УДК 336.76

Ключевые слова:
структурированный дериватив, модель Блэка — Шоулза, функция выплат, разложение, уравнение Дынкина, функция плотности вероятности

***Д. В. Зуев**,*
аспирант секции «Мировые финансы» НИУ ВШЭ, гл. специалист финансового департамента ОАО «Московская биржа ММВБ-РТС»
(e-mail: denconvert@mail.ru)

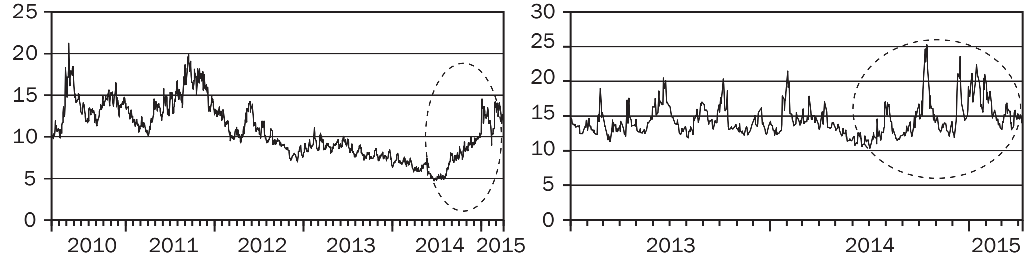
Структурированные деривативы: универсальная модель ценообразования

Объем сделок со структурированными продуктами существенно увеличился за последние несколько лет. Значительно расширилась продуктовая линейка сложных финансовых инструментов, в особенности с подлежащими активами, торгуемыми на валютном и фондовом рынках[1]. Вместе с тем волатильность на валютном рынке, начиная со второго полугодия 2014 г., показывает положительную динамику. Волатильность на фондовом рынке также остается на достаточно высоком уровне, демонстрируя периодические скачки.

На рис. 1 представлена динамика индекса волатильности евро, CBOE *EuroCurrency Volatility Index* (EVZ), описывающего рыночные ожидания 30-дневной волатильности обменного курса доллара США к евро (график слева), а также динамика индекса *Volatility* S&P 500 (VIX), рассчитываемого на основании предполагаемой волатильности опционов на индекс S&P 500 (график справа)[2].

Рисунок 1

Динамика индекса волатильности CBOE EuroCurrency Volatility Index (слева), динамика индекса Volatility S&P 500 (справа)



Источник: рассчитано автором по данным Chicago Board Options Exchange (http://www.cboe.com/micro/volatility/introduction.aspx).

[1] См., напр.: Информационно-консалтинговое агентство «Структурированные продукты» (http://www.sproducts.ru/); Incapital LLC. Securities and investment banking firm (http://structuredinvestments.com/); Swiss Structured Products Association (http://sspa-association.ch/home/index.aspx?lang=en&).

[2] Chicago Board Options Exchange (http://www.cboe.com/micro/volatility/introduction.aspx).

Рост рынка структурированных деривативов и высокая волатильность на рынках подлежащих активов в совокупности накладывают более серьезные требования к моделям оценки сложных финансовых инструментов.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

С учетом сложившейся конъюнктуры модель оценки, на наш взгляд, должна обладать в первую очередь следующими характеристиками (в рассмотренных ниже примерах мы придадим им строгий количественный смысл):

— устойчивость относительно входных данных, вне зависимости от того, к какой части алгоритма решения они относятся (малые изменения данных задачи должны вызывать лишь малые изменения в ее решении и результатах);

— гибкость (достаточное число степеней свободы для возможности калибровать модель по эмпирическим данным, а также возможности применять различные подходы к решению, не нарушая при этом целостности входящих в модель элементов и сохраняя непротиворечивость связей между ними);

— интегрируемость с существующими теориями и концепциями, которые применяются в современных количественных финансах (теория информации, теория динамических систем, теория распознавания образов, нейронные сети, теория неприятия риска, поведенческие финансы, теория перспектив и т. д.);

— не основываться на идее нормальности распределения (наблюдаемые цены не подчиняются распределению Гаусса).

Судя по всему, на рынке нет подобной модели. Очевидным следствием этого является крайне низкая ликвидность структурированных продуктов: сделки совершаются на внебиржевом рынке и носят разовый характер преимущественно из-за больших трудозатрат на оценку.

По нашему мнению, структурированные деривативы могут эффективно использоваться не только в инвестиционных целях (хеджирование одновременно нескольких рисков с получением ожидаемой доходности, к примеру, в рамках деятельности международной компании с фондами в одной валютной юрисдикции и выручкой — в другой), но и в спекулятивных (более широкий, в отличие от стандартных финансовых инструментов, охват рынков освобождает трейдера от необходимости совершать несколько разносторонних сделок). Выдвинута гипотеза (которая будет доказана в настоящей статье) об экономической целесообразности наличия на рынке структурированных продуктов в том смысле, что сложные инструменты обходятся рынку дешевле, чем совершение совокупности сделок, которые они покрывают.

Нами предлагается универсальная, инвариантная к виду производного финансового инструмента модель оценки теоретической стоимости структурированных деривативов, обладающая вышеперечисленными характеристиками и обеспечивающая максимальную близость эволюции ожидаемой стоимости к наблюдаемым ценам на рынке.

