CZU: 372.851 DOI: 10.36120/2587-3636.v19i1.13-20

METODE EURISTICE ŞI METODE DE ÎNVĂŢARE PRIN DESCOPERIRE

Ilie LUPU, dr. hab., prof.univ., UST
https://orcid.org/0000-0003-1375-3071

Rezumat. În articol este descrisă esența învățării prin descoperire și utilizarea noilor metodologii didactice în studierea matematicii. Rolul crescând al științei matematice și informaticii în civilizația contemporană este însoțit de o dezvoltare fără precedent a educației științifice, devenind scopul principal al formației profesionale a generațiilor tinere de astăzi.
Cuvinte cheie: didactica matematicii, metode, educație științifică, strategii didactice, orientare metodologică.

HEURISTIC METHODS AND METHODS OF LEARNING THROUGH DISCOVERY

Abstract. The article describes the essence of learning through discovery and the use of new teaching methodologies in the study of mathematics. The increasing role of mathematical science and computer science in the contemporary civilization is accompanied by an unprecedented development of scientific education, becoming the main purpose of the professional formation of today's younger generations.
Keywords: mathematics didactics, methods, scientific education, didactic strategies, methodological orientation

A apărut necesitatea de reconsiderare a strategiilor didactice pentru a lichida discordanța între cerințele învățământului științific și insuficiența metodelor tradiționale practicate până nu demult.

Imperativul însușirii științei ne orientează să trecem de la metode cu caracter cvasi empiric la metode științifice, la absolutizarea modului de organizare a învățării școlare. Astfel, se dezvoltă puternic în prezent o nouă orientare metodologică, care asociază logica învățării prin acțiune logicii învățării prin descoperire, promovând o metodologie centrată pe învățarea prin descoperire, o metodologie de esență euristică, care reprezintă trecerea de la o „cunoaştere căpătată” la o „cunoaştere cucerită” prin efort personal, ceea ce reprezintă o nouă concepție didactică și necesită alte modalități de lucru.

Teoria și practica învățării prin descoperire (Discovery Learning) reprezintă o totalitate de procedee complexe, bazate pe proceduri euristice și de cercetare, care-i determină pe elevi să descopere ei înșiși noile cunoştințe și să rezolve ei înșiși probleme.

Astfel, metodelor de învățare prin descoperire le este specifică activitatea independentă de căutare și cercetare. Învățarea prin descoperire contribuie la dezvoltarea capacităților intelectuale ale elevilor, îi face mai eficienți în a le amplifica aptitudinile și capacitățile creatoare, fiind utilizată predarea-învățarea matematicii sub aspect formativ.

O problemă majoră, care stă în fața profesorilor de matematică, este de a-i învăța pe elevi să utilizeze informațiile asimilate și de a le mânui, de a schimba raportul dintre informație și metodologie în favoarea acesteia din urmă, prin *metodele euristice* bazate pe reflecție, pe gândire.

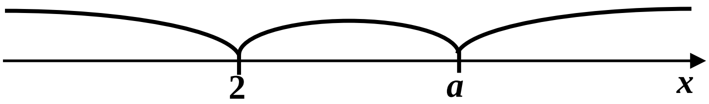
Metodologia euristică asigură activitatea intelectuală a elevului, stimulează capacitatea de rezolvare a problemelor, deoarece creativitatea și rezolvarea de probleme reprezintă culmi ale performanței cognitive.

Să utilizăm metode euristice la rezolvarea unor probleme/exerciții matematice, atribuite formulei *Learning by Doing* (a învăța făcând), învățând matematica și rezolvând probleme.

Exemplul 1. Să rezolvăm ecuația

$$|x-a|+3|x-2|=5$$

Fie $a>2$, atunci examinăm următoarele cazuri:



1) $x<2$, atunci ecuația dată ia forma $a-x+3(2-x)=5$, de unde $x=\frac{a+1}{4}$.

Să verificăm pentru care valori ale parametrului $a, x<2$: $\frac{a+1}{4}<2$, de unde $a<7$.

Astfel, pentru $2<a<7, x=\frac{a+1}{4}$.

