CZU: 37.02:514

METODOLOGIA REZOLVĂRII PROBLEMELOR GEOMETRICE DE OPTIMIZARE

Ilie LUPU, doctor habilitat, profesor universitar, UST

Rezumat. În articol este propus un algoritm de rezolvare a problemelor geometrice de optimizare, care servește ca bază pentru diverse metodologii și procedee de rezolvare a acestor probleme.

Cuvinte cheie: metodologie, algoritm, probleme, derivata, maximum, minimum.

METHODOLOGY OF SOLVING GEOMETRICAL OPTIMIZATION PROBLEMS

Abstract. In the article is proposed an algorithm for solving geometrical optimization problems which service as a basis for various methodologies and procedures for solving these problems.

Key words: methology, algorithm, problems, derivate, maximum, minimum.

Rezolvarea de probleme reprezintă culmi ale performanții cognitive. Învățarea prin rezolvarea de probleme (problem – solving) este o variantă a euristicii, o altă modalitate mai complexă de aplicare a teoriei învățării prin descoperire. Deci prima și cea mai importantă sarcină a profesorilor de matematică este de a acorda atenția cuvenită metodologiei rezolvării problemelor.

O strategie de rezolvare a unei probleme reprezintă un ansamblu de reguli extrase din volumul de cunoștințe însușite anterior.

La rezolvarea problemelor geometrice de optimizare există situații în care regulile concrete ale rezolvării nu sunt cunoscute de elev (student), nefiind încă descoperite. În aceste cazuri este necesar de a găsi un algoritm, bazat pe metode și procedee didactice.

Algoritmul propus constituie un program, o procedură deterministă, reprezentând un sistem de operații structurate și efectuate într-o anumită succesiune logică obligatorie, utilizată pentru rezolvarea problemelor geometrice de optimizare.

Inepuizabile probleme prețioase de maxim și minim se conțin în străfundul cele mai antice din științele matematice – în geometrie. Probleme geometrice de maxim și minim se întâlnesc la toți cei 3 matematicieni antici remarcabili: Euclid, Arhimede, Apolloniu. Meritele și omagiul lor au fost recunoscute de cei mai mari matematicieni ai epocii Renașterii – Viviani, Torricelli, Fermat și alții.

Interesul către aceste probleme s-a păstrat și până în zilele noastre.

În rezolvarea problemelor geometrice de calcularea a celei mai mari sau celei mai mici valori ne vom conduce de următorul algoritm:

1. Evidențiem mărimea de optimizare (adică mărimea, pentru care urmează să calculăm cea mai mare sau cea mai mică valoare) și o notăm printr-o literă y (sau s, p, r, R etc. în dependență de enunțul problemei).
2. Una din mărimile necunoscute (latură, unghi etc.) o numim variabilă independentă și o notăm prin x; stabilim limitele reale de variației ale lui x.

3. Pornind de la condițiile concrete ale problemei date, exprimăm *y* prin *x* și prin datele cunoscute ale ei (etapa de rezolvare geometrică a problemei).
4. Pentru funcția obținută în etapa precedentă $y = f(x)$ calculăm cea mai mică sau cea mai mare valoare (în dependență de condițiile problemei) pe domeniu de variație a lui *x*.
5. Interpretăm rezultatul din punctul 4 pentru problema concretă dată.

În primele 3 etape compunem modelul matematic, adică modelul analitic al problemei geometrice date. Deseori succesul rezolvării depinde de alegerea chibzuită a variabilei independente. Este important de a exprima analitic *y* prin *x* relativ ușor.

La etapa a patra modelul matematic compus de cele mai multe ori se cercetează cu ajutorul calculului diferențial, iar uneori prin metode elementare.

În procesul cercetării însăși problema geometrică, care a servit drept punct inițial pentru modelul matematic nu ne interesează. Și numai atunci, când terminăm rezolvarea problemei în cadrul modelului matematic alcătuit, rezultatul obținut îl interpretăm pentru problema geometrică inițială.

Exemplul 1. Laturile laterale și una din bazele unui trapez sunt egale cu 15 cm. Să calculăm lungimea bazei trapezului, care are cea mai mare arie.

