УДК 091+930

ПЕРВАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КНИГА В ЗОЛОТООРДЫНСКОМ ГОСУДАРСТВЕ – ШЕДЕВР В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ («АТ-ТУХФЕ ФИ ‘ИЛМ АЛ-ХИСАБ») (3)*

Ихсан Фазлыоглу
(Университет «Меденият», Стамбул)

Вниманию читателей представлена третья часть статьи. Автор данного исследования представляет первый установленный пример научной деятельности в Золотой Орде, во время правления Узбек-хана.

Вычислительная книга «Ат-Тухфе фи ‘илм ал-хисаб», автор которой неизвестен, во время правления Узбек-хана (1313–1342) была передана правителю Крымского улуса Золотой Орды Абул-Музаффер Гияседдин Тулуктемир бею. После упоминания отличительных черт произведения, автор уделяет особое внимание определению чисел, которое приписывается Мухаммеду б. Муса ал-Хорезми и которое, на настоящий момент, не зафиксировано в других источниках. Автор анализирует формулы приблизительных значений квадратных и кубических корней иррациональных чисел, предложенные Мухаммедом ал-Хорезми, Абдулкахиром ал-Багдади и учителем автора, Садуруддином ал-Фарази.

В этой части будут рассмотрены такие вопросы, как числа и их особенности, приблизительные величины квадратного и кубического корней иррациональных чисел, квадратный и кубический корень иррациональных чисел. Анализ сочинения показывают, что «Тухфе» представляет исламскую математику в Золотой Орде на высоком уровне.

Ключевые слова: Золотая Орда, Узбек-хан, математика, алгебра, Дашт-и Кыпчак, ислам.

I. Числа и их особенности

Неизвестный писатель классифицирует числа по различным формам согласно древней математике. Эти определения основываются по числам на «Введение в арифметику» Никомаха, по геометрии на «Элементы» Евклида и на работы по теории чисел развитых в исламском мире Сабитом б. Курре; особенно, главным источником, к которому обращался автор, было «Ат-Текмиле» ал-Багдади [11,

* Окончание. Начало см: Золотоордынское обозрение. 2014. № 4 (6). С. 57–68; 2015. № 1. С. 106–127. Перевод с турецкого языка Ю.Н. Нагимовой, И.М. Миргалеева.

с. 225–235]. Согласно этому, числа, прежде всего, делятся на два больших раздела простые (муфрад) и составные (мураккаб). Простые числа делятся на четные, то есть 2n, n ∈ N и нечетные, то есть $[2n-1]$, n ∈ N.Четные числа делятся на три:

1. Четный-четный (заудж ал-заудж): 2^n, n ∈ N.

2. Четный-нечетный (заудж ал-фард): $2[2m-1]$, m ∈ N.

3.Четный-четный-нечетный (заудж ал-заудж вал-фард): $2^{n+1}[2m+1]$, n, m ∈ N.

Автор определяет четные числа как делящиеся на два естественных числа. В общем, на определение четного-четного указывает вышеприведенная формула «возможность делится на два до одного» (الواحدإليالتنصيفماهو). Автор передающий возражение своего учителя «это определение верно и для числа два; однако число два объединением четный-нечетный»; затем он говорит, что правильнее будет определение «возможность делится на два до двух» (يقالأنوالأصح : الاثنينإليبالتنصيفماينتهيهو). Говоря о четном-нечетном и четном-четном-нечетном, как уже было сказано выше, будет достаточно упомянутых определений.

Нечетное число, которое не делится на два полных целых числа, делится на два:

1. Простое нечетное число; как 7.
2. Составное нечетное число:

Например, $\frac{2n-1}{m}$ = r, n, m ∈ N => $[m,r]$ или $[2n-1]$, 9 => 3.

Простые числа делятся на три: неполные (отрицательные) (накыс), полные (мукаммал) и остаточные (положительные) (заид). Эти числа можно определить следующим образом: если n ∈ N полные делители кроме «n», показываются σ_0 (n), сумма делителей может записаться следующим образом $\sigma(n)=\sigma_0(n)+n$. В случае n ∈ N, если σ_0 (n)$> n$ остаточный (положительный), если σ_0 (n)< n неполный (отрицательный) и если σ_0 (n) = n называем полным числом [35, p. 278].

Автор говорит, что первое полное число «шесть» и, повторяя античную ошибку, показывает, что первой ступенью полных чисел (ступень единиц) являются «шесть» или «восемь». Первое остаточное (положительное) число «двенадцать». Предложение автора «все нечетные числа кроме 745 неполные (отрицательные)» необходимо изучить. Исследование полных чисел и установление общего правила в истории математики со времен греческой математики являлась темой для исследований. По этой теме, особенно, работали такие математики как Сабит б. Курре, Ибн Хейсем, Кемаледдин ал-Фариси и Ибн Хайдур. Неизвестный автор, как если бы он знал об этих исследованиях, сообщает об одной особенности полных чисел: «Полное число получается от четного-четного сумма делителей которых простое нечетное»(أولاوتوليدالعددالتاممنزوجزوجيكونأجزأهفردا).

Другими словами автор указывает, что в общей формуле $2^{n-1}(2^n-1)$, $n \in N$, 2^n-1 должно быть простое нечетное число.

В конце концов, говоря о составном числе (мураккаб), это число имеющее больше чем одна ступенька[1].