В целях придания количественного смысла заявленным характеристикам модели оценим теоретическую стоимость деривативa с одним подлежащим активом (одномерный ценовой процесс) по широко используемой участниками рынка модели Блэка — Шоулза (*Black-Scholes Option Pricing Model*) и по предлагаемой нами модели в ее упрощенной спецификации. Сравним полученные эволюции цены с наблюдаемой ценой на рынке. После чего перейдем к оценке авторского структурированного производного финансового инструмента (двумерный ценовой процесс) по предлагаемой нами модели. И, наконец, апогеем нашего исследования выступит вывод об экономической целесообразности наличия на рынке структурированных продуктов в терминах соотношения эволюций ожидаемых цен.

ОЦЕНКА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ СТОИМОСТИ ВАЛЮТНОГО ОПЦИОНА (ОДНОМЕРНЫЙ ЦЕНОВОЙ ПРОЦЕСС) ПО МОДЕЛИ БЛЭКА — ШОУЛЗА И ПО ПРЕДЛАГАЕМОЙ НАМИ МОДЕЛИ. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ С ЭМПИРИЧЕСКИМИ ДАННЫМИ

Рассмотрим в качестве примера валютный колл-опцион европейского типа, дающий своему держателю право купить одну единицу иностранной валюты (EUR) за K единиц местной валюты (USD).

Проведем сначала оценку опциона по модели Блэка — Шоулза.

С учетом того, что иностранная валюта играет роль местной акции с непрерывной выплатой дивидендов, для определения цены $F(t, x)$ валютного опциона европейского типа необходимо решить краевую задачу[3]:

$$\frac{dF(t,x)}{dt} + \frac{1}{2}x^2\sigma^2 \cdot \frac{d^2F(t,x)}{dx^2} + x(r_d - r_f)\cdot\frac{dF(t,x)}{dx} - r_d F(t,x) = 0,$$
$$F(T,x) = \Phi(x) \tag{1}$$

где x — валютный курс EUR/USD;
t — отрезок времени от момента заключения опциона до момента его исполнения;
T — момент исполнения опциона;
σ — волатильность;
r_d — процентная ставка для местной валюты (в рассматриваемом примере — USD), постоянна и неслучайна;
r_f — процентная ставка для иностранной валюты (в рассматриваемом примере — EUR), постоянна и неслучайна;
$\Phi(x)$ — функция выплат в момент T исполнения опциона.

Цена $F(t, x)$ европейского колл-опциона на иностранную валюту в момент времени t, удовлетворяющая уравнению (1) (другими словами, являющаяся его решением), задается модифицированной формулой Блэка — Шоулза[4]:

$$F(t,x) = xe^{-r_f(T-t)} \cdot N[d_1(t,x)] - e^{-r_d(T-t)} \cdot KN[d_2(t,x)] \tag{2}$$

где K — цена исполнения (курс-страйк);
N — функция распределения стандартного нормального закона N[0, 1] и

$$d_1(t,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot [\ln\left(\frac{x}{K}\right) + (r_d - r_f + \frac{1}{2}\sigma^2)\cdot(T-t)],$$
$$d_2(t,x) = d_1(t,x) - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{3}$$

В табл. 1 представлены характеристики рассматриваемого валютного колл-опциона, а также выбранные значения параметров модели Блэка — Шоулза.

Таблица 1

Характеристики валютного колл-опциона, параметры модели Блэка — Шоулза

№ п/п	Характеристики опциона	Значение
1	Дата заключения опционного контракта	01.07.2014
2	Дата истечения опционного контракта	30.09.2014

[3] *Björk T. Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford Finance Series, 2009.*
[4] *Там же.*

№ п/п	Характеристики опциона	Значение
3	Момент исполнения, *T*	93
4	Цена исполнения (курс-страйк), K	1,25
5	Процентная ставка для местной валюты (ставка по десятилетним казначейским облигациям США*), r_d	1,5 %
6	Процентная ставка для иностранной валюты (ставка по десятилетним европейским государственным облигациям, Германия и Франция**), r_f	1,44 %
7	Историческая волатильность***, σ	0,062

Примечания:
** — по данным Daily Treasury Yield Curve Rates / U.S. Department of the Treasury (http://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yield);*
*** — по данным Информационного портала Invest Future (http://investfuture.ru/bonds/);*
**** — рассчитана по котировкам EUR/USD за предшествующие моменту заключения контракта три месяца (т. е. за второй квартал 2014 г.) и за последующие три месяца (период действия опциона).*
Источник: составлено автором.

Для наглядности результаты оценки валютного колл-опциона по модели Блэка — Шоулза будут представлены ниже, после оценки по предлагаемой нами модели в ее упрощенной спецификации.

Следует отметить, что уравнение (1) представляет собой модифицированное уравнение Блэка — Шоулза и, по сути, является обратным уравнением Колмогорова (инфинитезимальным оператором Дынкина)[5].

$$\frac{dF(t,x)}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\cdot\frac{d^2F(t,x)}{dx^2} + \mu(x)\cdot\frac{dF(t,x)}{dx} - rF(t,x) = 0 \qquad (4)$$

с конкретными спецификациями параметризующих функций:

$\mu(x) = x(r_d - r_f);$
$\sigma^2(x) = x^2\sigma^2;$
$r = r_d.$

Предлагаемая нами модель основана не на использовании готовых формализмов (2) и (3), а на решении уравнения (4) методом разделения переменных (методом Фурье). Таким образом, мы отказываемся от идеи нормальности распределения (в формуле Блэка — Шоулза — функция распределения стандартного нормального закона). Параметр при относящейся к переменной t части уравнения (4) будет использован для калибровки модели: поскольку мы располагаем информацией о наблюдаемой цене на рынке, подберем такое значение параметра, которое обеспечит в момент $t = 0$ максимальную близость теоретической цены к стоимости опциона в момент его заключения. Кривая эволюции цены дериватива сдвинется вдоль оси ординат. Таким образом инициализируется эволюция ожидаемой стоимости опциона из точки, соответствующей наблюдаемой цене на рынке. Все это в совокупности характеризует гибкость модели.