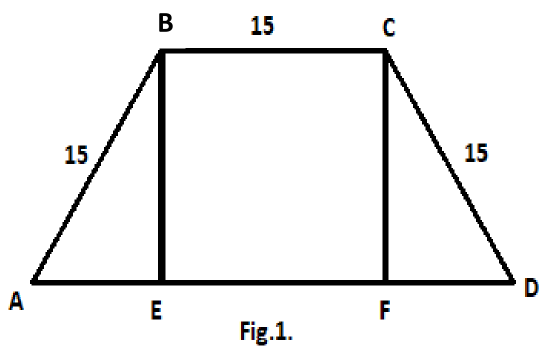

Fig.1.

Mărimea de optimizare este aria *S* a trapezului. Notăm prin *x* baza *AD* a trapezului *ABCD* (fig.1).Determinăm limitele reale ale variabile independente *x*.

Dacă cea mai mică valoare a lui *x* este egala cu 15cm, atunci trapezul degenerează într-un pătrat cu latura de 15cm. Dacă cea mai mare valoare a lui <u>x</u> este egala cu 45cm, atunci trapezul degenerează într-un segment de dreaptă cu lungimea de 45cm.

Astfel limitele reale ale variabilei independente introduse sunt $15 \le x \le 45$.

Exprimăm aria *S* a trapezului *ABCD* prin *x* și 15: $EF = 15$, $AE = FD$, $AE = \frac{x-15}{2}$.

Din triunghiul dreptunghic *AEB*, $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{225 - \frac{(x-15)^2}{4}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{900 - (x-15)^2}$.

Deci aria trapezului *ABCD* va fi

$$S = \frac{x+15}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{900 - (x-15)^2} = \frac{1}{4} \times (x+15) \times \sqrt{900 - (x-15)^2}.$$

Calculăm cea mai mare valoare a funcției $S = \frac{1}{4} \times (x+15) \times \sqrt{900 - (x-15)^2}$ pe segmentul [15;45].

Avem $S' = \frac{1}{2} \times \frac{-x^2+15x+450}{\sqrt{-x^2+30x+675}}$. Punctele critice ale funcției S le aflăm rezolvând ecuația $S' = 0$ sau ecuația $-x^2 + 15x + 450 = 0$, care are soluțiile x_1= -15 și x_2=30. Observăm că numai x = 30 aparține (15;45).

Trecând prin punctul x = 30, derivata $S' = \frac{1}{2} \times \frac{(x+15)(30-X)}{\sqrt{-X^2+30X+675}}$ își schimbă semnul de la plus la minus, deci pentru x = 30 funcția S obține cea mai mare valoare.

Astfel, cea mai mare arie are trapezul cu baza AD = 30cm. Acest trapez este echilateral cu unghiul de la baza mare egal cu 60°.

Răspuns: 30 cm.

Exemplul 2. În triunghiul dreptunghic dat să se înscrie un dreptunghi, care are cu dreptunghiul dat unghiul drept comun și cea mai mică diagonală.

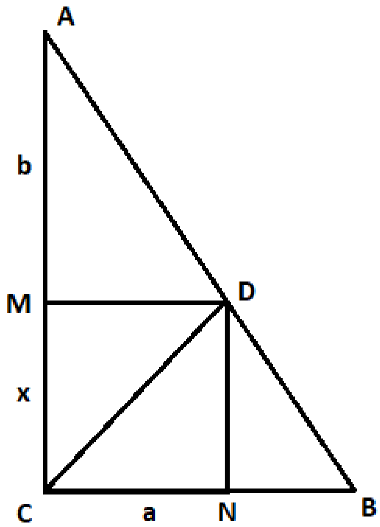

Fig.2.

Mărimea de optimizare este lungimea diagonalei l a dreptunghiului înscris în triunghiul dreptunghic *ACB.*

Notăm prin x latura *MC* a dreptunghiului *CMDN* (fig.2). Dacă cea mai mica valoare a lui x este egală cu zero, atunci dreptunghiul degenerează în segmentul *CB*, iar cea mai mare valoare este *b*, atunci dreptunghiul degenerează în segmentul *CA*. Deci, $0 \le x \le b$.

Exprimăm lungimea l a diagonalei dreptunghiului prin *x*, *a* și *b*.

Avem: *CB* = *a*, *CA* = *b*, *MC* = *x*, *MA* = *b* - *x*.