Автор «Тухве» снова дает часто встречаемые в классических математических текстах виды чисел: мутабайин, мутевафык, мутедахил, мутеадил, мутехази и мутесави. Из этих видов чисел мутабайин (отдельный): как восемь и пятнадцать не имеющие общих делителей кроме единицы; мухталиф (другой) – в некоторых источниках именуется как муштерек: как шесть и четырнадцать третьим числом – в примере число два – совместно делимые два числа; мутедахил (пробивной): как четыре и двенадцать одно делит другое, другими словами два числа одно из которых является разами второго; мутесави (равный): два числа, которые определяются как одно равно другому.

Автор детально дает определения и формулы чисел мутеадил и мутехази. Следовательно, эти два вида числа достойны более подробного исследования:

[2]و أما المتعالان: فعددان مختلفان, مجموع أجزاء أحدهما مثل مجموع أجزاء الآخر كأحد و خمسين مع أحد وتسعين. والأصل في توليدهما: أن تأخذ عددا و تنقص منه و احدا [3]ثم تقسمه بقسمين أولين - أي فردين أولين - [4]مختلفين, و تضرب أخدهما في الآخر, ثم تقسمه كذلك , و تضرب أحدهما في الآخر؛ فأجراء كل من المبلغين مثل العدد الفروض.

«Говоря о числах мутедахил, два разных числа, сумма частей одного равна сумме частей другого; как пятьдесят один и девяносто один… подходя к правилу составления этих чисел: Берешь одно число; убираешь от него один; потом делишь на два разных простых числа – то есть два нечетных простых числа; умножаешь друг с другом; таким же образом делишь и умножаешь; два достигнутых результата части каждого из чисел как допустимые числа».

Выражения автора можно выразить следующим образом; пусть «a» данное число; необходимо найти число мутеадил относящееся к желаемой «a»; то есть $\sigma_0^{-1}(a)$. Сначала в виде $a = 1 + p_i + q_i$ находятся простые числа p_i, q_i($i= 1, 2, 3, \ldots$). Если $\sigma_0^{-1}(a) = (p_i q_i) = (b_i)$, ($i = 1, 2, 3, \ldots$), то b_i число мутеадил. Известно, что $\sigma_0(b_i) = \sigma_0(p_i q_i) = a$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Автор дает два примера 51 и 91. Согласно этому; $a = 51$, $p_1 = 3$, $q_1 = 47$; $p_2 = 13$, $q_2 = 37$; таким образом $b_1 = 141$, $b_2 = 481$. То же действие проделывается с 91.

وأما المتحاذين:فعددان مجموع أجزاء كل و احد منهما مثل العدد الآخر كمأتين و عشرين مع مأتين وأربعة وثمانين. وتوليدهما من زوج زوج إذا زيد عليه و احد, وضرب المبلغ في

[1] См. для споров листы 4a–5a.

[2] 5ب.

[3] 6أ.

[4] الجملةتحت

الإثنين, وزيد على المسطح واحدا صار فردا أولا. إذا نقص منه ذلك الزوج يبقى فردا أولا؛ ومجموع الأجزاء[5] كل عدد يسمى ولدا له, وذلك العدد ولد لذلك المجموع.

«Говоря о числах мутехазиян, два числа, сумма частей каждого из них равна второму числу; например как 220 и 280… их происхождение от четного-четного; когда добавляем один; результат делим на два и добавляем один к полученному получается простое нечетное число; когда убираем это четное число, остается простое нечетное число; части каждого числа «производство» другого, суммы называются «производителями»».

Автор «Тухфе» упоминает о дружественных числах, которые в истории математики долгое время исследовались Пифагором и Евклидом. Несмотря на то, что в арабском языке эти числа называются мутехаббан, интересно то, что автор использует термин мутехазиян, если конечно это не ошибка переписчика[6]. Однако автор не объясняет использование данного наименования. Держа перед глазами вышеупомянутые формулы автора по неполным (отрицательным) и превосходным числам, выражения, основанные на установках распространенных в исламской математике со времен Сабита б. Курре, можно привести в следующем виде: если целые делящие части или действительные делители $n \in N$, кроме самого числа «n» если будут показаны в виде $\sigma_0(n)$, сумма делителей можно записать в следующем виде $\sigma(n) = \sigma_0(n) + n$. В этом случае $n \in N$, $n \in N > n$ остаточный (положительный)/заид, если $\sigma_0(n) < n$ неполный (отрицательный) и если $\sigma_0(n) = n$ называется целое/превосходное число. В этих условия m должен быть дружественным числом $n \in N$, и $\sigma_0(m) = n$ и $\sigma_0(n) = m$. Формула пары дружественных чисел Сабита обеспечивающая это условие следующая: допустим, $p_n = 3.2^n - 1$ и $q_n = 9.2^{2n-1} - 1$; если q_n, p_n, и p_{n-1} простые числа $m = 2^n p_{n-1} p_n$ и $n = 2^n q_n$ будут дружественные числа; здесь «m» остаточное (заид), а «n» неполное (накыс) числа [для подробной информации см.: 38, 35, 6].

В завершении необходимо отметить следующий пункт: сведения данные автором по теории классических чисел, скорее всего начавшаяся в исламской математике с переводом на арабский язык Сабитом б. Курре ‘Introductio Aritmetica’ и особенно развившаяся при помощи Ихванус-сафа «Theologoumenates Aritmetikes» не содержит Герметико-Пифагорейской основы. Автор рассматривает все эти сведения только для состояния числа или численности.

---

[5] 6ب.

[6] Вышеупомянутое наименование присутствует в обоих экземплярах произведения. Эта ситуация показывает, что автор сам использовал это название, либо александрийский экземпляр был скопирован с айасофийского.