Представим общее решение уравнения (4) (эволюцию во времени ожидаемой цены опциона) в виде суммы следующего ряда:

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(A_n\cdot e^{-\lambda_n(T-t)}\cdot\gamma_n(x)\right), \qquad (5)$$

[5] *Björk T. Arbitrage Theory in Continuous Time.*

где $\gamma_n(x)$ — собственные функции (ортонормированные полиномы, построенные на моментах весовой функции $\varphi(x)$, рассматриваемой как функция плотности вероятности);
λ_n — собственные значения, соответствующие собственным функциям $\gamma(x)$;
n — номер собственной функции (ортонормированного полинома $\gamma(x)$) и соответствующего ей собственного значения λ;
T — момент исполнения опциона;
t — отрезок времени от момента заключения опциона до момента T его исполнения;
A_n — веса в разложении искомой функции $F(x, t)$ по собственным функциям $\gamma(x)$, определяемые конечным условием:

$$F(x, T) = \Phi(x) \tag{6}$$

$$A_n = \int_K^q \gamma_n(x) \cdot \varphi(x) \cdot \Phi(x)\, dx, \tag{7}$$

где $\varphi(x)$ — весовая функция, рассматриваемая как функция плотности вероятности;
$\Phi(x)$ — функция выплат в момент T исполнения опциона;
K — цена исполнения (курс-страйк);
q — максимальное значение курса EUR/USD в рассматриваемом периоде (включая некоторый предшествующий моменту заключения контракта период);
$\gamma_n(x)$ — определены выше.

Разделение переменных в уравнении (4) приводит к задаче Штурма — Лиувилля. Формула Родрига позволяет получить собственные функции и собственные значения задачи Штурма — Лиувилля.

Поскольку мы представляем общее решение уравнения (4) в виде разложения по базисным функциям, то для обеспечения его близости к искомой функции $F(x, t)$ базис должен быть ортонормированным.

В силу того, что собственные функции, получаемые по формуле Родрига, не являются ортонормированными с произвольной весовой функцией, общее решение, представленное в виде разложения искомой функции по такому базису, оказывается несостоятельным.

Для решения данной проблемы можно воспользоваться ортонормировкой по Граму — Шмидту либо же построить базисные функции на моментах весовой функции, рассматриваемой как функция плотности вероятности (оба подхода приводят в точности к одному и тому же результату).

Построим ортонормированные полиномы на моментах весовой функции с помощью подхода Гамбургера, основанного на матрицах Ганкеля. Собственные значения получим из формализма Родрига. В целях обеспечения сопоставимости результатов оценки опциона по модели Блэка — Шоулза и по предложенной нами модели получим весовую функцию как решение задачи Штурма — Лиувилля с аналогичными Блэку — Шоулзу спецификациями параметризующих функций.

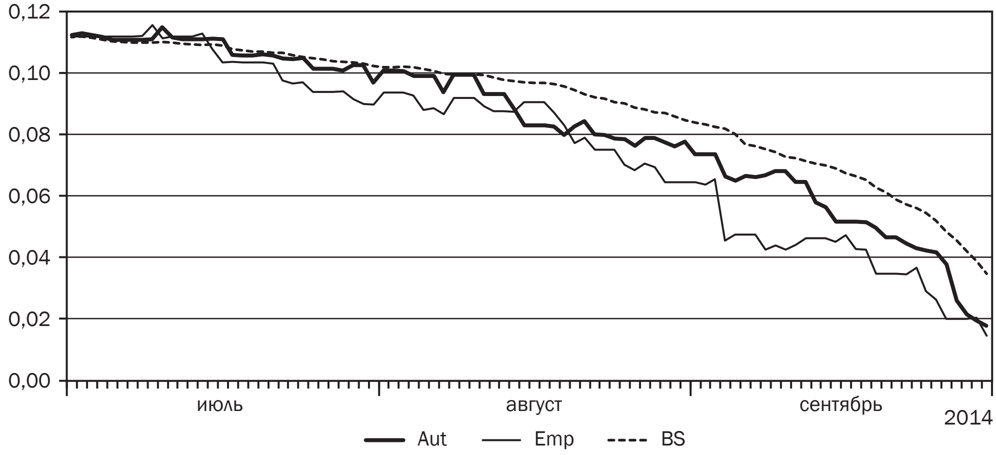
На рис. 2 представлены эволюция во времени ожидаемой стоимости $F(x, t)$ валютного опциона (EUR/USD), оцененная по предложенной нами модели (Aut), по модели Блэка — Шоулза (BS), а также эволюция во времени наблюдаемой на рынке цены: трехмесячный опцион на покупку EUR относительно USD с датой заключения 03.07.2014, датой истечения 03.10.2014, страйком 1,250 — Ticker ECV4C 1.250 Curncy (Emp)[6].

---

[6] *The Bloomberg Professional Service (Bloomberg Terminal) (http://www.bloomberg.com/professional/).*

Рисунок 2

Эволюция во времени ожидаемой стоимости F(*x*, *t*) валютного опциона (EUR/USD)



Источник: рассчитано автором.