Triunghiurile *ACB* și *AMD* sunt asemenea, de unde rezultă că $\frac{CB}{MD} = \frac{CA}{MA}$ sau $\frac{a}{MD} = \frac{b}{b-x}$, de aici $MD = \frac{a(b-x)}{b}$.

Din ΔCMD avem $CD^2 = l^2 = x^2 + \frac{a^2(b-x)^2}{b^2}$ sau $l = \frac{1}{b} \cdot \sqrt{b^2 \times x^2 + a^2(b-x)^2} =$
$= \frac{1}{b} \cdot \sqrt{(a^2+b^2)x^2 - 2a^2bx + a^2b^2}$.

Funcția l va avea cea mai mica valoare în aceleași puncte, în care trinomul pătrat $g(x) = (a^2+b^2)x^2 - 2a^2bx + a^2b^2$ va obține cea mai mica valoare. Observăm că $a^2 + b^2 > 0$, deci trinomul $g(x)$ obține cea mai mică valoare în punctul $x = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$. Deci și funcția $l = \frac{1}{b}\sqrt{g(x)}$ va obține cea mai mică valoare tot în punctul $x = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$. Astfel cea mai mică diagonală va avea dreptunghiul cu laturile $MC = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$ și $MD = \frac{a}{b}(b-x) = \frac{a}{b}(b - \frac{a^2b}{a^2+b^2}) = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$.

Obținem $l = CD = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{c}$. Însă și înălțimea ΔACB, dusă din vârful unghiului drept de asemenea este egala cu $\frac{ab}{c}$.

Deci, cea mai mica lungime a diagonalei dreptunghiului este egală cu lungimea înălțimii , dusă din vârful unghiului drept pe ipotenuză.

Răspuns: $\frac{a^2b}{a^2+b^2}$; $\frac{ab^2}{a^2+b^2}$.

Exemplul 3. Din toate triunghiurile isoscele cu mediana constantă dusă la latura laterală să aflăm triunghiul cu cea mai mare arie. Ce mărime are unghiul de la vârf al acestui triunghi?

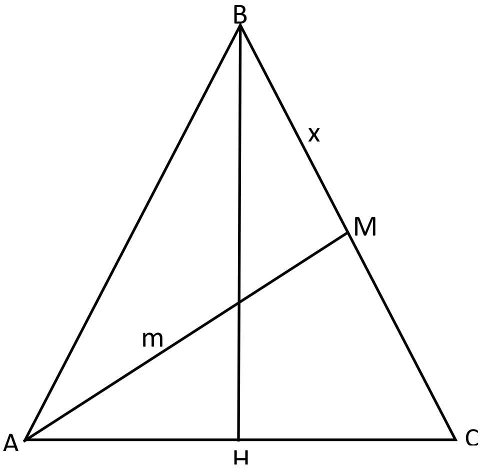

fig.3

Mărimea de optimizare este aria S a triunghiului. Notăm prin x latura laterală a triunghiului isoscel ABC (fig.3). Este evident, că $m < x < 2m$, unde m este lungimea medianei. Exprimăm aria S a triunghiului ABC prin x și m. Avem $AM = m$, $AB = BC = x$, $m^2 = \frac{x^2+AC^2}{2} - \frac{x^2}{4}$, de unde $AC = \sqrt{\frac{4m^2-x^2}{2}}$; $BH \perp AC$, $AH = HC = \frac{AC}{2}$, $AH^2 = \frac{4m^2-x^2}{8}$.

Din $\Delta\, ABC$ rezultă că $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{x^2 - \frac{4m^2-x^2}{8}}$.

Aria triunghiului

$$S = \frac{1}{2}AC \times BH = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{4m^2-x^2}{2}} \times \sqrt{x^2 - \frac{4m^2-x^2}{8}} = \frac{1}{8}\sqrt{(4m^2-x^2)(9x^2-4m^2)}.$$

Funcția S obține cea mai mare valoare în aceleași puncte, în care obține cea mai mare valoare funcția $g(x) = (4m^2-x^2)(9x^2-4m^2) = -9x + 40m^2x^2 - 16m^4 = -\left(3x^2 - \frac{20m^2}{3}\right)^2 + \frac{256m^4}{9}$.

