordonate cu originea în punctul *A* , iar axa absciselor să coincidă cu dreapta *AB* (Fig.16). Fie că în acest sistem punctul *B* are coordonatele (m;0).

Să presupunem că punctul arbitrar *M(x; y)* aparține locului geometric pentru care $|AM| = 2|BM|$. Deoarece, $|AM| = \sqrt{x^2 + y^2}$ și $|BM| = \sqrt{(x - m)^2 + y^2}$ urmează că coordonatele punctului *M* satisfac ecuației:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - m)^2 + y^2}. \quad (1)$$

Transformăm ecuația (1) în felul următor:

$$x^2 + y^2 = 4x^2 - 8mx + 4m^2 + 4y^2,$$

$$x^2 - \frac{8}{3}mx + \frac{4}{3}m^2 + y^2 = 0,$$

$$(x - \frac{4}{3}m)^2 + y^2 = \frac{4}{9}m^2. \quad (2)$$

Ecuația primită reprezintă un cerc cu centrul în punctul C $(\frac{4}{3}m; 0)$ și raza egală cu $\frac{2}{3}m$.

Să demonstrăm și afirmația inversă. Presupunem că punctul *M(x; y)* aparține cercului determinat de ecuația (2). Aceasta înseamnă că coordonatele punctului M satisfac ecuației (2), care este echivalentă cu ecuația (1) (conform judecății de mai sus). Prin urmare, locul geometric de puncte căutat reprezintă un cerc cu centrul C $(\frac{4}{3}m; 0)$ și raza $R = \frac{4}{3}m$.

8. De construit un cerc, tangent la două drepte paralele a și b și cercul să treacă printr-un punct dat M.

Soluție.

Analiza. Notăm distanța dintre dreptele paralele date prin d. Atunci raza cercului căuta trebuie să fie egală cu $\frac{d}{2}$. Problema se reduce la construirea centrului cercului, care să satisfacă la două condiții:

1) Centrul trebuie să fi egal depărtat de la dreptele a și b;
2) Centrul trebuie să fie situat de la punctul M la distanța $\frac{d}{2}$.

Construcția. Dintr-un punct arbitrar A de pe dreapta a coborâm perpendiculara AB pe dreapta b (fig.17). Determinăm punctul C- mijlocul segmentului AB. Construim LGP, egal depărtate de la dreptele paralele a și b; acesta va fi o dreaptă c, care trece prin punctul C, paralelă la dreptele a și b. Construim LGP, care satisface condiției 2). Acesta va fi un cerc $\omega(M, \frac{d}{2})$. Notăm punctul O_1 de intersecție al cercului ω cu dreapta c.

Construim cercul $\omega_1(O_1, O_1M)$. Acest cerc reprezintă o soluție a problemei.

Demonstrația. Cercul ω_1 este tangent la dreptele a și b, așa cum distanțele centrului O_1 de la aceste drepte sunt aceleași și egale cu $\frac{d}{2}$. Acest cerc trece și prin punctul M.

Cercetarea. Sunt posibile trei cazuri.

1. Punctul M este situat între dreptele a și b. În acest caz există două soluții: $\omega_1(O_1, O_1M)$ și $\omega_2(O_2, O_2M)$. Alte soluții nu există, deoarece dacă ar exista trei cercuri, atunci centrele lor O_1, O_2 și O_3 trebuie să aparțină dreptei c. Pe de altă parte, noi ar trebui să avem $O_1M = O_2M = O_3M = AC$, adică punctele O_1, O_2 și O_3 ar trebui să aparțină unui cerc(M, AC)-contrazicere.
2. Punctul M aparține uneia din sreptele a sau b. În acest caz există o singură soluție.
3. Punctul M este situat înafara fâșiei determinate de dreptele a și b. În acest caz problema nu are soluții.

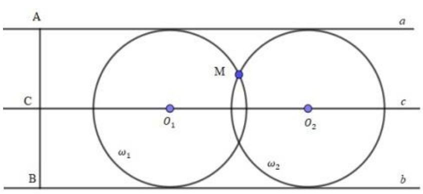


Figura 16

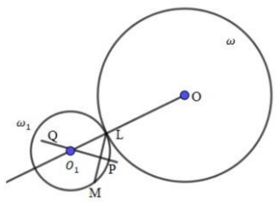


Figura 17

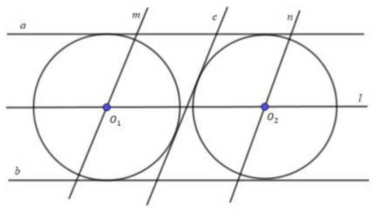


Figura 18

9. Printr-un punct dat M de construit un cerc, tangent la cercul dat ω în punctul $L\epsilon\omega$.

Soluție. Fie ω_1 cercul căutat. Deoarece punctul de tangență a două cercuri aparține dreptei ce trece prin centrele acestor cercuri, urmează că centrul cercului ω_1 aparține dreptei OL.Deoarece $L, M \in \omega_1$,urmează că centrul cercului ω_1 aparține mediatoarei PQ a segmentului LM. Prin urmare, centrul O_1 este punctul de intersecție a dreptelor OL și PQ.