Как видно из рис. 2, предложенная нами модель обеспечивает близость эволюции ожидаемой стоимости производного инструмента к его наблюдаемым ценам на рынке (в отличие от оценки по модели Блэка — Шоулза).

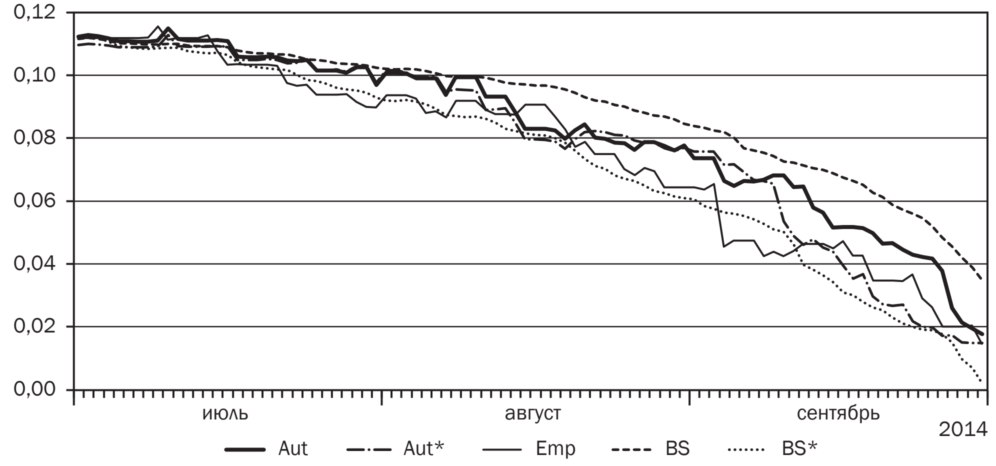
Ранее мы отметили устойчивость как ключевую характеристику модели. Изменим значение волатильности на 0,065 (в примере выше — 0,062) и процентную ставку для местной валюты на 1,55 % (в примере выше — 1,5 %). На рис. 3 представлены кривые Aut, BS, Emp из примера выше, а также две кривые с учетом изменений:

Aut* — эволюция во времени ожидаемой стоимости F(*x*, *t*) валютного опциона (EUR/USD), оцененная по предложенной нами модели с учетом изменений;

BS* — эволюция во времени ожидаемой стоимости F(*x*, *t*) валютного опциона (EUR/USD), оцененная по модели Блэка — Шоулза с учетом изменений.

Рисунок 3

Эволюция во времени ожидаемой стоимости F(*x*, *t*) валютного опциона (EUR/USD)



Источник: рассчитано автором.

В отличие от оценки по модели Блэка — Шоулза, предложенная модель демонстрирует устойчивость относительно малых изменений исходных данных.

ОЦЕНКА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ СТОИМОСТИ АВТОРСКОГО СТРУКТУРИРОВАННОГО ДЕРИВАТИВА (ДВУМЕРНЫЙ ЦЕНОВОЙ ПРОЦЕСС) ПО ПРЕДЛАГАЕМОЙ НАМИ МОДЕЛИ

Итак, в основе моделей ценообразования деривативов лежат стохастические дифференциальные уравнения, описывающие обратную эволюцию ценового процесса, в частности, обратное уравнение Колмогорова (уравнение Дынкина). Решение усложняется, если искомая функция зависит от двух переменных. Оценка структурированных деривативов, являющаяся предметом нашего исследования, сводится к оценке преимущественно двух ценовых процессов одновременно (например, две доходности: одна определяется отношением процентной ставки для иностранной валюты к обратной котировке валютной пары, другая — значением процентной ставки для местной валюты; два индекса волатильности).

Перейдем к оценке авторского структурированного производного финансового инструмента *The Barrier Bermuda Foreign Exchange (EUR/USD) Interesting Swaption*[7] по предлагаемой нами модели.

Рассмотрим двумерный ценовой процесс. Обратное уравнение Колмогорова (оператор Дынкина), содержащее две пары параметризующих функций (функции мгновенной диффузии и функции мгновенного смещения), принимает следующий вид:

$$-\frac{\mathrm{dF}(x, y, t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\sigma_1^2(x, y)\cdot\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{F}(x, y, t)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2(x, y)\cdot\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{F}(x, y, t)}{\mathrm{d}y^2} + \sigma_1(x, y)\cdot\sigma_2(x, y)\cdot$$
$$\cdot\rho_{12}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{dF}(x, y, t)}{\mathrm{d}x}\right) + \mu_1(x, y)\cdot\frac{\mathrm{dF}(x, y, t)}{\mathrm{d}x} + \mu_2(x, y)\cdot\frac{\mathrm{dF}(x, y, t)}{\mathrm{d}y} - r\mathrm{F}(x, y, \mathrm{t}), \tag{8}$$

где $\mathrm{F}(x, y, t)$ — искомая функция двух переменных (эволюционирующая во времени ожидаемая стоимость структурированного деривативa);
$\mu_1(x, y)$ и $\mu_2(x, y)$ — функции мгновенного смещения;
$\sigma_1^2(x, y)$ и $\sigma_2^2(x, y)$ — функции мгновенной диффузии;
ρ_{12} — коэффициент корреляции;
r — вещественное число (безрисковая процентная ставка).

