УДК 519.863

Ключевые слова:
оценка эффективности,
оценка риска,
функция риска,
коэффициент риска,
свертка критериев,
закон распределения

В. А. Горелик, д. ф.-м. н., проф.,
вед. науч. сотр. Вычислительного центра
им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН
(e-mail: vgor16@mail.ru)

Т. В. Золотова, д. ф.-м. н., доц.,
проф. кафедры «Прикладная математика»
Финансового университета при Правительстве РФ
(e-mail: tgold11@mail.ru)

Формирование оптимального портфеля акций российских компаний с вероятностной функцией риска

Принятие решений при формировании инвестиционного портфеля происходит в условиях неполноты информации о доходности финансовых инструментов, т. е. в условиях риска. Задача максимального снижения риска включает процедуру оценки эффективности (доходности) и риска, а затем разработку и анализ моделей поведения инвесторов на основе этих оценок. При этом выбор принципа оптимальности предполагает решение вопроса о соотношении доходности и риска портфеля. Следовательно, модель нахождения оптимального портфеля ценных бумаг представляет собой двухкритериальную задачу, для формализации которой могут использоваться различные методы свертки критериев.

В предыдущих работах[1] авторами предложены модели нахождения оптимального портфеля с использованием свертки типа отношения критериев эффективности и риска портфеля, а также линейной свертки этих критериев с коэффициентом риска. При этом в качестве оценки эффективности авторы использовали математическое ожидание случайного значения доходности портфеля, а в качестве оценки риска — функцию риска, заданную в метрике l_2^2 (дисперсия), в метрике l_2 (СКО, среднеквадратическое отклонение). В работе У. Шарпа и др.[2] было предложено рассматривать вероятностные функции риска для нахождения оптимального портфеля ценных бумаг. Это направление

[1] *Горелик В. А., Золотова Т. В. Оценка корреляции доходности инвестиционных портфелей и устойчивость фондового рынка // Государственный университет Минфина России. Финансовый журнал. 2012. № 3. С. 43–52.; Горелик В. А., Золотова Т. В. Критерии устойчивости фондового рынка, их связь с информированностью и принципами поведения инвесторов // Научно-исследовательский финансовый институт. Финансовый журнал. 2013. № 3. С. 17–28; Горелик В. А., Золотова Т. В. О некоторых оценках устойчивости фондового рынка и влиянии на них информированности инвесторов // Проблемы управления. 2013. № 6. С. 41–47 и др.*

[2] *Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции: Пер. с англ. М.: ИНФРА-М, 2004. Т. XII. 1028 с.*

получило развитие в современных работах[3]. Выпуклость множества достижимых значений математического ожидания и дисперсии портфелей дает необходимые и достаточные условия Парето-оптимальности в задаче максимизации линейной свертки с весовым коэффициентом при дисперсии. Это означает, что любая задача, решением которой является эффективный портфель, эквивалентна задаче максимизации линейной свертки при некотором значении коэффициента риска.

В статье «Об эквивалентности принципов оптимальности инвестиционного портфеля»[4] авторами рассмотрена задача определения оптимального портфеля как решение задачи на минимум вероятности того, что случайное значение доходности портфеля меньше требуемого. Получено значение коэффициента риска, при котором задача минимизации вероятностной функции риска эквивалентна задаче максимизации линейной свертки критериев «математическое ожидание — дисперсия». В данной работе рассмотрены две постановки задачи формирования портфеля: задача максимизации математического ожидания с вероятностной функцией риска в ограничениях и задача максимизации линейной свертки критериев «математическое ожидание — дисперсия» с весовым коэффициентом. Показано, что оптимальный выбор в задаче с вероятностной функцией риска в ограничениях приводит к одному из эффективных портфелей, соответствующему определенному значению коэффициента риска при дисперсии в задаче максимизации линейной свертки критериев «математическое ожидание — дисперсия». Найдено явное значение весового коэффициента, выраженное через известные начальные параметры задачи. Приведен пример нахождения оптимального портфеля акций российских компаний, подтверждающий полученные результаты, а также демонстрирующий некоторые характеристики методов нахождения оптимального портфеля.