II. Приблизительные величины квадратного и кубического корней иррациональных чисел.

Составленных в исламском мире математических, особенно, вычислительных и алгебраических произведений часть информации по нахождению квадратного и кубического корней основывается на индийской и греческой математике. Это унаследованное накопление в исламском мире начало совершенствоваться с десятого века; возможностями данными наукой алгеброй была достигнута общая формула, дающая n´ный корень положительных целых чисел, как было видно по примеру ал-Самавел (умер в 1172–3 г.); затем обогащенная деталями Насируддинном ат-Туси и Гияседдин Джемшид ал-Каши.

Автор «Тухфе» начинает с того, что в начале по отдельности рассматривает квадрат и куб и приводит определения терминов использованных счетоводами, межевальщиками и алгебраиками. Судя по счетоводам, каждая величина, умноженная на саму себя является корнем (джезр); результат полученный после умножения называется корневым (меджзур). Межевальщики называют джезр краем (диль), меджзур разом (мурабба), алгебраики джезр – вещью (x), меджзур – имуществом (x^2) (страница 46b–47a). То есть, $x^2 = x.x \Rightarrow x$ = джезр, диль, вещь x^2 = меджзур, мурабба, имущество.

В определении кубического корня автор без подробностей говорит «если одну величину умножить меджзуром, результат будет мукабом (возведенный в куб); умноженная величина является кубом (каб) результата (кубический корень)» (л. 60). То есть: $x^2 \cdot x = x^3 \Rightarrow x^3$ = мукаб (возведенный в куб) x = куб (каб).

Далее автор изучает свойства чисел с точки зрения, как квадратного корня (л. 47а–48b), так и кубического корня (л. 60а–61b). Затем приводит общий метод для квадратного и кубического корней положительных целых чисел и показывает примерами их применение на табличке. Судя по этим определениям, числа, с точки зрения кубического и квадратного корней, делятся на две группы: рациональные, то есть те, которые могут иметь квадратный и кубический корни (мунтакуль-джезр и мунтакуль-каб), и иррациональные, то есть те, которые не могут иметь квадратный и кубический корни (эсаммуль-джезр и эсаммуль-каб). Автор «Тухфе» на табличке показывает применение формулы дающий значение, как для квадратного, так и для кубического корня. Похожие процессы, как об этом было сказано выше, изучает для дробей, которые изучались в разном содержании в древней математике.

Автор приводит два метода для приблизительного квадратного и кубического значения иррациональных чисел. Первый из этих методов будет изучен подробно ниже, является методом, который выполняется по десятичной системе чисел; а второй метод выполняется путем нулей по дробной системе чисел с основанием шестьдесят.

Как мы узнали из информации о книгах Хорезми, которую дает испанец Юханна ал-Ишбили, Хорезми пользовался этим методом и путем нулей выполнял вычисления приблизительного кубического корня. В этом методе каждое натуральное число у которого нет полного квадратного корня может изменится следующим образом $\sqrt{N} \cong \frac{1}{10^{к}}\sqrt{N \times 10^{2к}}$. Находящаяся здесь дробь изменяется на дробь с основанием шестьдесят (ситинни) и с увеличением количества нулей настолько приблизится к полному значению. Например: $\sqrt{2} \cong \sqrt{\frac{2000000}{1000}} = \frac{1414}{1000}$ = 1.414 или в виде ситинни $1+\frac{24}{60}+\frac{50}{60^2}+\frac{24}{60^3}$.

Современник Хорезми Мусаогуллары (Бену Муса) легко обобщил эту формулу. По ней $\sqrt[n]{N} \cong \frac{1}{m^k}\sqrt[n]{Nm^{nk}}$, m,k ∈ Z^+; если m = 60 и n = 2 или 3, мы получим правило данное автором «Тухфе».

1. Квадратный корень иррациональных чисел

В «Тухфе» общее правило квадратного корня данное внутри десятичной системы приводится в спорном виде (л. 54a–55b):

قال محمد بن موسى الخوارزمي: الأصل في هذا الباب أن بحرج من العدد جذره الصحيح , وتنسب الباقي إلى ضعف الخارج, ثم تجمع ما خرج من النسبة مع الخارج الصحيح, وتقول هذا المجموع جذر العدد بالتقريب.[7]

وقال الإمام أبو منصور عبد القاهربن طاهر البغدادي ـ رحمه الله ـ: هذا الأصل ليس بصواب؛ لأنانجد أصلا يخرج به للجذر أقرب إلى الصواب مما يخرج بهذا الأصل؛ وذلك أن تزيد على الخارج و احدا, ثم ينسب إلى المجموع الأجزاء الباقية, وتقول هذا الأجزاء مع الخارج جذر العدد بالقريب.

مثاله: إنا إذا أخذنا جذر الثلاثة بالأصل الأول تصير اثنين, لأن الخارج واحد؛ فإذا ضعفنا [8]و نسبنا الإثنين الباقيين إلى المضعف يخرج أجزاء النسبه واحد,لأن المنسوب مثل المنسوب إليه. وإذا أخر جناه بالأصل الثاني يخرج واحد و ثلثان؛ لأنا على المضعف إذا زدنا واحد يصير ثلاثة؛ وإذا نسبنا الإثنين الباقيين إليها يخرج من النسبة ثاثان, ومجذور الإثنين أربعت, ومجذور الواحد و الثلثين اثنان و سبعة اتساع واحد. و علمنا أن الأصل الثاني إقرب إلى الصواب.