Funcția $g(x)$ va avea cea mai mare valoare egală cu $\frac{256m^4}{9}$, când $3x^2 - \frac{20m^2}{3} = 0$ sau $x = \frac{m\sqrt{20}}{3}$. Astfel funcția S obține cea mai mare valoare pentru $x = \frac{m\sqrt{20}}{3}$.

Deci, dintre toate triunghiurile isoscele cu mediana m dusă la latura laterală, cea mai mare arie are triunghiul isoscel cu latura laterală egală cu $\frac{m\sqrt{20}}{3}$.

Pe de altă parte, aria acestui triunghi este egală cu $S = \frac{1}{2}x^2 \times sin\alpha = \frac{1}{2} \times \frac{20\,m^2}{9} sin\alpha$, unde α este unghiul de la vârful lui. Deci $\frac{2m^2}{3} = \frac{10m^2}{9} sin\alpha$, de unde $sin\alpha = \frac{3}{5}$. Prin urmare, $\alpha = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$.

Răspuns: Latura laterală a triunghiului isoscel este egală cu $\frac{m\sqrt{20}}{3}$; unghiul de la vârf este egal cu arcsin $\left(\frac{3}{5}\right)$.

Exemplul 4. Să demonstrăm că din toate triunghiurile isoscele, înscrise într–o circumferință dată, triunghiul echilateral are: a) cea mai mare arie; b) cel mai mare perimetru.

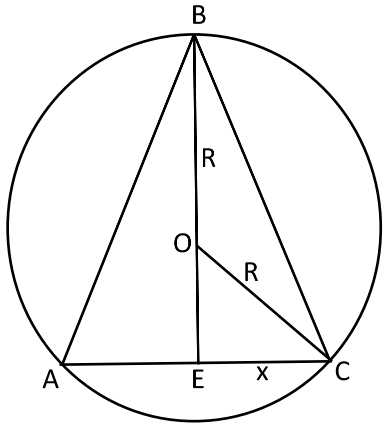

fig.4

a) Mărimea de optimizare este aria S a triunghiului isoscel. Notăm $EC = x$ (fig.4). Este evident, că $O \leq x \leq R$. Exprimăm aria S a triunghiului ABC prin x și R. Avem $OB = OC = R,\quad EC = x,\quad AB = BC,\quad BE \perp AC.$ Din triunghiul dreptunghic OEC avem $OE^2 = R^2 - x^2$ sau $OE = \sqrt{R^2 x^2}$.

Obținem $BE = R + OE = R + \sqrt{R^2 - x^2}$, $S = \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \left(R + \sqrt{R^2 - x^2}\right) = x(R + \sqrt{R^2 - x^2})$, $S' = \frac{R\sqrt{R^2-x^2}+R^2-2x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

Punctele critice ale funcției S le vom găsi, rezolvând ecuația $S^{'} = 0$ sau ecuația

$$R\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow R\sqrt{R^2 - x^2} = 2x^2 - R^2.$$

În domeniul $\frac{R}{\sqrt{2}} \leq x \leq R$ această ecuație este echivalentă cu ecuația

$$R^2(R^2 - x^2) = 4x^4 - 4R^2x^2 + R^4 \Leftrightarrow 4x^4 - 3R^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(4x^2 - 3R^2) = 0,$$

de unde $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{R\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ aparține $(\frac{R}{\sqrt{2}}; R)$.

Calculăm valorile funcției S în punctele $\frac{R}{\sqrt{2}}$, $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, R. Avem $S\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{R^2}{2}(\sqrt{2} + 1)$; $S\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$; $S(R) = R^2$. Deoarece $\frac{3\sqrt{3}}{4} > \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ rezultă că cea mai mare valoare a funcției S este egală cu $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ pentru $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Prin urmare, $AC = 2x = R\sqrt{3}$. Din ΔBEC rezultă

$$BC^2 = BE^2 + CE^2 = \left(R + \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 + x^2 = \left(R + \sqrt{R^2 - \frac{3R^2}{4}}\right)^2 + \frac{3R^2}{4} = 3R^2.$$

Deci $BC = R\sqrt{3}$. Deoarece $AB = BC = R\sqrt{3}$, rezultă că acest triunghi este echilateral.

b) Mărimea de optimizare este perimetrul P al triunghiului. Utilizăm aceleași notații ca și în punctul a).