Перечисленные результаты были получены в предположении о нормальном распределении доходностей. Следует отметить, что нормальный закон не всегда наилучшим образом характеризует случайные процессы. В частности, при моделировании некоторых процессов в экономике и финансах распределения случайных величин имеют тяжелые хвосты. К распределениям с тяжелыми правыми хвостами обычно относят такие, для которых вероятность того, что случайная величина превосходит достаточно большое x, имеет величину порядка x^{α} (например, распределения Стьюдента, Парето, гиперболическое). В упомянутой выше статье «Об эквивалентности принципов оптимальности инвестиционного портфеля» было предложено использовать двухстороннее экспоненциальное распределение, которое имеет менее тяжелый хвост, чем названные выше, но более тяжелый, чем у нормального закона. Однако нормальный закон распределения часто оказывается наиболее удобным при моделировании случайных процессов. Это объясняется его хорошими аналитическими свойствами, в частности, устойчивостью (линейная комбинация системы нормально распределенных случайных величин распределена нормально). Более того, в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей линейная комбинация достаточно большого числа сравнимых по дисперсии случайных величин с любыми законами распределения имеет приблизительно нормальный закон распределения. Кроме того, в данной работе, как будет видно далее, постановки задач включают ограничения сверху, т. е. исключают правые хвосты.

---

[3] *Горелик В. А., Золотова Т. В. Критерии оценки и оптимальности риска в сложных организационных системах. М.: ВЦ РАН, 2009. 162 с.; Fulga C. Portfolio optimization under loss aversion // European Journal of Operational Research. 2016. V. 251. № 1. P. 310–322; Kibzun A. I., Ignatov A. N. The two-step problem of investment portfolio selection from two risk assets via the probability criterion // Automation and Remote Control. 2015. T. 76. № 7. P. 1201–1220; Zhao Pan, Xiao Qingxian. Portfolio selection problem with Value-at-Risk constraints under non-extensive statistical mechanics // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2016. V. 298. P. 64–71.*

[4] *Горелик В. А., Золотова Т. В. Об эквивалентности принципов оптимальности инвестиционного портфеля // Научно-исследовательский финансовый институт. Финансовый журнал. 2014. № 2. С. 67–74.*

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ДОХОДНОСТИ С ВЕРОЯТНОСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ РИСКА В ОГРАНИЧЕНИЯХ

Предположим, что фондовый рынок характеризуется вектором математических ожиданий доходностей финансовых инструментов $\bar{r} = (\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_i, \ldots, \bar{r}_n)$, ковариационной матрицей $K = (\sigma_{ij})_{n\times n}$ и тем, что инвестор, управлением которого является вектор x (портфель ценных бумаг), основывает свое поведение на этой информации. Компоненты портфеля x_i есть доли средств, вкладываемые в финансовые инструменты из конечного списка ($i = 1, \ldots, n$).

Определим оптимальный портфель как решение задачи на максимум математического ожидания доходности портфеля при условии, что вероятность отрицательного случайного значения доходности портфеля не превышает заданного достаточно малого значения:

$$\max_x \bar{r}x,\ P(rx \le 0) \le \varepsilon,\ xe = 1, \tag{1}$$

где ε − заданное достаточно малое положительное число, $e = (1, \ldots, 1)$, P — вероятность. Здесь и далее отсутствует различие в обозначении вектора-строки и вектора-столбца; будем считать эти векторы соответствующими требованиям операций умножения матриц и векторов. Задача выбора оптимального портфеля в (1) и рассматриваемых далее задачах предполагает короткие продажи, совершающиеся путем займа ценных бумаг, который затем будет погашен такими же ценными бумагами (это отражается в отсутствии условия неотрицательности компонент вектора x).

Покажем, что задача (1) сводится к задаче выпуклого программирования, а ее решение совпадает с решением задачи максимизации линейной свертки критериев математического ожидания и СКО случайного значения доходности портфеля для некоторого значения весового коэффициента при СКО. Рассмотрим задачу

$$\max_x \bar{r}x,\ k\bar{r}x \ge (xKx)^{1/2},\ xe = 1, \tag{2}$$

для которой функция Лагранжа

$$L(x, \lambda) = \bar{r}x + \lambda(k\bar{r}x - (xKx)^{1/2}) \tag{3}$$

задана на множестве $X = \{x|xe = 1\}$, где λ — множитель Лагранжа, k — положительный коэффициент.

Лемма. Если задача выпуклого программирования (2) имеет решение x^0 и соответствующий ему множитель Лагранжа $\lambda^0 > 0$, т. е. (x^0, λ^0) — седловая точка функции (3), то x^0 является решением задачи

$$\max_x [\bar{r}x - \frac{\lambda^0}{1 + \lambda^0 k}(xKx)^{1/2}],\ xe = 1. \tag{4}$$

Доказательство леммы для полноразмерных портфелей (т. е. $x > 0$) приведено в работе В. А. Горелика, Т. В. Золотовой[5], но при наличии коротких продаж отсутствует условие неотрицательности x, т. е. любой портфель является полноразмерным.