وقال شيخي ـ رحما الله ـ : اطلاق هذا القول من أبي منصور [9]غير مقبول, لأن في بعض المواضع الأصل الأول أقرب إلى الصواب. كالخمسة مثلا,فإن جذارها بالتقريب بالأصل الأول اثنان وربع, وبالأصل الثاني اثنان و خمس؛ ومجذور الأول خمسة وجزء من ستة عشر جزء وأجزاء واحد؛ ومجذور الثاني أربعة وأحد وعشرون جزء وأجزاء خمسة و عشرين جزء من واحد. إذا عرفت هذا فالتزم الأصلين جمسعا في كل موضع من مواضع العمل , وامتحنتها, فأي الجزرين كان أقرب إلى الصواب هو المطلوب.

«Мухаммед Муса ал-Хорезми говорил следующее: Принцип (правило) в этой теме следующее: Берешь полный корень от числа;

---

[7] 54ب.
[8] 55أ.
[9] 55ب.

остаток делишь на удвоенный полный корень; затем складываешь результат деления и полный корень. Сумма является приблизительным квадратным корнем числа.

Имам Абу Мансур Абдулкахир б. Тахир ал-Багдади – упокой Господь его душу – говорил так: Это правило неверно; потому что нам известно правило, которое дает ответ более близкий к правде, чем результат, полученный первым правилом. Это следующее: к удвоенному полному корню добавляешь один, потом делишь на сумму оставшихся частей; сумма этих частей и полного корня является квадратным корнем числа.

Например: По первому правилу квадратный корень трех будет два; потому что полный корень это один; когда мы делим удвоенный полный корень на удвоенную оставшуюся две части деления будет один; так как поделенный делением одно и то же. При установлении вторым правилом получается один и две третьих. Потому что когда мы добавляем один к тому числу, у которого было вычтено два раза, будет три; когда мы делим это на оставшееся два при делении получится две третьих; квадрат двух будет четыре; а квадратом единицы и две третьих является два и семь девятых. Видно, что второе правило ближе к правде.

Мой учитель – упокой Господь его душу – говорил так: нельзя принять это слово Абу Мансура; потому что в некоторых случаях первое правило ближе к правде. Например, возьмем пять; по первому правилу приблизительный квадратный корень два и одна четвертая; а судя по второму два и одна пятая. Квадрат первого пять и одна шестнадцатая; квадрат второго четыре и двадцать одна двадцать пятая. После того как ты узнал эту ситуацию при выполнении действий всегда обращайся к обоим правилам; какой корень ближе к правде, выбери его».

Чтобы лучше понять высказывания в «Тухфе» по теме квадратных корней необходимо дать короткую историческую справку. Как известно, впервые в истории математики месопотамские математики[10], выделившие приблизительное и полное значение, для полу-

[10] В истории математики, при исследовании беспорядочных дробей, заметив, что некоторые числа имеют свойство не измеряться, месопотамские математики, впервые выделившие целое значение и приблизительное значение, при работах по установлению приблизительного значения $\sqrt{2}$, فيالهامش открыли иррациональные числа; впоследствии начали выполнять действия с этими числами [17, p. 103, 105–106; 2, s. 178–179]. Математики которые пытались вычислить, беря во внимание продолжительность значения $\sqrt{2}$, который по наблюдениям относился и к геометрии, в месопотамской математике использовали как понятие целого и приблизительного значения, так пользовались с приближением продолжительной дроби повторным методом напоминающий современный [32, p. 35; 46, s. 64–65; 47, p. 24–25]. Во время вычисления $\sqrt{2}$ проблема бесконечности беспорядочных дробей математики, которые пытались избежать этого путем

чения приблизительного квадратного корня чисел, у которых нет полного квадратного корня, они находили число, имеющее полный квадратный корень ближайшее к числу у которого хотели найти квадратный корень, и остаток добавляли к нему.

Например: для 26, думали:

26 = 25 + 1

$26 = 5^2 + 1$

И для квадратного корня давали следующую формулу: пусть N будет числом, у которого надо найти квадратный корень; по вышеуказанному примеру запишется в виде $N = a^2 + b$; отсюда для квадратного корня устанавливается следующая формула:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \cong a + \frac{b}{2a}. \qquad (1)$$

Эта формула присутствует в работе Хорезми по хисаби-хинди, которая не сохранилась до наших дней. Информацию по данной теме предоставляет Багдади, который в «Текмиле» наряду с другими источниками приводит его, критикует и предлагает новое правило [11, с. 76–77]. Вот автор «Тухфе» эти данные берет из «Текмиле». Правило, которое предлагает Багдади следующее:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \cong a + \frac{b}{2a+1}. \qquad (2)$$

Багдади, как заимствует и автор «Тухфе», в качестве примера приводит $\sqrt{3}$ и показывает, что по первому правилу получается «2», а по второму 2 + 7/9. Учитель автора Садруддин ал-Фарази в противовес утверждению Багдади в качестве примера берет $\sqrt{5}$, и по очереди применят первое и второе правила, по первому правилу получает 5 + 1/16, а по второму 4 + 21/25. Ни Садруддин ал-Фарази, ни его ученик не предлагают нового правила, которое могло бы решить данную ситуацию; только рекомендуют совместное использование первого и второго правила.