Avem: $AC = 2x$, $AB = BC = \sqrt{\left(R+\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 + x^2}$. Deci, $P = 2x + 2\sqrt{\left(R+\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 + x^2} = 2x + 2\sqrt{2R^2 + 2R\sqrt{R^2-x^2}}$. Calculăm $P' = \frac{\sqrt{(R^2-x^2)\left(2R^2+2R\sqrt{R^2-x^2}\right)}-Rx}{\sqrt{(R^2-x^2)\left(2R^2+2R\sqrt{R^2-x^2}\right)}}$.

Punctele critice le vom afla rezolvând ecuația $P' = 0$ sau ecuația $\sqrt{(R^2-x^2)\left(2R^2+2R\sqrt{R^2-x^2}\right)} - Rx = 0$,

de unde $(R^2-x^2)\left(2R^2+2R\sqrt{R^2-x^2}\right) = R^2x^2$

sau $2(R^2-x^2)\sqrt{R^2-x^2} = 3Rx^2 - 2R^3$.

În domeniul $R\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq R$, substituind $x^2 = t$, obținem ecuația $4(R^2-t)^3 = 9R^2t^2 - 12R^4t + 4R^6$ sau $4t^3 = 3R^2t^2$, de unde $t = 0$, $t = \frac{3R^2}{4}$.

Deci avem $x = 0$ și $x = \pm\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Din aceaste puncte critice numai $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ aparține $\left(R\sqrt{\frac{2}{3}}; R\right)$. Calculăm valorile funcției P în punctele $R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ și R. Avem $P\left(R\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2R}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2} + \sqrt{2+\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right)$; $P\left(R\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3R\sqrt{3}$; $P(R) = 2R(\sqrt{2}+1)$.

Dintre aceste numere cel mai mare este $3R\sqrt{3}$, care se obține pentru $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Astfel $AC = 2x = R\sqrt{3}$; $AB = BC = R\sqrt{3}$. Rezultă că triunghiul dat este echilateral.

Exemplul 5. Să calculăm înălțimea și raza bazei unui cilindru circular drept cu cel mai mare volum, înscris într – o sferă de raza R (Problema lui Kepler).

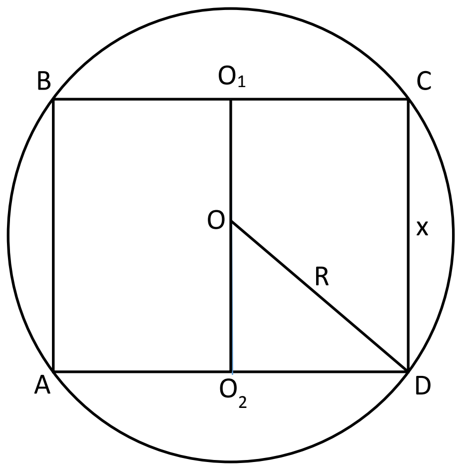

fig. 5

Mărimea de optimizare este volumul V al cilindrului. Notăm $DC = x,\ 0 \leq x \leq 2R$. Exprimăm volumul V prin x și R. Fie dată o sferă de raza R cu centrul în punctul O și în această sferă înscriem un cilindru, înălțimea căruia este x. Atunci

$$V = \pi \cdot O_2D^2 \cdot x.$$

Notăm O_1 și O_2 respectiv centrele bazelor cilindrului. O_1O_2 este perpendiculară pe planul bazei și trece prin centrul sferei. Prin dreapta O_1O_2 ducem un plan, care taie din sferă un cerc de raza R cu centrul în punctul O, iar din cilindru un dreptunghi $ABCD$(fig. 5).

Avem $DC = AB = x,\ OO_2 = \frac{x}{2},\ OD = R$. Din ΔOO_2D avem $R = (OD)^2 = R^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}(4R^2 - x^2)$. Deci $V = \pi \cdot \frac{1}{4}(4R^2 - x^2) \cdot x = \frac{\pi}{4}(4R^2x - x^3)$.

Problema se reduce la calcularea valorilor lui x, pentru care funcția $V = \frac{\pi}{4}(4R^2x - x^3)$ obține cea mai mare valoare pe $[O; 2R]$.