---

[5] *Горелик В. А., Золотова Т. В. Задача выбора оптимального портфеля с вероятностной функцией риска // Современная математика и ее приложения. Тбилиси: Национальная академия наук Грузии. Том 95, 2015. С. 3–10.*

Утверждение 1. Пусть $\{r_i\}$ — система случайных величин, каждая из которых имеет нормальный закон распределения, $\bar{r}_i$ — математические ожидания, $K = (\sigma_{ij})_{n\times n}$ — ковариационная матрица и выполнены условия леммы. Тогда решение задачи (1) совпадает с решением задачи максимизации линейной свертки критериев математического ожидания и СКО случайного значения доходности портфеля:

$$\max_{x\in X}[\bar{r}x - \alpha_1(xKx)^{1/2}], \tag{5}$$

где $\alpha_1 = \dfrac{\lambda^0}{1+\lambda^0 d}$, $d = (\Phi^{-1}(1-2\varepsilon))^{-1}$, Φ — функция Лапласа, λ^0 — значение множителя Лагранжа в задаче (2).

Доказательство. Покажем, что задача (1) при сделанных предположениях сводится к задаче (2). Случайная величина rx нормально распределена, т. е.

$$P(rx \le 0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt, \tag{6}$$

где $m = \bar{r}x$ — математическое ожидание случайного значения доходности портфеля, $\sigma = (xKx)^{1/2}$ — СКО случайной величины rx. Преобразуем выражение (6), воспользовавшись функцией Лапласа[6]

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^y e^{\frac{-t^2}{2}}dt:$$

$$P(rx \le 0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{-m}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}}dz, \text{ где } z = \frac{(t-m)}{\sigma}, \text{ или } t = m + \sigma z.$$

Далее имеем

$$P(rx \le 0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-z^2}{2}}dz - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{m}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}}dz = \frac{1}{2} + \Phi(0) - \Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right).$$

По условию $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi(\frac{m}{\sigma}) \le \varepsilon$, значит, $\frac{m}{\sigma} \ge \Phi^{-1}(1-2\varepsilon)$, или $\frac{m}{\sigma} \le (\Phi^{-1}(1-2\varepsilon))^{-1}$. Обозначив $\Phi^{-1}(1-2\varepsilon) = d$, приходим к задаче выпуклого программирования (2), в которой $k = d$:

$$\max_x \bar{r}x,\ d\bar{r}x \ge (xKx)^{1/2},\ xe = 1. \tag{7}$$

Согласно лемме задача (6) эквивалентна задаче (4), т. е. задача (1) эквивалентна (4).

Если определять оптимальный портфель из решения задачи на максимум линейной свертки критериев математического ожидания и СКО случайного значения доходности портфеля (5), где $\alpha_1 > 0$ — весовой коэффициент, определяющий отношение инвестора к риску (коэффициент риска), то при $\alpha_1 = \dfrac{\lambda^0}{1+\lambda^0 d}$ задача (5) совпадает с задачей (4). Согласно лемме $\lambda^0 > 0$, а функция Лапласа принимает положительные значения, поэтому $\dfrac{\lambda^0}{1+\lambda^0 d} > 0$. Следовательно, задача (5) при $\alpha_1 = \dfrac{\lambda^0}{1+\lambda^0 d}$ эквивалентна исходной задаче (1). Утверждение доказано.

---

[6] *Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: КноРус, 2010. 658 с.*

СВЯЗЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАКСИМИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ С ВЕРОЯТНОСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ РИСКА В ОГРАНИЧЕНИЯХ И МАКСИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ — ДИСПЕРСИЯ»

Определим теперь оптимальный портфель как решение задачи на максимум линейной свертки критериев математического ожидания и дисперсии случайного значения доходности портфеля с весовым коэффициентом $\alpha > 0$:

$$\max_x[\bar{r}x - \alpha(xKx)],\ xe = 1. \tag{8}$$

Исследуем вопрос, в каком случае решения задач (1) и (8) совпадают.

Утверждение 2. Пусть x^0 — решение задачи (1), оптимальное значение множителя Лагранжа в задаче (2) $\lambda^0 > 0$, ковариационная матрица $K = (\sigma_{ij})_{n\times n}$ строго положительно определена. Тогда в задаче (8) существует весовой коэффициент α такой, что решения задач (1) и (8) совпадают.