2) $2\leq x<a, a-x+3(x-2)=5, x=\frac{11-a}{2}$.

Să determinăm valorile parametrului $a>2$, pentru care $2\leq x<a$:

$$2\leq \frac{11-a}{2}<a, \text{ de unde } \frac{11}{3}<a\leq 7.$$

Deci, pentru $\frac{11}{3}<a\leq 7, x=\frac{11-a}{2}$.

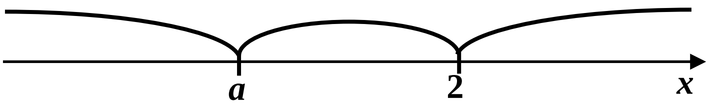
3) $x\geq a, x-a+3(x-2)=5, x=\frac{a+11}{4}$.

Să determinăm valorile parametrului $a>2$, pentru care $x\geq a$:

$$\frac{a+11}{4}\geq a, a\leq\frac{11}{3}.$$

Deci, pentru $2<a\leq\frac{11}{3}, x=\frac{a+11}{4}$.

Fie $a<2$. Vom examina următoarele cazuri.



1) $x<a, a-x+2(2-x)=5, x=\frac{a+1}{4}$.

Să verificăm pentru care valori ale parametrului $a<2, x<a$: $\frac{a+1}{4}<a, a>\frac{1}{3}$. Astfel, pentru $\frac{1}{3}<a<2, x=\frac{a+1}{4}$.

2) $a\leq x<2, x-a+3(2-x)=5, x=\frac{1-a}{2}$.

Să determinăm pentru care valori ale parametrului $a<2, a\leq x<2$:

$$a\leq\frac{1-a}{2}<2, \text{ de unde } -3<a<=\frac{1}{3}.$$

Deci, pentru $-3<a<=\frac{1}{3}, x=\frac{1-a}{2}$.

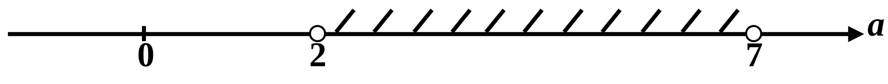
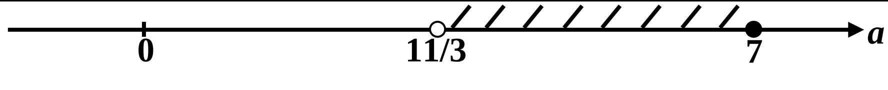
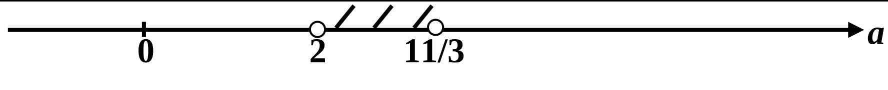
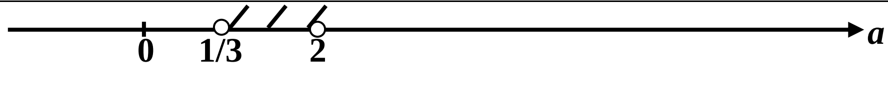
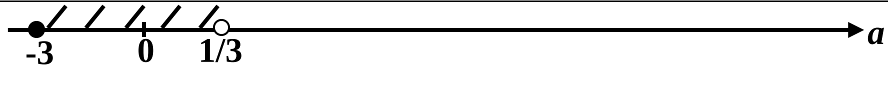
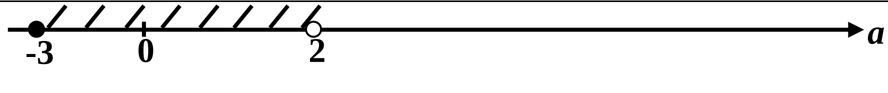
3) $x > 2, x - a + 3(x - 2) = 5, x = \frac{a+11}{4}$.

Să determinăm pentru care valori ale parametrului $a < 2, x \geq 2$:

$$\frac{a+1}{4} \geq 2, a \geq -3.$$

Deci, pentru $-3 \leq a < 2$, $x = \frac{a+11}{4}$.