Calculăm derivata $V' = \frac{\pi}{4}(4R^2x - x^3)$. Punctele critice sunt $x = -\frac{2R}{\sqrt{3}}$ și $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, dintre care numai $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ aparține $(O; 2R)$.

Calculăm valorile funcției V în punctele $O,\ \frac{2R}{\sqrt{3}},\ 2R$. Obținem $V(0) = 0$, $V\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi R^2}{3\sqrt{3}}$, $V(2R) = 0$. Deci funcția V obține cea mai mare valoare în punctul $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Astfel, cel mai mare volum are cilindrul cu înălțimea $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ și raza bazei $O_2D = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \frac{4R^2}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8R^2}{3}} = R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Răspuns: $\frac{2R}{\sqrt{3}}$; $R\sqrt{\frac{2}{3}}$. Kepler a demonstrat că raportul dintre înălțimea acestui cilindru și diametrul bazei lui este egal cu $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exemplul 6. Să calculăm înălțimea unui con cu cel mai mic volum, circumscris emisferei de raza R.

Mărimea de optimizare este volumul V a conului. Notăm $\angle OBC = x$ (fig.6), unde $O° \leq x \leq 90°$. Să exprimăm V prin R și prin funcțiile trigonometrice ale unghiului x. Avem: $OM = R, \angle OBC = x, \angle MOC = x$. Din ΔOMB rezultă $OB = \frac{R}{sinx}$; din ΔOMC avem $OC = \frac{R}{cosx}$. Calculăm volumul $V = \frac{1}{3}\pi \cdot OC^2 \cdot OB = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2}{\cos^2 x} \cdot \frac{R}{sinx} = \frac{2\pi R^3}{3 \sin 2x \cos x}$.

Să calculăm cea mai mică valoare a funcției V pe $[o; \frac{\pi}{2}]$. Punctele critice ale funcției V le calculăm, rezolvând ecuația $V' = 0$ sau ecuația $\frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{\cos x(1 - 3\sin^2 x)}{\sin^2 2x \cdot \cos^2 x} = 0$.

Ecuația $1 - 3\sin^2 x = 0$ are soluțiile $x = (-1)^n \arcsin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + n\pi,\ n \in Z$ dintre care numai $x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ aparține $\left(o; \frac{\pi}{2}\right)$.

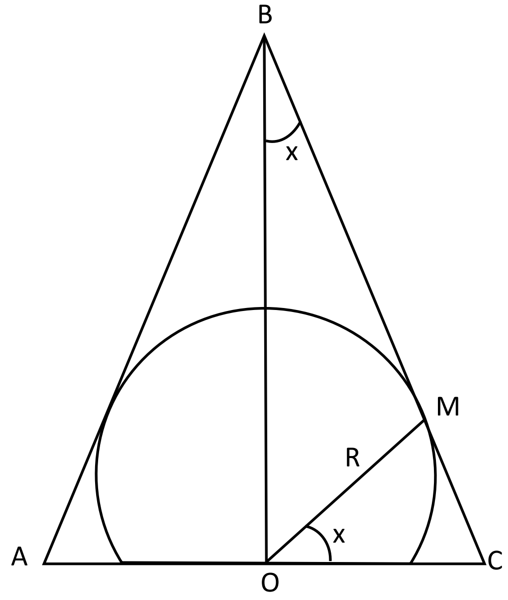

fig. 6

Se observă ușor că pe $\left(0; \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ derivata $V' < 0$, deci pe acest interval funcția V descrește, iar pe $\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\pi}{2}\right)$ derivata $V' > 0$, rezultă că pe acest interval funcția V crește. Astfel în punctul $x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ funcția V obține pe $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ cea mai mică valoare.

Deci înălțimea conului cel mai mic volum, circumscris emisferei de raza R, este egală cu $OB = \frac{R}{\sin x} = \frac{R}{\sin(\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}})} = \frac{R}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = R\sqrt{3}$.

Răspuns: $R\sqrt{3}$.

Exemplul 7. Suma pătratelor lungimilor tuturor muchiilor unei piramide triunghiulare regulate este egală cu P. Să aflăm cea mai mare valoare a ariei suprafeței laterale a acestei piramide.