Așa dar, pentru a rezolva problema dată, trebuie să construim semidreapta OL, mediatoarea segmentului LM și la intersecția $OL \cap LM$ să determinăm centrul O_1 a cercului căutat, iar O_1M va fi raza acestui cerc. Efectuând aceste construcții obținem $|O_1M| = |O_1L|$ ca oblice, ce au proiecții egale. Prin urmare, cercul $\omega_1(O_1, O_1M\ )$ va trece prin punctele L, M și va fi tangent la cercul dat ω, deoarece distanța $|O_1O|$ este egală cu suma razelor. Așa cum, centrul O_1 reprezintă intersecția a două drepte, urmează că problema are o soluție, sau nu are soluție. Problema nu are soluție în cazul când $(ML) \perp (OL)$. Dacă $L \equiv M$ problema are o infinitate de soluții.

10. De construit un cerc tangent la trei drepte date .

Soluție. Pot avea loc următoarele cazuri:

Cazul I. Două drepte sunt paralele, iar a treia dreaptă intersectează aceste două drepte paralele.

Fie dreptele a și b sunt paralele, iar dreapta c intersectează aceste drepte. Pentru ca cercul să fie tangent la dreptele a și b, este necesar ca centrul acestui cerc să aparțină dreptei l paralelă la dreptele a și b și situată la distanțele $\frac{d}{2}$ de la aceste drepte, unde d este distanța dintre dreptele a și b.Pentru ca cercul să fie tangent la dreapta c, trebuie ca centrul cercului să aparțină la două drepte m, n paralele la dreapta c și situate la distanța $\frac{d}{2}$ de la dreapta c. Astfel determinăm punctele O_1 și O_2, care satisfac ambelor condiții. În acest caz cercurile ω_1 și ω_2 (fig.) sunt soluțiile problemei.

Cazul II. Dreptele a și b nu sunt paralele, iar dreapta c intersectează ambele drepte a, b. În acest caz problema iarăși are două soluții. Centrele cercurilor căutate sunt determinate de intersecțiile bisectoarelor unghiurilor AKT, KTC și unghiurilor BKT, KTB. Acestea sunt punctele O_1 și O_2. (fig.)

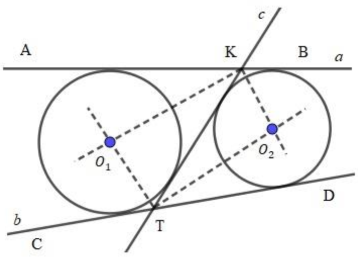


Figura 19

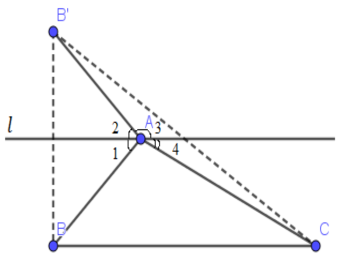


Figura 20

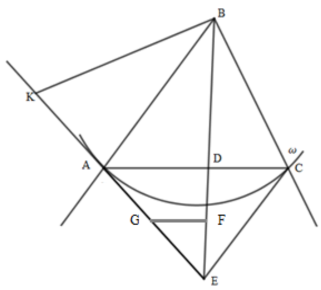


Figura 21

Cazul III. Dacă dreptele a, b și c sunt paralele între ele, atunci problema nu admite soluții.

11. De construit triunghiul ABC fiind date baza $BC\ =\ a$. înălțimea $AH\ =\ h$ și diferența unghiurilor de la bază $\widehat{B}\ - \widehat{C}\ = \varphi$.Soluție. La rezolvarea acestei probleme este bine venită metoda simetriei în raport cu o dreaptă. Să admitem că problema este rezolvată și triunghiul ABC este triunghiul căutat. Fie punctul B' este simetric cu punctul B în raport cu dreapta l, dusă prin punctul A, paralel cu latura BC.Notăm unghiurile cum este indicat în Fig. 20.