4) Dacă $a = 2, 4|x - 2| = 5$, de unde $x = \frac{13}{4}, x = \frac{3}{4}$;

	$x = \frac{a+1}{4}$
	$x = \frac{11-a}{2}$
	$x = \frac{a+11}{4}$
	$x = \frac{a+1}{4}$
	$x = \frac{1-a}{2}$
	$x = \frac{a+11}{4}$

Răspuns: pentru $a = -3, x = 2$; pentru $-3 < a \leq \frac{1}{3}, x \in \left\{\frac{a+11}{4}; \frac{1-a}{2}\right\}$;

pentru $a = \frac{1}{3}, x = \frac{1}{3}$; pentru $\frac{1}{3} < a \leq 2, x \in \left\{\frac{a+11}{4}; \frac{a+1}{2}\right\}$;

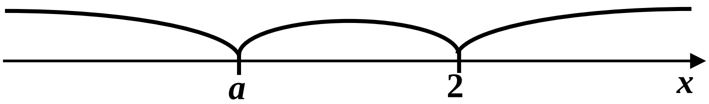
pentru $a = 2, x \in \left\{\frac{3}{4}; \frac{13}{4}\right\}$; pentru $2 < a \leq \frac{11}{3}, x \in \left\{\frac{a+11}{4}; \frac{a+1}{4}\right\}$;

pentru $a = \frac{11}{3}, x \in \left\{\frac{11}{3}\right\}$; pentru $\frac{11}{3} < a < 7, x \in \left\{\frac{11-a}{2}; \frac{a+1}{4}\right\}$;

pentru $a = 7, x = 2$; pentru $a < -3$ și pentru $a > 7, \emptyset$.

Exemplul 2. Să rezolvăm ecuația

$$x^2 - 2|x - a| + 2|x - 2| = 0.$$



Fie $\underline{\boldsymbol{a} < 2}$,

1) Dacă $x < a$, atunci ecuația dată ia forma

$$x^2 - 2a + 4 = 0 \quad (1)$$

sau $x^2 = 2(a - 2) < 0$, care nu are soluții.

2) $a \leq x < 2$, atunci $x^2 - 4x + 2(a + 2) = 0 \quad (2)$

Care are soluția $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-2a}$.

Este evident că x_1 și x_2 vor fi numere reale numai atunci când $a \leq 0$.

Expresia $2 + \sqrt{-2a} \geq 2$, ceea ce contrazice condiției $x < 2$.

Deci, $x = 2 - \sqrt{-2a}$. Să determinăm valorile parametrului $a < 2$, pentru care $2 - \sqrt{-2a} \geq a$ sau $4 - 2a + a^2 \geq 0, (a-2)^2 \geq 0$ – inegalitate adevărată pentru orice a, deci și pentru $a < 0$.

Astfel, pentru $a \leq 0, x = 2 - \sqrt{-2a}$.

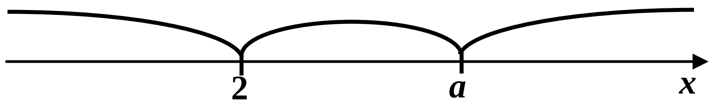
3) $x \geq 2$, atunci ecuația ia forma:

$$x^2 - 2a - 4 = 0, \quad (3) \text{ de unde } x_{3,4} = \pm\sqrt{4-2a}.$$

Deoarece $4 - 2a > 0$ pentru $a < 2$, rezultă că x_3 și x_4 sunt soluții reale. Însă $x \geq 2$. Deci, ecuația (3) are soluția $x = \sqrt{4-2a}$, care trebuie să verifice relația $\sqrt{4-2a} \geq 2$ sau $4 - 2a \geq 4$, de unde $a \leq 0$.

Astfel, pentru $a \leq 0$, $x = \sqrt{4-2a}$.

Fie ***a* ≥ 2**



4) $x < 2$, atunci $x^2 - 2a + 4 = 0$, (4) de unde $x_{5,6} = \pm\sqrt{2a-4}$ ambele reale deoarece $a \geq 2$.