Как и в случае с одномерным ценовым процессом, рассмотренным в иллюстративном примере, мы можем представить общее решение двумерного уравнения (8) (эволюцию во времени ожидаемой стоимости структурированного дериватива) в виде суммы следующего ряда:

$$\mathrm{F}(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(A_n\cdot e^{-\lambda_n(T-t)}\cdot\gamma_n(x, y)), \tag{9}$$

где $\gamma_n(x, y)$ — собственные функции (ортонормированные полиномы, построенные на моментах весовой функции $\varphi(x, y)$, рассматриваемой как функция плотности вероятности);
λ_n — собственные значения, соответствующие собственным функциям $\gamma(x, y)$;
n — номер собственной функции (ортонормированного полинома $\gamma(x, y)$) и соответствующего ей собственного значения λ;
T — момент исполнения контракта;
t — отрезок времени от момента заключения контракта до момента T исполнения контракта;
A_n — веса в разложении искомой функции $\mathrm{F}(x, y, t)$ по собственным функциям $\gamma(x, y)$, определяемые в контексте нахождения теоретической цены структурированного дериватива конечным условием:

[7] *Зуев Д. В. Онтология современных внебиржевых продуктов // Вестник Университета Российской академии образования. 2013. № 2.*

$$F(x, y, T) = \Phi(x, y). \tag{10}$$

Тогда

$$A_n = \int_Q^q \int_S^s \gamma_n(x, y) \cdot \varphi(x, y) \cdot \Phi(x, y)\, dx\, dy, \tag{11}$$

где $\varphi(x, y)$ — весовая функция, рассматриваемая как функция плотности вероятности;
$\Phi(x, y)$ — функция выплат в момент T исполнения структурированного производного финансового инструмента;
S и Q — разделенные цены исполнения (цена исполнения по переменной x и отдельно по переменной y, из которых складывается цена исполнения K по структурированному продукту с двумя подлежащими ценовыми процессами);
s и q — максимальные значения переменных x и y в рассматриваемом периоде (включая некоторый предшествующий моменту заключения контракта период).

Одна из особенностей предложенной нами модели заключается в том, что параметризующие функции в уравнении (8) не являются априори заданными. Мы их получаем экзогенно, прибегая к формализму И. Пригожина и Г. Николиса, о чем пойдет речь ниже.

Ставится задача получения системы ортонормированных полиномов (по двум переменным) при помощи модифицированного (адаптированного под функции нескольких переменных) оператора, основанного на матрицах Ганкеля (подход Гамбургера) моментов весовой функции, понимаемой как функция плотности совместного распределения вероятностей двумерной случайной величины. Такая система многочленов является базисом для разложения функции выплат продукта. Именно базис отвечает за динамику ценового процесса во времени. Соответственно, разложение функции выплат по базису и обеспечивает эволюцию ожидаемой цены продукта во времени[8].

Весовая функция, рассматриваемая как функция плотности вероятности, представляет собой решение методом Ритца дифференциального уравнения с частными производными первого порядка в спецификации И. Пригожина и Г. Николиса:

$$\frac{dp(x, y, t)}{dt} = -\frac{dp(x, y, t)}{dx} \cdot E(x, y) - p(x, y, t) \cdot \frac{dE(x, y)}{dx} - \frac{dp(x, y, t)}{dy} \cdot G(x, y) - p(x, y, t) \cdot \frac{dG(x, y)}{dy} \tag{12}$$

Функция $p(x, y, t)$ после разделения переменных и есть весовая функция $\varphi(x, y)$[9]. В структуре уравнения — правые части уравнений движения $E(x, y)$ и $G(x, y)$ (динамическая система). Нами выработан подход к установлению их вида. Выбрана типичная нелинейность, обеспечивающая бифуркацию рождения (исчезновения) предельного цикла из сложного фокуса конечномерной динамической системы: бифуркация Пуанкаре — Андронова — Хопфа[10]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = E(x, y) = (d\mu + a(x^2 + y^2)) \cdot x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2)) \cdot y,$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = G(x, y) = (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2)) \cdot x + (d\mu + a(x^2 + y^2)) \cdot y, \tag{13}$$

---

[8] *Зуев Д. В. Производные финансовые инструменты: базис для разложения функций выплат и ценообразование структурированных деривативов // Деньги и кредит. 2015. № 3.*

[9] *Пригожин И., Николис Г. Познание сложного. Введение. Пер. с англ. Изд. 4. М.: Ленанд, 2014.*

[10] *Зуев Д. В. Производные финансовые инструменты: базис для разложения функций выплат и ценообразование структурированных деривативов.*

где a, b, c, d, μ, ω — параметры, определяемые численно[11].

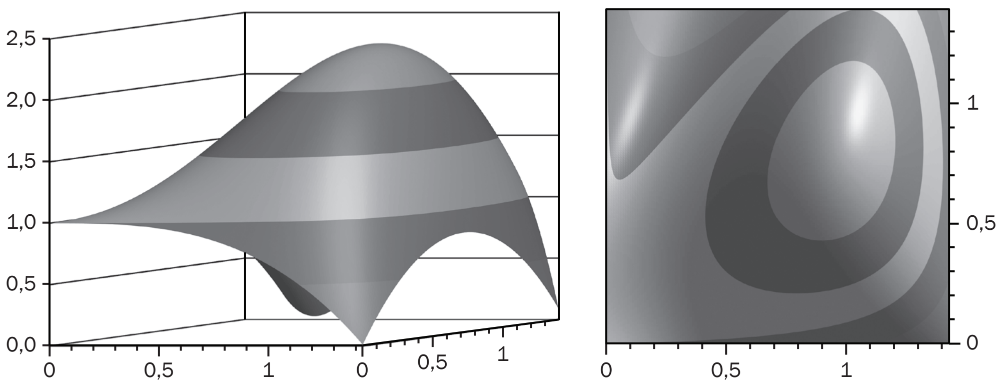
Весовая функция, рассматриваемая как функция плотности вероятности:

$$\varphi(x, y) = 0{,}024x + 3{,}18xy - 0{,}338y^3 + 5{,}753xy^2 - \\ - 5{,}951x^2y - 4{,}818xy^3 + 3{,}391x^2y^2 + 1. \qquad (14)$$