Без сомнения, как и указывалось выше, эта тема давно существует в исламской математике. Начиная с Хорезми такие математики как Мусаогуллары, Кушяр б. Леббан ал-Джилли, Абул-Хасан ал-Несеви, Багдади, Ибрахим ал-Иклидиси, Абу Бекир ал-Кереджи, Са-

придумывания наибольшего (maxima) и наименьшего (minima) значений, считали необходимым установить верхний и нижний предел, чтобы достичь приблизительного значения (другими словами неопределенного значения) любого числа. Месопотамский метод, связанный с $\sqrt{2}$, который изучался Архитом и Героном и использовался в хордовой линейке Клавдия, сегодня называется алгоритмом Ньютона (Для технического объяснения см. [36, p. 7; 5, p. 28]. Интересен тот факт, что похожий метод, который использовали месопотамцы для установления значения $\sqrt{2}$, есть и в сохранившемся до наших дней первых индийских математических текстах Сулва-Сутрас (IX–VI вв до н.э. или между III–IV вв) [32, p. 35; 17, p. 106, 260–261]. С другой стороны, в месопотамских-сусанских табличках дается приблизительное значение и для $\sqrt{3}$.

мавел ал-Магриби, Ибн ал-Хейсем, Насируддин ат-Туси, Ибн Хассар, Ибн ал-Бенна и Джемшид ал-Каши занимались этой темой. Здесь, не вдаваясь в подробности, будет полезным указать на некоторые попытки.

Ахмед б. Ибрахим ал-Иклидиси в дошедшей до наших дней работе, которая известна как первая в сфере хисаби-хинди, «Ал-Фусул фил-хисаб ил-хинди», проанализировав формулы, как Харизми, так и Багдади, пришел к следующим выводам: в первом всегда будет $a + \frac{b}{2a} > \sqrt{N}$, а во втором $a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{N}$. Иклидиси предлагает новую формулу, которая дает среднее значение между ними: $\sqrt{N} \cong \frac{1}{2}\left[\left(a + \frac{b}{2a}\right) + \left(a + \frac{b}{2a+1}\right)\right] => \sqrt{N} \cong a + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a+1}\right)$ (3)

На самом деле, в то время как первая формула дает значение большее значение приблизительного квадратного корня любого числа, а вторая меньшее значение, третья формула дает среднее между ними значение.

Заново исследовавший данную тему известный алгебраик Абу Бекир Мухаммед б. ал-Хусейн ал-Кереджи (умер в 1016 г.) наблюдал, что, несмотря на то, что вместо первого используется второе правило, когда $a = b$ или $a > b$ первое дает более точное значение. Кереджи для установления более точного значения дает другую формулу. Судя по ней если $N = a^2 + b$, то

$$\sqrt{N} \cong a + \frac{N-a^2}{1+2a}. \qquad (4)$$

На самом деле в четвертом правиле, данным Кереджи, $N – a^2 = b$, формула принимает форму $\sqrt{N} \cong a + \frac{b}{1+2a}$, а это имеет такое же значение как и второе правило.

Известный под именем ал-Каласади, принадлежащий к школе Ибн ал-Бенны, Абул-Хасен Али б. Мухаммед б. Али ал-Курейши ал-Басти (умер в 891/1486 г) исследует упомянутые формулы и приходит к следующим правилам:

1. Если $b < a$, то первое правило дает более точное значение.
2. Если $b > a$, то он предлагает новую формулу, дающую более точный результат: $\sqrt{N} \cong a + \frac{b+1}{2(a+1)}$ (5)

Флориан Каджори говорит, что Каласади в своем произведении «Кешф ал-хиджаб ‘ан ‘илм ал-губар» предлагает новую формулу дающий более точный результат: $\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \cong \frac{4a^3 + 3ab}{4a^2 + b}$ (6)

и говорит о том, что вероятно он достиг этой формулы, отталкиваясь от понятия продолжительности дробей [3, p. 110–111].

2. Кубический корень иррациональных чисел

Автор «Тухфе», не вступая в полемику, ограничивается цитированием формулы Багдади о кубическом корне иррациональных чисел, данной в его книге «Текмиле», которая является одной из первых известных попыток по этой теме в исламской математике.

[11]قال الشيخ أبو منصور عبد القاهر بن طاهر البغدادي ـ رحما الله ـ: الأصل في هذا الباب أن تحرج من العدد كعبه صحيح, ثم بضرب هذا الخارج فيما يزيد عليه بواحد, ثم تضرب المبلغ في ثلاثة وتزيد على الحاصل و احاد, ثم بنسب الباقي من الكعب إلى هذا المبلغ, ثم تجمع الخارج من النسبة مع ذلك الخارج, فتكن المجوع كعب ذلك العدد يالتقريب.[12]
مثاله: أردنا إحاج كعب تسعة بالقريب. فالتزمنا المرسوم فخج اثان, وبقي واحد؛ فدربنا الاثنين فيما يزيد عليه بواحد, وذلك ثلاثة, فحصل ستة؛ ثم ضربنا الستة في الثلاثه فحصل ثمانية عشر, فزدنا عليه واحدا, ونسبنا الواحد الباقي إلى هذا المجموع فخرج من النسبة جزء ومن تسعة عشر جزء من واحد. فقالنا هذا الجزاء من الواحد مع[13] الخارج[14] كعب التسعة بالتقرين.

«Абу Мансур Абдулкахир б. Тахир ал-Багдади – упокой Господь его душу – сказал следующее: Правило по данной теме следующее: От числа отнимаешь целый куб; к результату добавляешь один и умножаешь; результат умножаешь на два, прибавляешь к нему один; затем оставшееся от кубического корня делишь на этот результат; затем складываешь результат после деления и остаток от куба; сумма является приблизительным кубическим корнем этого числа.