Evident, $\hat{2} = \hat{1} = \hat{B}$ şi deci, $\hat{3} = 180° - \widehat{B}$. Deoarece $\hat{4} = \hat{C}$, atunci $\widehat{B'AC} = \hat{3} + \hat{4} = 180° + \hat{C} - \hat{B} = 180° - \varphi$. Aşa dar, $\widehat{B'AC} = 180° - \varphi$. Ultima egalitate ne permite să rezolvăm problema.

Construcția.

1. Construim $BC = a$;
2. $l \,||\, BC$ la distanta h;
3. $B' = S_l(B)$;
4. Construim arcul de cerc ω din toate punctele căruia segmentul $B'C$ se vede sub unghiul $180° - \varphi$;
5. $\omega \cap l = \{A\}$;
6. ΔABC - cel căutat.

Demonstrația rezultă nemijlocit din construcție. Problema întotdeauna are o singură soluție pentru $\varphi < 180°$.

12. De construit triunghiul isoscel, fiind dată latura laterală a şi suma s a bazei cu înălțimea.

Soluție. Fie în triunghiul ABC(Fig.22) $|AB| = |BC| = a$ şi $|BD| + |AC| = s$. Problema dată se reduce la determinarea punctului A. Întroducem în desen suma dată. Pentru aceasta depunem pe semidreapta *[BD)* punctul E astfel încât $|DE| = |AC|$. Evident, $|DE| = 2|AD|$ şi atunci forma triunghiului ADE devine cunoscută. Dacă în unghiul AED vom construi arbitrar $[GF]||[AD]$, vom obține $|FE| = |2GF|$. Prin urmare, pentru a rezolva problema construim un unghi drept arbitrar GFE, depunem $|FE| = |2GF|$, $|EB| = s$, iar din punctul B descriem un cerc $\omega(B, a)$. Cercul ω va intersecta semidreapta $[EG)$. în punctul A, iar semidreapta $[AD)$ în punctul C. Triunghiul ABC este cel căutat. Problema admite o singură soluție in conditia ca $|AB|$ să nu fie mai mică decât lungimea perpendicularei $|BK|$.

13. De construit triunghiul ABC, ştiind raportul $a : b$, C si r.

Rezolvare. Așa cum în triunghiul căutat este dat unghiul şi raportul laturilor acestui unghi, atunci neglijând ultima condiție (raza cercului înscris) se poate de construit un triunghi asemenea cu cel căutat. Pentru aceasta pe laturile unghiului dat C (fig. 22) depunem segmentul $[CD]$ cu lungimea egala cu suma lungimilor a cărorva m segmente și segmentul $[CE]$ cu lungimea egala cu suma lungimilor a n segmente de aceiaşi lungime şi unim punctele D, E.

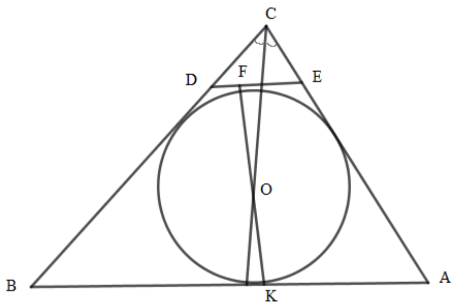


Figura 22

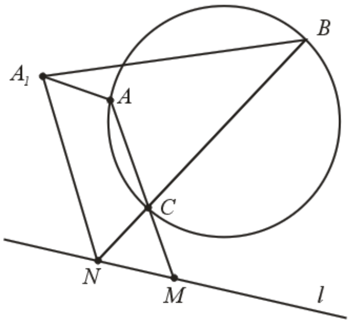


Figura 23

Triunghiul CDE este asemenea cu triunghiul căutat, deoarece ele au cîte un unghi congruient şi laturile proporţionale la acest unghi. Dacă vom intersecta unghiul C cu drepte paralele la DE vom obţine triunghiuri asemenea cu triunghiul căutat, dar cu diferite raze ale cercurilor înscrise. Din toate aceste triunghiuri, doar unul va avea raza cercului înscris egală cu r. Centrul cercului căutat se determină ca punctul bisectoarei unghiului C situat la distanţa r de la dreptele CD şi CE. Cunoscând centrul cercului putem determina ΔABC. Pentru aceasta trebuie de construit $OF \perp DE$ (pe semidreapta $[FO)$) de depus $|OK| = r$ şi prin punctul K de construit o dreaptă perpendiculară la KF (paralelă la DE) care va intersecta laturile unghiului C în punctele B şi A. Triunghiul *BAC* este triunghiul căutat. Problema în totdeauna admite o singură soluție.