Însă $x < 2$ și ca soluția pozitivă să verifice ecuația (4) este necesar ca $\sqrt{2a-4} < 2$ sau $a < 4$.

Deci, în acest caz $x = \pm\sqrt{2a-4}$, pentru $2 < a < 4$ și $x = -\sqrt{2a-4}$, pentru $a \geq 4$.

5) $2 \leq x < a, x^2 + 4x - 2a - 4 = 0$ (5) de unde $x_{7,8} = -2 \pm \sqrt{8+2a}$ ambele reale, deoarece $a > 2$.

Însă $x = -2 \pm \sqrt{8+2a} < 0 < 2$ nu este soluție a ecuației (5); iar $x = -2 + \sqrt{8+2a}$ aparține intervalului $2 \leq x < a$, pentru $a \geq 4$.

Astfel, pentru $a \geq 4$, ecuația (5) are soluția $x = -2 + \sqrt{8+2a}$.

6) $x \geq a, x^2 = 4 - 2a$, care are soluții reale numai pentru $a = 2, x = 0$ inaccesibilă, deoarece $x \geq 2$. În acest caz ecuația nu are soluții.

Răspuns: pentru $a \leq 0, x \in \{2 - \sqrt{-2a}; \sqrt{4-2a}\}$;pentru $0 < a < 2, \emptyset$;

Pentru $2 \leq a < 4, x = \pm\sqrt{2a-4}$;

Pentru $a \geq 4, x \in \{-\sqrt{2a-4}; -2 + \sqrt{8+2a}\}$.

Exemplul 3. Să cercetăm și să determinăm semnele soluțiilor ecuației

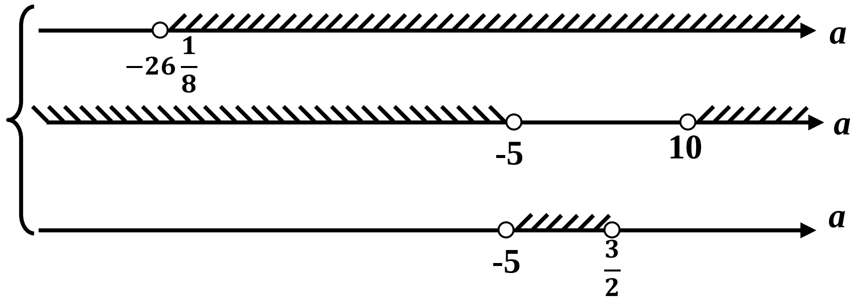
$$(a+5)x^2 + (2a-3)x + a - 10 = 0$$

în funcție de valorile parametrului a.

$D = (2a-3)^2 - 4(a+5)(a-10) = 8a + 209$.

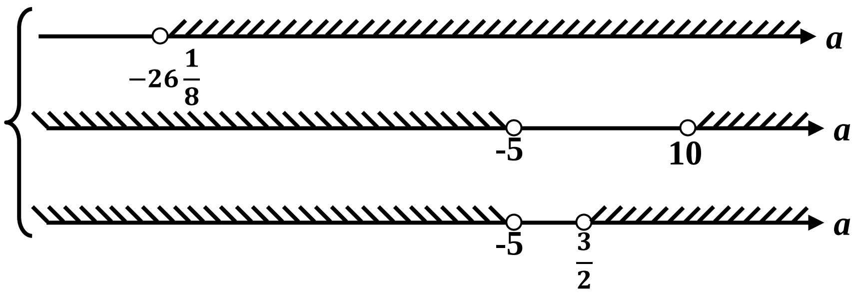
$D = 8a + 209 > 0$, pentru $a > -26\frac{1}{8}$.

$$1)\ \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}, \text{dacă} \begin{cases} a > -26\frac{1}{8} \\ \frac{a-10}{a+5} > 0 \\ \frac{2a-3}{a+5} < 0 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} a > -26\frac{1}{8} \\ (a-10)(a+5) > 0 \\ (2a-3)(a+5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -26\frac{1}{8} \\ \left[\begin{array}{l} a < -5 \\ a > 10 \end{array}\right. \\ -5 < a < \frac{3}{2} \end{cases}.$$