Например: Мы хотим получить приблизительный кубический корень девяти. Мы действовали согласно вышеуказанному правилу, получилось два, один остался. К двум добавили один и умножили, это три, получившееся шесть. Затем шесть умножили на три, получилось восемнадцать; к нему добавили один и разделили на оставшуюся единицу; после деления получилось девятнадцать первых. Мы говорим, вместе с кубом этой единицы является приблизительным кубическим корнем девяти».

Багдади, когда дает это правило, исходит из логики формулы квадратного корня. Судя по этому, пусть N будет числом, у которого мы хотим найти кубический корень; пишется $N = a^3 + b$; здесь a и b целые числа и a является самым близким целым кубическим корнем числа N, а b является остатком. Судя по этому, формулу можно записать в следующем виде: $\sqrt[3]{N} \cong a + \frac{b}{3a^2 + 3a + 1}$. Правило Багдади, зафиксированное ранее Кушяром б. Леббан ал-Джилли (умер в 350/961 г.) в его произведении «Китаб фи усул хисаб ил-хинди» [28, p. 32], так как оно давало более точный результат, чем $\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + b} \cong a + \frac{b}{3a^2 + 1}$ в дальнейшем была более предпочтительна[15]. И неизвестный автор «Тухфе», вероятно, на этом основании принял правило Багдади.

[11] 70 .

[12] 71أ.

[13] الهمشفي .

[14] 71ب.

[15] По историческому развитию исследований по квадратному корню, кубическому корню и n-ному корню см. [35, p. 381–394].

Заключение. Высокая исламская культура в Золотой Орде, начавшая развиваться с принятием ислама Берке-ханом, во время Узбек-хана, смешавшись с прежним укладом, приобрела власть и постоянство. В условиях политической, экономической и общественной стабильности динамично стала развиваться научная жизнь; часть людей, решившие вопрос с урбанизацией и основными потребностями, начали задаваться метафизическими и теоретическими вопросами и стали исследовать их. «Ат-Тухфе фи ‘илм ал-хисаб», переданная неизвестным автором, крымскому губернатору Тулуктемуру во время правления Узбек-хана может рассматриваться как признак стабильности и возможности задаваться теоретическими вопросами.

«Тухфе» по существу произведение, которое взяло на себя обязанность обучению технике вычисления или алгоритмическому счету, основанному на десятичной системе чисел, где действия выполнялись на табличке в той среде, где не было широкого использования бумаги и пера. В рамках этого автор «Тухфе» не ограничивался выполнением действий, интересовался и теоретическими темами, особенно останавливаясь на вопросе «что такое число?», приписывает к Хорезми определение, которое ранее не упоминалось ни в одних источниках и является крайне важной с точки зрения математической философии. Это определение, основанное на определениях аритмос и мегетос, унаследованных от греческой математики, наряду с числовым и геометрическим определениями чисел показывает возвышение понятия алгебраического числа.

Особенно в этом источнике установлено, что корни туркестанской математической традиции, представителями которой являются такие математики как Джемаледдин ат-Туркистани, Али ал-Гарби, Гияседдин Джемшид ал-Каши, Мехмед Шах ал-Фенари, Али Кушчу, Фенаризаде Али Челеби, Такийеддин Рашид, которая противостояла определению числа в греческом понятии числа, исходят от Хорезми. С другой стороны, крайне важны короткие и разъясняющие объяснения, данные по понятию доказательства, использующиеся в вычислении, межевании и алгебре. Определения, действия и информация по теории первичных чисел, полученные, опираясь на данные «Текмиле» Багдади, вычисления кубического и квадратного корней чисел в рамках группы положительных целых чисел, и особенно формулы приблизительных значений кубического и квадратного корней иррациональных чисел автора, который показывает положительные целые числа в рамках десятичной системы чисел в процессе правило-пример, показывают, что «Тухфе» представляет исламскую математику в Золотой Орде на среднем уровне, в серьезной и взыскательной форме. С другой стороны, этот математический уровень, достигнутый в Крыму, сначала, как показывает «ал-Икна фи ‘илм ал-мисаха», долгие годы сохраняла свой уровень, затем это скопление произведений постепенно начало распространяться и в Османской империи. В связи с этим, с научной точки зрения, можно сказать, что Османская империя является продолжателем научных традиций Золотой Орды.

И в завершение работы, необходимо сказать, что неизвестный автор «Тухфе», учитель автора Садруддин ал-Фарази и его утерянный труд «Нисаб ал-хуссаб» являются ценностями, которые должны быть включены в исламскую математическую литературу. Особенно, исходя из имеющихся экземпляров «Тухфе», необходимо подготовить и опубликовать критический анализ текста.

Сведения об авторе: Ихсан Фазлыоглу – Университет «Меденият», член научного совета Турецкого исторического общества, профессор, Ph.D. (философия) (34700, Уналан, 98, Ускудар, Стамбул, Турция); bilgi@ihsanfazlioglu.net

---

THE FIRST MATHEMATICAL BOOK IN THE GOLDEN HORDE STATE: A MASTERPIECE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS (“ET-TUHFE FÎ ILMI'L-HISÂB”) (3)*

Ihsan Fazlioğlu
(Istanbul Medeniyet University)

The Turkish author Ihsan Fazlioğlu presents to attention of readers the third part of the article “A Masterpiece of Computational Mathematics” (“et-Tuhfe fî ilmi'l-hisâb”). The author of this article presents the first example of an established scientific activity in the Golden Horde, which began before Janibek khan, during the reign of Uzbek khan. The work written in the Golden Horde on a mathematical topic occupies a special place because of the information contained therein. This treatise shows that the scientific activity in the Golden Horde, which began with the conversion to Islam, brought results in a short time and laid the foundations for “breakthroug” during the reign of Janibek khan.