Утверждение 2 доказывает только факт существования значения коэффициента риска α в задаче (8), при котором решения задач (1) и (8) совпадают. В следующем, 3-м утверждении получено значение коэффициента риска α в явном виде.

Утверждение 3. Пусть выполнены условия утверждения 2. Если в задаче (8) весовой коэффициент α удовлетворяет уравнению

$$4(1-\left(\frac{\bar{r}K^{-1}e}{eK^{-1}e}\right)^2 d^2)\alpha^2 - 4d^2\left(\frac{\bar{r}K^{-1}e}{eK^{-1}e}\right)\left(\bar{r}K^{-1}\bar{r}-\frac{(eK^{-1}\bar{r})^2}{eK^{-1}e}\right)\alpha +$$

$$+\left(\bar{r}K^{-1}\bar{r}-\frac{(eK^{-1}\bar{r})^2}{eK^{-1}e}\right) - d^2\left(\bar{r}K^{-1}\bar{r}-\frac{(eK^{-1}\bar{r})^2}{eK^{-1}e}\right)^2 = 0, \tag{9}$$

где $e = (1, ..., 1)$, $\bar{r}$ — вектор математических ожиданий доходностей, $d = (\Phi^{-1}(1-2\varepsilon))^{-1}$, $\varepsilon > 0$, Φ — функция Лапласа, то решения задач (1) и (8) совпадают.

Доказательства утверждений 2 и 3 читатели, интересующиеся используемым математическим аппаратом, могут найти в работе авторов[7].

Решение задачи (8) для полноразмерных портфелей (т. е. портфелей с неотрицательными компонентами) имеет вид

$$x^0(\alpha) = \frac{K^{-1}e}{eK^{-1}e} + (K^{-1}\bar{r} - \frac{eK^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}e}K^{-1}e)\frac{1}{2\alpha} \tag{10}$$

(см. в работе «Оценка корреляции доходности инвестиционных портфелей и устойчивость фондового рынка»[8]). Так как в случае коротких продаж любой портфель является полноразмерным, то задача (8) будет иметь то же решение и для случая коротких продаж.

Замечание. Можно показать, что утверждение 2 выполняется также при наличии безрискового заимствования, кредитования, отсутствия коротких продаж. Утверждение 3 о значении весового коэффициента α при отсутствии коротких продаж справедливо только для полноразмерного оптимального портфеля, а при наличии безрискового заимствования и кредитования формула (9) изменится в силу того, что поменяется размерность вектора ожидаемых доходностей $\bar{r}$.

---

[7] *Горелик В. А., Золотова Т. В. Задача выбора оптимального портфеля с вероятностной функцией риска. С. 3–10.*

[8] *Горелик В. А., Золотова Т. В. Оценка корреляции доходности инвестиционных портфелей и устойчивость фондового рынка. С. 43–52.*

ФОРМИРОВАНИЕ ПОРТФЕЛЯ АКЦИЙ КОМПАНИЙ «АЭРОФЛОТ», МТС И «МЕГАФОН» С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗРАБОТАННЫХ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ СРЕДСТВ

Инвесторы при нахождении своего оптимального портфеля, стремясь избежать риска, затрудняются в выборе типа модели, учитывающей эффективность и риск. В настоящее время свои услуги для лиц, принимающих решения (ЛПР), предлагают различные брокерские компании, такие как TradeWays, Forex Club или «ФИНАМ». В число предоставляемых ими услуг в т. ч. входят лекционные курсы по управлению финансами и услуги по составлению портфеля ценных бумаг. Чтобы воспользоваться услугой составления портфеля, ЛПР необходимо выбрать какую-либо стратегию, основываясь на предоставляемых аналитических обзорах или описаниях, предлагаемых на сайтах компаний. Это такие стратегии, как «Американские акции», «Антикризисная», «Семь самураев» и т. д. Далее, в зависимости от услуг, предлагаемых компанией, будет предоставлен или список активов, подходящих под заявленные критерии, из которых инвестор самостоятельно должен будет составить портфель, или (на выбор) список управляющих, которые, отталкиваясь от предпочтений инвестора и используя его средства, будут играть на фондовом рынке. Таким образом, инвестор, выбрав стратегию, вкладывает деньги и получает или не получает прибыль в зависимости от ситуации на рынке. Но информации об объеме оцениваемых статистических данных по каждой бумаге или о математической модели, используемой при составлении портфеля для той или иной стратегии, ни одна компания не предоставляет.