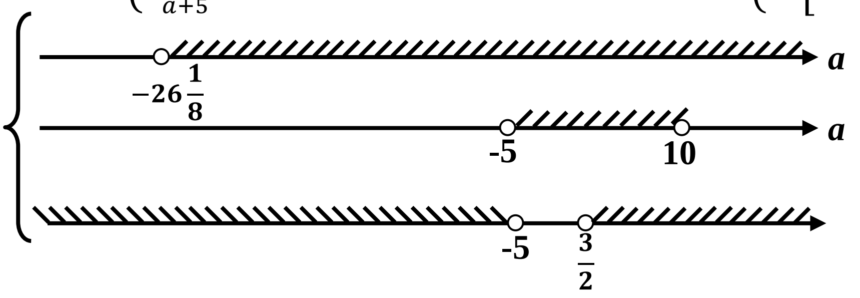
Sistemul nu are soluții. Deci, nu există așa valori ale parametrului a pentru care ambele soluții să fi pozitive.

$$2)\ \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}, \text{dacă} \begin{cases} a > -26\frac{1}{8} \\ \frac{a-10}{a+5} > 0 \\ \frac{2a-3}{a+5} > 0 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} a > -26\frac{1}{8} \\ (a-10)(a+5) > 0 \\ (2a-3)(a+5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -26\frac{1}{8} \\ \left[\begin{array}{l} a < -5 \\ a > 10 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a < -5 \\ a > \frac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases}.$$



Deci, $a \in (-26\frac{1}{8}; -5) \cup (10; \infty)$. Pentru aceste valori ale parametrului a ecuația dată are două soluții negative.

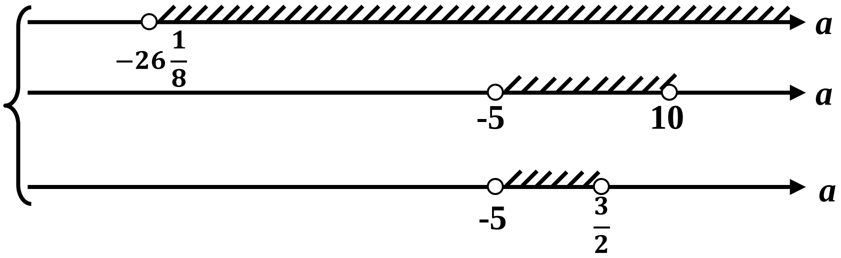
$$3)\ \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_2| > |x_1| \end{cases}, \text{dacă} \begin{cases} a > -26\frac{1}{8} \\ \frac{a-10}{a+5} < 0 \\ \frac{2a-3}{a+5} > 0 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} a > -26\frac{1}{8} \\ (a-10)(a+5) < 0 \\ (2a-3)(a+5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -26\frac{1}{8} \\ -5 < a < 10 \\ \left[\begin{array}{l} a < -5 \\ a > \frac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases}.$$



Deci, $a \in (\frac{3}{2}; 10)$.

4)) $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \\ |x_2| > |x_1| \end{cases}$, dacă $\begin{cases} a > -26\frac{1}{8} \\ \frac{a-10}{a+5} < 0 \\ \frac{2a-3}{a+5} < 0 \end{cases}$,$\Leftrightarrow \begin{cases} a > -26\frac{1}{8} \\ (a-10)(a+5) < 0 \\ (2a-3)(a+5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -26\frac{1}{8} \\ -5 < a < 10. \\ -5 < a < \frac{3}{2} \end{cases}$

Deci, $a \in (-5; \frac{3}{2})$.