13. Este dat un cerc ω, două puncte *A* și *B* pe acest cerc și o dreaptă l . Pe cercul ω de construit așa un puct *C* încât dreptele *AC* și *BC* să taie pe dreapta *l* un segment *[MN]* de lungime *m*.

Soluție. Să presupunem că problema este rezolvată și punctul *C* este cel căutat (fig. 23). Translăm punctul *A* paralel la dreapta *l* în punctul A_1 la distanța *m*. Unim punctele *A* și *N*. Atunci figura AA_1NM este un paralelogram deoarece $|AA_1| = |NM|$ și $[AA_1]||[NM]$. Prin urmare $\hat{A} = \widehat{N} = \alpha$, unde α este mărimea unghiului înscris în cercul ω , care se sprijină pe coarda *AB*.

Construcția.

1. Translăm punctul *A* paralel la dreapta *l* la distanța *m* . Fie A_1 este imaginea punctului *A* ;
2. Pe segmentul A_1B construim locul geometric de puncte din care segmentul A_1B se vede sub unghiul α;
3. Fie *N* este unul din punctele de intersecție a acestui loc geometric cu dreapta *l* ;
4. Punctul *C* este punctul de intersecție a cercului ω cu segmentul *BN*.

Cercetarea. În dependență de mărimea și poziția elementelor date problema poate avea până la patru soluții, deoarece translația paralelă a punctului *A* poate fi efectuată în două direcții.

14. De construit triunghiul ABC, dacă sunt date înălțimile h_a, h_b și h_c.

Soluție. Se știe că $a = \frac{25}{\text{ha}}$, $b = \frac{25}{\text{hb}}$ și $c = \frac{25}{\text{hc}}$.

Prin urmare,

$a: b: c = \frac{1}{\text{ha}} : \frac{1}{\text{hb}} : \frac{1}{\text{hc}} = h_b\, h_c : h_a\, h_c : h_a\, h_b$, sau $a: b: c = \frac{h_b\, h_c}{m} : \frac{h_a\, h_c}{m} : \frac{h_a\, h_b}{m}$, unde m este un număr oarecare pozitiv.

Să notăm $a_1 = \frac{h_b\, h_c}{m}$, $a_2 = \frac{h_a\, h_c}{m}$, $a_3 = \frac{h_a\, h_b}{m}$ și obținem: $a: b: c = a_1: b_1: c_1$.

Construim un triunghi $A_1B_1C_1$ cu laturile a_1, b_1 și c_1 . Acest triunghi $A_1B_1C_1$ va fi asemenea cu triunghiul căutat cu coeficientul de asemănare $k = h_a: h_{a_1}$. Evident, problema întotdeauna are o singură soluție, dacă poate fi construit triunghiul $A_1B_1C_1$.

Teoria și practica învățării prin descoperire (discovery learning) reprezintă un ansamblu de procese foarte complexe, bazate pe proceduri euristice și de cercetare care-i determină pe elevi (studenți) să descopere prin ei însăși noi adevăruri, să rezolve însăși probleme. Astfel învățarea prin descoperire denotă un mai mare grad de eficiență intelectuală, cultivă o motivație interioară a învățării.

Bibliografie

1. Calmuțchi L. Geometria pe care am pierdut-o. Materialele conferinței internaționale Matematica fără frontiere. Focșani, 2018. pp.28-34.
2. Calmuțchi L., Șumila Iu. Maxime și minime geometrice. Conferința Științifico-didactică națională cu participare internațională „Probleme actuale ale didacticii științelor reale”, Chișinău, 11-12 mai, 2018. p. 44-49.
3. Calmuțchi L., Afanas D. Algebra ajută geometria. Învățămînt superior,tradiții;perspective Materialele conferinței naționale cu participare internațională,28-29 Septembrie 2018.V.1.Științe Exacte și ale Naturii și Didactica Științelor Exacte și ale Naturii. Chișinău, 2018. pp.101-107.
4. Cerghit I. Metode de învățământ. Iași: Polirom, 2006.
5. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение. Москва, Учпедгиз, 1957. 266 с.
6. Vîrtopeanu I., Vîrtopeanu O. Geometrie plană pentru gimnaziu și liceu. Tipuri de probleme, metode și tehnici de rezolvare. Craiova: Editura SIBILA, 1994. 265 p.
7. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости. Москва, Учпедгиз, 1957. 266 с.
8. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. Геометрия. Москва: Просвещение, 1994.
9. Погорелов А. В. Геометрия 6-7. Москва: Просвещение, 1984.
10. Энциклопедия элементарной математики. Т. IV, Геометрия. Москва: Государственное издателъство физико-математической литературы, 1963.