The author examines this composition from a historical perspective. The Computational book “et-Tuhfe fî ilmi'l-hisâb”, whose author is unknown, was handed during the reign of Uzbek Khan (1313–1342) to the ruler of the Crimean ulus of the Golden Horde Ebul-Muzaffer Giyaseddin Tuluktemir bey. After mentioning the distinguishing features of the work, the author pays particular attention to the definition of numbers, which is attributed to Muhammad b. Musa al-Khwarizmi and which, at the moment, is not recorded elsewhere. The author analyzes the formula of approximate values of square and cube roots of irrational

* Ending. See the beginning in: Golden Horde Review, 2014, № 4(6), pp. 57–68; 2015, № 1, pp. 106–127. Russian translation from Turkish by Yu.N. Nagimova and I.M. Mirgaleev.

numbers proposed by Muhammad al-Khwarizmi, Abdulkadir al-Baghdadi, and the teacher of the author, Saduruddin al-Farazi.

This part examines issues such as numbers and their characteristics, approximate values of square and cube roots of irrational numbers, the square and cube root of irrational numbers. Analysis of the works show that Islamic mathematics in the Golden Horde developed to a serious level.

Keywords: Golden Horde, Uzbek khan, mathematics, algebra, Dasht-i Kipchak, Islam.

REFERENCES

1. Ahmed S. Saidan. Numeration and arithmetic. *Encyclopedia of the History of Arabic Science*, edit. Roshdi Rashed, c. II. New York, 1966, pp. 331–348.

2. Aydın Sayılı. *Mısırlılarda ve Mezopotamyalılarda Matematik, Astronomi ve Tıp*. Ankara, 1982.

3. *A History of Mathematics*, II. edisyon 1919. New York, 1958.

4. Bağdadlı İsmail Paşa. *Hediyyetu'l-arifîn*, nşr. Şerefettin Yaltkaya – Kilisli Rifat Bilge, c. II. İstanbul, 1951–1955.

5. Boyer Carl. *A History of Mathematics*. New York, 1991.

6. Brentjes Sonja. The First Perfect Numbers and Three Types of Amicable Numbers in a Manuscript on Elemantary Number Theory by Ibn Fellûs. *Erdem*, 1988, c. IV, pp. 11.

7. Devin De Weese. *Islamization and Native Religion in the Golden Horde: Baba Tükles and Conversion to Islam in the Historical and Epic Tradition*. Pennnsylvania, The Pennnsylvania State University Publ., 1994.

8. Devin De Weese. Problems of Islamization in the Volga-Ural Region: Traditions about Berke Khan. *Proceedings of the International Symposium on Islamic Civilisation in the Volga-Ural Region*. Kazan, 8–11 June 2001. İstanbul, 2004, pp. 3–13.

9. Ebu'l -Gazî Bahadır Han. *Türk Şeceresi* [*Şecere-i Türk*]. Yayımlayan Rıza Nur. İstanbul, 1925.

10. El-İklîdisî İbrahim. *Kitabu'l-fusul fi'l-hisabi'l-hindî*. Nşr. Ahmed S. Saidan, II. baskı. Amman, 1985.

11. El-Bağdadî Abdulkâhir b. Tahir. *Et-Tekmile fi'l-hisâb*. Tahkik Ahmed Selim Saidan. Kuveyt, 1985.

12. Fazlıoğlu İhsan. Aristoteles'in Sayı Tanımı. *Dîvân İlmî Araştırmalar Dergisi*. İstanbul, 2004/1, P. 15, pp. 127–138.

13. Fazlıoğlu İhsan. İrşad el-Tullab ila İlm el-Hisab [Hesap Biliminde Öğrencilere Kılavuz]. *Dîvân İlmî Araştırmalar Dergisi*. İstanbul, 2002/2, p. 13, pp. 321–322.

14. Fazlıoğlu İhsan. Osmanlılar'da Hesab-ı Hindî. *Türkiye Diyanet Vakfı İslam Ansiklopedisi*, c. XVII. İstanbul, 1998.

15. Fazlıoğlu İhsan. *Uygulamalı Geometri'nin Tarihine Giriş*: *el-İkna fi ilmi'l-misaha*. Dergah Yayınları. İstanbul, 2004.

16. *Fihrist mahtutat belediyyeti'l-İskenderiyye*. Hazr. Yusuf Zeydan. İskenderiye 1996, c. I, nu: 39.

17. George Gheverghese Joseph. *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*. New York (bez goda izdaniya).

18. Halperin Charles J. *Russia and the Golden Horde: The Mongol Impact and Russian History*, London 1985 (=1987).

19. İbn Batuta. *Rıhlet İbn Batuta.* Thk. Ali el-Muntasır el-Kettanî, c. I. Beyrut, 1985.

20. İzgi C. Canı Bek Han devrinde (1342–1357) Altınordu hanlığında bilim hayatı. *Divan,* 1996/2, pp. 147–172.

21. Kafalı Mustafa. *Altın Orda Hanlığının Kuruluş ve Yükseliş Devirleri*. İ.Ü. İstanbul, Edebiyat Fakültesi Matbaası, 1976.