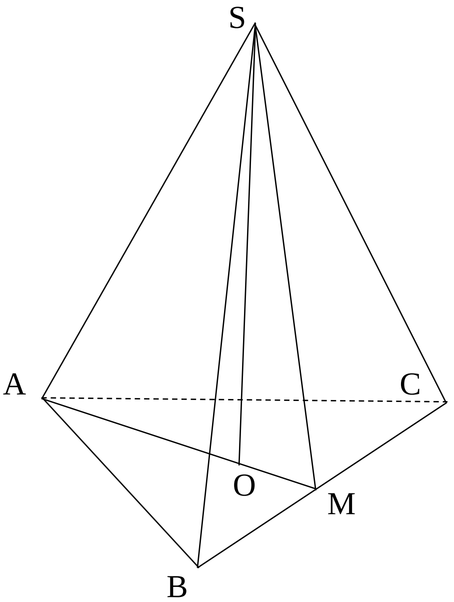

fig.7.

Mărimea de optimizare este aria S a suprafeței laterale a piramidei. Notăm $BC = x$. Să exprimăm S prin P și x. Avem $BC = x$, $3BC^2 + 3SC^2 = P$ sau $3x^2 + 3SC^2 = P$, de unde $SC^2 = \frac{P-3x^2}{3}$. Din triunghiul dreptunghic SMC, $SM^2 = SC^2 - MC^2 = \frac{P-3x^2}{3} - \frac{x^2}{4}$, de unde $SM = \sqrt{\frac{4P-15x^2}{12}}$ (fig.7). Aria suprafeței laterale a piramidei regulate $S = 3 \cdot \frac{1}{2} BC \cdot SM = \frac{3}{2} x \cdot \sqrt{\frac{4P-15x^2}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{4} x \cdot \sqrt{4P - 15x^2}$. Domeniul de definiție al funcției S îl vom determina din relația:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 4P - 15x^2 \geq 0, de\ unde\ 0 \leq x \leq \frac{2\sqrt{P}}{\sqrt{15}}. \end{cases}$$

Punctele critice ale funcției S le vom calcula, rezolvând ecuația $S' = 0$ sau ecuația $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2P-15x^2}{\sqrt{4P-15x^2}}$, care are soluțiile $x_1 = -\sqrt{\frac{2P}{15}}$ și $x_2 = \sqrt{\frac{2P}{15}}$. Dintre aceste soluții numai $x = \sqrt{\frac{2P}{15}}$ aparține $\left(0; \frac{2\sqrt{P}}{\sqrt{15}}\right)$. Observăm ușor că pe $\left(0; \sqrt{\frac{2P}{15}}\right)$ derivata $S' = 0$, deci pe acest interval funcția S crește; pe $\left(\sqrt{\frac{2P}{15}}; \frac{2\sqrt{P}}{\sqrt{15}}\right)$ derivata $S' < 0$, deci pe acest interval funcția S descrește.

În punctul $x = \sqrt{\frac{2P}{15}}$ funcția S este continuă, deci în acest punct ea obține cea mai mare valoare.

Calculăm aria laterală a piramidei $SABC$: $S = \frac{\sqrt{3}}{4} x\sqrt{4P - 15x^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{2P}{15}} \cdot \sqrt{4P - 15 \cdot \frac{2P}{15}} = \frac{P\sqrt{5}}{10}$.

Răspuns: $\frac{P\sqrt{5}}{10}$.

Învățământul modern este un învățământ de calitate, de mare eficiență și, la această performanță, nu se poate ajunge decât cu profesori bine pregătiți din toate punctele de vedere, apți să stăpânească și o metodologie de lucru de mare eficiență.

Gradul de profesionalism didactic se apreciază prin capacitatea profesorului de a stăpâni un arsenal cât mai larg de metode, strategii de rezolvare a problemelor.

Bibliografie

1. Cerghit I. Metode de învățământ. Iași: Polirom, 2006.
2. Lupu I. Probleme de optimizare. Chișinău: Editura Lumina, 1993.
3. Говоров В. М. и др. Сборник конкурсных задач по математике. Москва: Наука, 1986.
4. Гусев В. А. и др. Практикум по решению математических задач. Москва: Просвещение, 1985.
5. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. Москва, 1986.