На рис. 4 представлена полученная плотность вероятностей $\varphi(x, y)$ совместного распределения и контур этого распределения для отношения ставки EURIBOR 3M к обратной котировке валютной пары EUR/USD (переменная x) и значения ставки LIBOR USD 3M (переменная y).

Рисунок 4

Поверхность и контур, заданные функцией плотности вероятностей φ(*x*, *y*)
(*x* и *y* пробегают значения от 0 до 1,5 с шагом 0,01)



Источник: рассчитано автором.

Следует обратить внимание на то, что совместное распределение асимметрично. Такой вид плотности гарантирует сохранение нетривиальных свойств совмещенных процессов.

Уравнение Дынкина (8) после разделения переменных

$$F(x, y, t) = H(x, y)\cdot\tau(t)$$

принимает следующий вид:

$$\mu_1(x, y)\cdot\frac{dH(x, y)}{dx} + \mu_2(x, y)\cdot\frac{dH(x, y)}{dy} + H(x, y)\cdot(-r - \lambda^*) + \frac{1}{2}\sigma_1^2(x, y)\cdot\frac{d^2H(x, y)}{dx^2} + \\ + \frac{1}{2}\sigma_2^2(x, y)\cdot\frac{d^2H(x, y)}{dy^2} + \sigma_1(x, y)\cdot\sigma_2(x, y)\cdot\rho_{12}\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{dH(x, y)}{dx}\right) = 0 \qquad (15)$$

$$\tau(t) = C\cdot e^{-\lambda^* t}.$$

Уравнение Пригожина (12) после разделения переменных

$$p(x, y, t) = \varphi(x, y)\cdot\check{T}(t)$$

---

[11] *Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.*

принимает следующий вид:

$$E(x, y)\cdot\frac{d\varphi(x, y)}{dx} + G(x, y)\cdot\frac{d\varphi(x, y)}{dy} + \varphi(x,y)\cdot(\frac{dE(x, y)}{dx} + \frac{dG(x, y)}{dy} - \lambda^{**}) = 0, \qquad (16)$$

$$\check{T}(t) = B\cdot e^{-\lambda^{**}t}.$$

Первые три слагаемых в уравнении (15) структурно соответствуют уравнению (16). Основываясь на структурной схожести уравнения Дынкина и уравнения Пригожина, возможно отождествить весовые функции, являющиеся их решениями. В связи с этим построенные на моментах функции плотности (функция плотности — решение дифференциального уравнения Пригожина) ортонормированные полиномы соответствуют собственным функциям инфинитезимального оператора типа Дынкина. Эти полиномы служат базисом линейного пространства и позволяют на их основе построить вырожденное ядро для получения собственных значений, которые отвечают за скорость и направление изменения ценового процесса.

Собственные значения могут быть найдены как собственные значения матрицы, элементами которой являются объемы под поверхностями попарных произведений базисных функций (без весовой функции) в той области интегрирования, где обеспечивается «единица под поверхностью» весовой функции. Оценка собственных значений может производиться также на основе квантильного преобразования. Берется матрица значений вырожденного ядра в квантильных точках (узлах двумерной сетки), и в качестве собственных значений принимаются собственные значения такой матрицы.

Учитывая, что весовая функция, базисные функции и собственные значения получены экзогенно в контексте решения уравнения Дынкина, ставится и решается вариационная задача в отношении двух пар параметризующих функций. Полученная при этом система уравнений Эйлера решается, например, методом коллокации. Таким образом, обеспечивается возможность получения обширного семейства функций мгновенной диффузии и функций мгновенного смещения при априори заданных функции плотности, базисных функциях и собственных значениях.

Полученный спектр собственных значений, система ортонормированных по двум переменным полиномов, служащая базисом для разложения функции выплат сложного продукта, обеспечивают эволюцию ожидаемой цены продукта во времени.

В качестве примера, для описания эволюции во времени ожидаемой стоимости сложного продукта, в основе которого лежат два нетривиально связанных ценовых процесса, оценим авторский структурированный дериватив[12].

Продукт представляет собой соглашение между продавцом и покупателем, которое дает покупателю право купить (продать) установленную в момент заключения контракта разницу между отношением ставки EURIBOR 3M к обратной котировке валютной пары EUR/USD (переменная x), с одной стороны, и значением ставки LIBOR USD 3M (переменная y), с другой стороны, в момент T исполнения контракта. При этом момент T определяется движением подлежащих активов относительно сложной структуры «включающих» / «выключающих» значений.