Răspuns:

pentru $a \in \left(-26\frac{1}{8}; -5\right) \cup (10; \infty)$ $x_{1,2} = \frac{(3-2a) \pm \sqrt{8a+209}}{2(a+5)}$ unde $\begin{cases} x_1 < 0, \\ x_2 > 0 \end{cases}$;

pentru $a \in (1{,}5; 10)$ $x_{1,2} = \frac{(3-2a) \pm \sqrt{8a+209}}{2(a+5)}$, unde $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_2| > |x_1| \end{cases}$;

pentru $a \in \left(-\infty; -26\frac{1}{8}\right), \emptyset$;

pentru $a \in \left(-5; \frac{3}{2}\right)$ $x_{1,2} = \frac{(3-2a) \pm \sqrt{8a+209}}{2(a+5)}$, unde $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_2| > |x_1| \end{cases}$;

pentru $a = -26\frac{1}{8}, x = -1\frac{4}{13}$;

pentru $a = -5, x = -1\frac{2}{13}$;

pentru $a = \frac{3}{2},\ x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{17}{13}}$, unde $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_2| = |x_1| \end{cases}$;

pentru $a = 10,\ x_1 = 0, x_2 = -1\frac{2}{15}$.

Exemplul 4. Pentru care valori ale parametrului a există măcar o soluție comună a inecuațiilor

$$x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 3a - 2 > 0 \text{ și } x^2 - 5ax + 6a^2 + a - 1 \le 0?$$

Rădăcinile trinomului pătrat $y = x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 3a - 2$ sunt:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left[3a + 1 \pm \sqrt{(3a+1)^2 - 4(2a^2 + 3a - 2)}\right] = \frac{1}{2}\left(3a + 1 \pm \sqrt{a^2 - 6a + 9}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}[(3a+1) \pm (a-3)],$$

de unde $x_1 = 2a - 1, x_2 = a + 2$.

Rădăcinile trinomului pătrat $y = x^2 - 5ax + 6a^2 + a - 1$ sunt:

$$x_{3,4} = \frac{1}{2}\left[5a \pm \sqrt{25a^2 - 4(6a^2 + a - 1)}\right] = \frac{1}{2}\left(5a \pm \sqrt{a^2 - 4a + 4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}[5a \pm (a-2)],$$

de unde $x_3 = 3a - 1, x_4 = 2a + 1$.

Rădăcinile trinomului $x_1 = x_2$ pentru $a = 3$; $x_3 = x_4$ pentru $a = 2$.

Vom considera 3 cazuri:

I. Fie $a \in (-\infty; 2)$.Deoarece $x_1 < x_2$ *și* $x_3 < x_4$, atunci prima inecuație are soluțiile $x \in (-\infty; 2a-1) \cup (a+2; \infty)$, iar soluțiile inecuației a doua $x \in [3a-1; 2a+1]$.

Valorile parametrului a le determinăm din totalitatea de inecuații:

$$\left[\begin{array}{l} 3a-1 < 2a-1 \\ a+2 < 2a+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 1 \end{array}\right..$$

Astfel, pentru $a \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$ există soluții comune ale inecuațiilor.

II. Fie $a \in [2; 3]$. În acest caz $x_1 \leq x_2$ *și* $x_3 \geq x_4$. Astfel, prima inecuație are soluțiile $x \in (-\infty; 2a-1) \cup (a+2; \infty)$, iar inecuația a doua $x \in [2a+1; 3a-1]$.

Rezolvând totalitatea de inecuații

$$\left[\begin{array}{l} 2a+1 < 2a-1 \\ a+2 < 3a-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \quad\emptyset \\ a > \frac{2}{3} \end{array}\right.., \text{ obținem } a > \frac{3}{2}.$$

Deci, inecuațiile date au soluții comune pentru $a \in [2; 3]$.

III. Fie $a \in (3; \infty)$, atunci $x_1 > x_2$ *și* $x_3 > x_4$ și inecuațiile date au respectiv soluțiile $x \in (-\infty; a+2) \cup (2a-1; \infty)$, $x \in [2a+1; 3a-1]$. Inecuațiile au soluții comune, dacă parametrului a verifică totalitatea de inecuații.

$$\left[\begin{array}{l} 2a+1 > a+2 \\ 2a-1 < 3a-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 1 \\ a > 0 \end{array}\right.., \text{ deci pentru } a > 3.$$

Răspuns inecuațiile date au soluții comune pentru $a \in (-\infty; 0) \cup (1; 8)$

Exemplul 5. Să cercetăm și să rezolvăm ecuația $x + \sqrt{a + \sqrt{x}} = a$.