22. Karatay F.E. *Topkapı Sarayı Müzesi Kütüphanesi, Arapça Yazmalar Kataloğu,* c. III. İstanbul, 1966.

23. Katip Çelebi. *Keşfu'z-zunun an esami'l-kutub ve'l-funun.* Nşr. Kilisli Muallim Rıfat – Şerefeddin Yaltkaya, c. III. İstanbul, 1941–1943.

24. Köprülü Mehmet Fuat. Altın Ordu'ya Ait Yeni Araştırmalar. *Belleten*, c. V. Ankara, 1941, pp. 397–436.

25. Kurat A.N. Altın Ordu Devleti. *Türk Dünyası El Kitabı*, c. I: Coğrafya-Tarih, II. Baskı. Ankara, 1992, pp. 400–408.

26. Kurat A.N. *Topkapı Sarayı Müzesi Arşivindeki Altın Ordu, Kırım ve Türkistan Hanlarına Ait Yarlık ve Bitikler.* Burhaneddin Matbaası, Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi Yayınları. Tarih Serisi: 1. İstanbul, 1940.

27. Kehhale Ömer Rıda. *Mucemu'l-muellifîn*, c. II, Beyrut (without the year of publication).

28. Kushyar Ibn Labban. *Principles of Hindu Reckoning.* A Translation with Introduction and Notes by Martin Levey and Marvin Petruck of the Kitab fi Usul Hisab al-Hind. Wisconsin, 1965.

29. *Milli Eğitim Bakanlığı İslam Ansiklopedisi*, c. XII/1. İstanbul, 1993.

30. Mach Rudolf. *Catalogue of Arabic Manuscripts (Yehuda Section in the Garrett Collection).* Princeton, 1977.

31. Muhammed Süveysî. *Hesap, Türkiye Diyanet Vakfı İslam Ansiklopedisi*, c. XVII. İstanbul, 1998.

32. Otto Neugebauer. *The Exact Sciences in Antiquity*. Providence, 1970.

33. Özkaya T. Sovyetler Birliğinde Altın Ordu ile İlgili Yeni Araştırmalar. *Belleten*, c. LIV, Sayı 209. Ankara, 1990, (Nisan), pp. 497–532.

34. Özyetkin M. *Altın Ordu, Kırım ve Kazan Sahasına Ait Yarlık ve Bitiklerin Dil ve Uslüp İncelemesi.* Atatürk Kültür, Dil ve Tarih Yüksek Kurumu, Türk Dil Kurumu Yayınları: 658. Ankara, 1996.

35. Roshdi Rashed. *The Development Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra.* Dordrecht, 1994.

36. Richard L. Faber, *Foundations of Euclidean and non-Euclidean Geometry*. New York, 1983.

37. Roshdi Rashed. Numerical Analysis. *Encyclopedia of the History of Arabic Science,* edit. Roshdi Rashed, c. II. New York, 1966.

38. Sabit B. Kurra. *Kitabu'l-adadi'l-mutahabbe.* Tahkik *Ahmed Selim Saidan.* Amman, 1977.

39. Şeşen R. *Muhtârât mine'l-mahtutati'l-arabiyyetu'n-nâdire fi mektebat Turkiyâ*. İstanbul, 1997.

40. Şeşen R., İzgi C. *Osmanlı Matematik Literatürü Tarihi*. Edit. Ekmeleddin İhsanoğlu, c. I. İstanbul, 1999.

41. Taşağıl Ahmet. İdil-Ural Bölgesinde İslâmiyetin Yayılmaya Başlaması. *Proceedings of the International Symposium on Islamic Civilisation in the Volga-Ural Region*, Kazan, 8–11 June 2001, pp. 101–106.

42. Taşköprülü-zade, *eş-Şekaiku'n-numaniyye fi ulemâi'd-Devleti'l-Osmaniyye*. Nşr. Ahmed Subhi Furat. İstanbul, 1985.

43. Tiesenhausen W. *Altınordu Devleti Tarihine Ait Metinler.* Çev. İsmail Hakkı İzmirli. İstanbul, Maarif Matbaası, 1941.

44. Togan İ. Second Wave of Islam and Özbek Khan: Strategies for Conflict Resolution. *Proceedings of the International Symposium on Islamic Civilisation in the Volga-Ural Region.* Kazan, 8–11 June 2001. İstanbul, 2004, pp. 15–33.

45. Toparlı Recep. *İrşadu'l-müluk ve's-selâtîn*. Ankara, 1992.

46. Van der Waerden. *Bilimin Uyanışı: Eski Mısır, Babilonya ve Eski Yunan Matematiği.* Çeviri: Orhan Ş. İçen ve Yılmaz Öner. İstanbul, 1994.

47. Victor J. Katz. *A History of Mathematics*: *An Introduction.* New York, 1992.

48. Yakubovskiy A.Y. *Altın Ordu ve İnhitatı* [*Zolotaya Orda*]. Çev. Hasan Eren. İstanbul, Maarif Basımevi, 1955.

49. Yakubovskiy A.Y. *Altın Ordu ve Çöküşü*. II. Baskı, MEB, Kültür Bakanlığı Yayınları. Ankara, 1976.

50. Yakubovskiy A.Y. *Altın Ordu ve Çöküşü*, III. Baskı T.T.K. Ankara, 1992.

About the author: Ihsan Fazlioğlu – Istanbul Medeniyet University, member of the Scientific Council of the Turkish Historical Society, Professor, Ph.D. (Philosophy) (34700, Ünalan Mah., No. 98, Üsküdar, Istanbul, Turkey); bilgi@ihsanfazlioglu.net