Функция выплат $\Phi(x, y)$ в момент T исполнения контракта:

$$\Phi(x, y) = x - y - K, \text{ если } (x - y) > K$$
$$\Phi(x, y) = 0, \text{ если } (x - y) \le K \qquad (17)$$

[12] *Зуев Д. В. Онтология современных внебиржевых продуктов.*

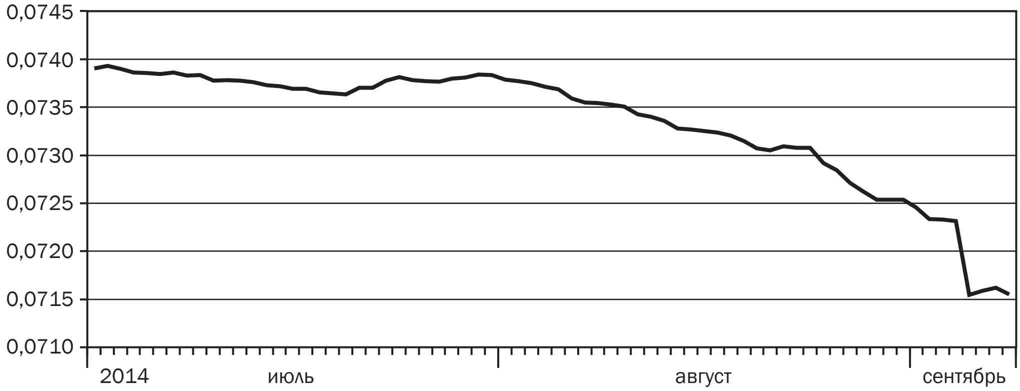
где x — значение отношения ставки EURIBOR 3M к обратной котировке валютной пары EUR/USD в момент T исполнения контракта;
y — значение ставки LIBOR USD 3M в момент T исполнения контракта;
K — страйк по контракту (принят равным значению $x - y$ в момент заключения контракта: −0,08).

Предположим, что контракт заключен 01.07.2014 на три месяца (дата исполнения — 30.09.2014). Для простоты примем момент исполнения T фиксированным. Разделенные страйки S и Q установлены как 0,15 и 0,23 соответственно. Максимальные значения s и q переменных x и y в рассматриваемом периоде (в течение девяти месяцев до момента заключения контракта и в период действия контракта) установлены как 0,251 и 0,256 соответственно.

На рис. 5 представлена эволюция во времени ожидаемой стоимости F(x, y, t) авторского продукта.

Рисунок 5

Эволюция во времени ожидаемой стоимости F(*x*, *y*, *t*) авторского продукта, в основе которого лежат два ценовых процесса



Источник: рассчитано автором.

При страйке −0,08 (−8 %), соответствующем котировке $x - y$ в момент заключения контракта, стоимость авторского структурированного деривативa равна приблизительно 0,074 (7,4 %) от номинальной стоимости (*Notional principal amount*), что, на наш взгляд, является адекватной оценкой.

Покупатель дериватива в выигрыше (*in-the-money*), если разница $x - y$ в момент исполнения окажется выше страйка (в условиях отрицательных значений котировок — в границах (−0,08; +∞)). Поскольку в последнем месяце квартала котировка (значение разницы $x - y$) колеблется в окрестности −0,17, стоимость контракта при приближении к моменту исполнения достаточно резко падает (следует также отметить, что чем ближе момент исполнения, тем ниже стоимость контракта в силу убывающей неопределенности).

ГИПОТЕЗА ОБ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ СОВЕРШЕНИЯ СДЕЛОК СО СТРУКТУРИРОВАННЫМИ ДЕРИВАТИВАМИ

В начале статьи мы выдвинули гипотезу об экономической целесообразности наличия на рынке структурированных продуктов в том смысле, что сложные инструменты обходятся рынку дешевле, чем совершение совокупности сделок, которые они покрывают.

Проведем эмпирическое доказательство гипотезы, используя полученные результаты оценки валютного опциона и авторского продукта в момент заключения сделки (табл. 2).

Таблица 2

Результаты оценки валютного опциона и авторского продукта в момент заключения сделки

№	Финансовый инструмент	Номинальная стоимость, €	Страйк	Цена финансового инструмента в момент заключения сделки	Стоимость, итого	Процент от номинальной стоимости
1	Валютный опцион	100 000	$1,25 за €1	$0,112 за контракт на покупку €1	$11 200	8,96 (*)
2	Авторский продукт	100 000	–8 % (разница между отношением ставки EURIBOR 3M к котировке валютной пары EUR/USD и значением ставки LIBOR USD 3M)	7,4 % от номинальной стоимости	€7400	7,40

*Примечание: * — пересчет номинальной стоимости в USD произведен по курсу 1,25.*
Источник: рассчитано автором.

Для обеспечения сопоставимости сравниваемых данных предположим, что цена исполнения финансового инструмента равна рыночной стоимости подлежащих активов (т. е. ситуация *at-the-money*). Оба финансовых инструмента имеют одинаковый период действия и одинаковый страйк в части котировки EUR/USD (предполагается, что за разделенным в авторском продукте страйком S, равным 0,15, стоит курс 1,25). Комиссии за совершение сделок не рассматриваются. Предполагается, что комиссия за покупку авторского структурированного дериватива равна сумме комиссий за заключение сделок, которые покрывает продукт, в частности валютный опцион.

Как видно из табл. 2, затраты на покупку авторского продукта на 1,56 процентного пункта (на 17,4 %) ниже затрат на покупку валютного опциона.