Deoarece x se află sub simbolul radicalului de ordinul doi, rezultă că $x \geq 0$. Prin urmare, membru stâng al ecuației date $x + \sqrt{a + \sqrt{x}} \geq 0$, deci $a \geq 0$. Astfel, pentru $a < 0$ ecuația nu are soluții. Ulterior vom considera $a \geq 0$. Scriem ecuația astfel: $\sqrt{a + \sqrt{x}} = a - x$. Pentru $a \geq 0$ și $x \leq a$ ecuația $\sqrt{a + \sqrt{x}} = a - x \Leftrightarrow a + \sqrt{x} = a^2 - 2ax + x^2$, ecuație pătrată în raport cu parametrul a:

$a^2 - (2x+1)a + x^2 - \sqrt{x} = 0$, care are soluțiile $a = x + \sqrt{x} + 1$ și $a = x - \sqrt{x}$.

Considerăm $a = x + \sqrt{x} + 1$. Ținând cont că membru din dreapta reprezintă suma a trei termeni nenegativi, unul dintre care este egal cu 1, obținem că dacă $0 < a < 1$, atunci ecuația $a = x + \sqrt{x} + 1$ nu are soluții.

În continuare, vom considera pe $a \geq 1$. Atunci ecuația $a = x + \sqrt{x} + 1$ o scriem astfel $x + \sqrt{x} + 1 - a = 0$ ecuație pătrată în raport cu $\sqrt{x}$, care are soluțiile $\sqrt{x} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4a-3})$ și $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{4a-3})$.Deoarece $a \geq 1$ și $x \geq 0$, soluția $\sqrt{x} =$

$-\frac{1}{2}(1+\sqrt{4a-3})$ este inadmisibilă. Astfel, $\sqrt{x}=\frac{1}{2}(\sqrt{4a-3}-1)$, de unde $x=\frac{1}{2}\left[(2a-1)-\sqrt{4a-3}\right]$, pentru $a \geq 1$. Această soluție verifică restricția $0 \leq x \leq a$.

Considerăm cazul $a=x-\sqrt{x}$ și obținem ecuația $x-\sqrt{x}-a=0$ ecuație pătrată în raport cu $\sqrt{x}$, care are soluțiile: $\sqrt{x}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$ și $\sqrt{x}=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4a})$. Soluția $\sqrt{x}=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4a})<0$ pentru $a>0$.

În cazul când $\sqrt{x}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$ avem $x=\frac{1}{2}\left[(2a+1)+\sqrt{4a+1}\right]>a$ neacceptabilă.

Răspuns: pentru $a \geq 1, x=\frac{1}{2}\left[(2a-1)-\sqrt{4a-3}\right]$;

Pentru $a=0, x=0$; pentru $a<0$ și pentru $0<a<1, \emptyset$.

În învățământul secundar matematica nu reprezintă o sumă de cunoștințe științifice, ci un proces, o creație intelectuală dependentă de cerințele practicii. Metodologic, această viziune prevede predarea matematicii ca proces, mai exact ca o „învățare prin descoperire”, care se realizează prin „metode de învățare prin cercetare”.

Metodele de învățare prin cercetare dezvoltă capacitatea intelectuală a elevilor, în special la rezolvarea unor probleme teoretice și practice cu un nivel sporit de dificultate. Metodologia învățării prin cercetare îi ajută pe elevi să înțeleagă matematica ca proces de elaborare de noi cunoștințe, dezvoltând capacitatea de a munci independent.

Bibliografie

1. Lupu I. Metodologia rezolvării problemelor de matematică cu un grad sporit de dificultate. Chișinău: Ed. Prut Internațional, 2011.
2. Cerghit I. Metode de învățământ. Iași: Polirom, 2006.
3. Рязановский А. Р., Мирошин В.В. Математика. Решение задач повышенной сложности. Москва: Интеллект-Центр, 2008.