На первый взгляд такая оценка может показаться неадекватной, поскольку в отличие от валютного опциона (EUR/USD) за авторским продуктом стоят три ценовых процесса (EUR/USD, EURIBOR 3M, LIBOR USD 3M), что влечет за собой более высокие риски. По нашему же мнению, полученная цена является следствием нетривиальной взаимосвязи подлежащих активов, торгуемых на валютном рынке и рынке ссудного капитала. Данная взаимосвязь описывается моделью Манделла — Флеминга[13], которая является расширенной версией модели IS-LM, позволяющей анализировать воздействие макроэкономической политики государства как на внутреннее, так и на внешнее равновесие. Вкратце поясним суть модели Манделла — Флеминга.

Предположим, что внутренняя ставка процента (LIBOR USD 3M, США) выше внешней (EURIBOR 3M, европейские страны). В этом случае для иностранных инвесторов внутренние активы данной страны станут более привлекательными (в силу их более высокой доходности), и они будут стремиться их приобрести. В то же время резиденты данной страны воздержатся от покупки иностранных активов и сочтут целесообразным заимствовать за границей по более низким процентным ставкам. В результате увеличится приток капитала в страну и сократится его отток за границу.

Если страна при этом использует режим плавающего курса национальной валюты, то чистый приток капитала в страну обусловит, при прочих равных условиях, повышение курса национальной валюты (EUR/USD). Повышение валютного курса, в свою очередь, приведет к сокращению чистого экспорта. Кривая IS (*Investment-Saving*) будет смещаться влево до тех пор, пока будет существовать тенденция к повышению валютного курса (EUR/USD), т. е. пока внутренняя процентная ставка (LIBOR USD 3M) не сравняется с внешней (EURIBOR 3M).

---

[13] *Fleming J. M. Domestic Financial Policies under Fixed and Floating Exchange Rates // IMF Staff Papers. 1962. № 9; Mundell R. A. Capital Mobility and Stabilization Policy under Fixed and Flexible Exchange Rates // Canadian Journal of Economic and Political Science. 1963. Vol. 29. № 4.*

Если же страна поддерживает фиксированный курс своей валюты и внутренняя процентная ставка оказывается выше внешней, то в целях недопущения повышения валютного курса выше зафиксированного уровня регулятор должен будет проводить интервенции на валютном рынке, покупая иностранную валюту и продавая национальную. Предложение денег будет увеличиваться, и кривая LM (*Liquidity-Money*) будет сдвигаться вправо, пока внутренняя процентная ставка не сравняется с внешней и приток капитала прекратится.

Аналогичным образом можно показать, что будет происходить при разных режимах валютного курса, если внутренняя процентная ставка будет ниже внешней.

Таким образом, объект покупки в авторском деривативе за счет влияния подлежащих ценовых процессов друг на друга подвержен определенной «балансировке» и в связи с этим относительно предсказуем в среднесрочном периоде, в отличие от движения котировки валюты как одномерного ценового процесса.

Если структурированный продукт разработан с учетом фундаментальных законов рынка, то подобный инструмент полезен рынку и обходится дешевле, чем совершение совокупности сделок, которые он покрывает.

ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Проведена оценка теоретической стоимости дериватива с одним подлежащим активом (одномерный ценовой процесс) по широко используемой участниками рынка модели Блэка — Шоулза и по предложенной нами модели, основанной на решении уравнения Дынкина методом разделения переменных (методом Фурье), в ее упрощенной спецификации. Наша модель обеспечивает близость эволюции ожидаемой стоимости к наблюдаемым ценам на рынке, а также демонстрирует устойчивость относительно малых изменений исходных данных (в отличие от оценки по модели Блэка — Шоулза).

Произведена оценка сложного авторского структурированного производного финансового инструмента (двумерный ценовой процесс) по предложенной модели. Получена адекватная эволюция теоретической стоимости продукта. С использованием результатов оценки валютного опциона и авторского продукта в момент заключения сделки, на основе модели Манделла — Флеминга нами проведено эмпирическое доказательство гипотезы об экономической целесообразности наличия на рынке структурированных продуктов в терминах соотношения эволюций ожидаемых цен.

Библиография

1. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.
2. Пригожин И., Николис Г. Познание сложного. Введение / Пер. с англ. Изд. 4. М.: Ленанд, 2014.
3. Зуев Д. В. Онтология современных внебиржевых продуктов // Вестник Университета Российской академии образования. 2013. № 2.
4. Зуев Д. В. Производные финансовые инструменты: базис для разложения функций выплат и ценообразование структурированных деривативов // Деньги и кредит. 2015. № 3.
5. Информационно-консалтинговое агентство «Структурированные продукты» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.sproducts.ru/.
6. Доходности гособлигаций [Электронный ресурс] / Информационный портал Invest Future. Режим доступа: http://investfuture.ru/bonds/.
7. Volatility Indexes [Электронный ресурс] / Chicago Board Options Exchange. Режим доступа: http://www.cboe.com/micro/volatility/introduction.aspx.
8. Björk T. Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford Finance Series, 2009.
9. Fleming J. M. Domestic Financial Policies under Fixed and Floating Exchange Rates // IMF Staff Papers, 1962. № 9.
10. Mundell R. A. Capital Mobility and Stabilization Policy under Fixed and Flexible Exchange Rates // Canadian Journal of Economic and Political Science. 1963. Vol. 29. № 4.
11. The Bloomberg Professional Service (Bloomberg Terminal) [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.bloomberg.com/professional/.
12. Incapital LLC. Securities and investment banking firm [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://structuredinvestments.com/.
13. Swiss Structured Products Association [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://sspa-association.ch/home/index.aspx?lang=en&.
14. Daily Treasury Yield Curve Rates [Электронный ресурс] / U.S. Department of the Treasury. Режим доступа: http://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yield.