Инструмент для самостоятельного нахождения портфеля с использованием собственных статистических данных и определенных математических моделей на данный момент предложен в работах Т. В. Золотовой, М. С. Прохоровой[9]. Использование в качестве программного обеспечения MS Excel, MathCad или расчеты вручную неудобны для широкого круга пользователей — участников фондового рынка. В работах тех же авторов предлагается специализированная программа, которая с помощью статистических данных, вводимых ЛПР, определяет структуру портфеля, его математическое ожидание и СКО с помощью моделей, выбираемых пользователем. Также программа находит ковариацию выбранных портфелей, что помогает оценить устойчивость сделанного выбора. Таким образом, предлагаемая программа дает возможность инвестору эффективно принимать решения, используя любой объем и выборку статистических данных интересующих его ценных бумаг и определенную математическую модель.

Предлагаемая программа написана на языке программирования VB.NET. Она использует статистические данные, предварительно занесенные в файл MS Excel, для нахождения математических ожиданий случайных значений доходностей, ковариационной матрицы, дисперсии и СКО ценных бумаг (акций). Полученные статистические данные используются для составления оптимального состава портфеля ценных бумаг с помощью различных математических моделей.

Для определения оптимального состава портфеля ценных бумаг необходимо занести статистические данные (цены закрытия торговых сессий) бумаг за определенный период в файл статистики MS Excel. Затем, запустив программу, можно увидеть необходимые статистические данные по каждой бумаге. В любой момент можно посмотреть и изменить файл данных, содержащий статистику цен выбранных бумаг, перейдя по гиперссылке «Динамика OffLine» (по этой ссылке мы попадаем в файл MS Excel), или зайти на сайт www.finam.ru, на котором содержится вся статистика по любой ценной бумаге, перейдя по гиперссылке «Динамика OnLine».

---

[9] *Золотова Т. В., Прохорова М. С. Информационные аспекты и инструментальные средства оценки устойчивости на фондовом рынке. С. 28–34.; Прохорова М. С. Исследование связи решений задач на максимум линейной свертки «математическое ожидание — дисперсия» и на минимум дисперсии при ограничении по доходности // Экономика, Статистика и Информатика. Вестник УМО. 2014. № 3. С. 162–166.*

В файл MS Excel пользователь заносит статистические данные самостоятельно. Он может взять интересующие его данные с любого сайта или из собственного источника. Заполнять файл следует, начиная с первого листа, первого столбца и первой ячейки. Данные в каждой ячейке соответствуют цене определенной бумаги в определенный день. Количество данных по каждой бумаге и общее количество бумаг ограничено параметрами листа (для MS Excel 2007 размер листа составляет 1 048 576 строки и 16 384 столбца).

Таким образом, пользователь может получить статистические данные и проанализировать большое число бумаг. При этом данная версия программы ограничивает размерность формируемого портфеля цифрой 8 (это ограничение не является существенным, программа может быть легко модифицирована под бóльшую размерность). Выбор такой размерности связан с тем, что некоторые профессиональные участники фондового рынка, исходя из практических соображений, считают наиболее эффективным наличие в портфеле не более восьми разных активов (видов ценных бумаг). Дальнейшее увеличение их количества, как правило, не обеспечивает значительного снижения портфельного риска. В то же время оно может вызвать эффект чрезмерной диверсификации, отрицательные следствия которого проявляются, например, в отсутствии качественного управления портфелем, высоких расходах на поиск ценных бумаг (расходах на предыдущий анализ и т. п.), при покупке недостаточно качественных ценных бумаг (низкий уровень надежности, прибыльности и ликвидности ценных бумаг) и т. п.

В качестве источника статистических данных был выбран сайт www.finam.ru, т. к. холдинг «ФИНАМ» является одним из крупнейших брокеров в России и осуществляет брокерские услуги на основных мировых биржах. За годы работы (основан в 1994 г.) холдинг неоднократно становился лауреатом многих премий и наград. В данной работе использованы статистические данные цен акций компаний «Аэрофлот», МТС и «МегаФон» за период с января 2013 г. по январь 2014 г.[10] (рис. 1–3).

Рисунок 1

Динамика стоимости акций компании «Аэрофлот», руб.

Источник: данные котировок с Московской межбанковской валютной биржи.

[10] *Данные котировок с Московской межбанковской валютной биржи (http://www.finam.ru/analysis/profile00008/default.asp).*

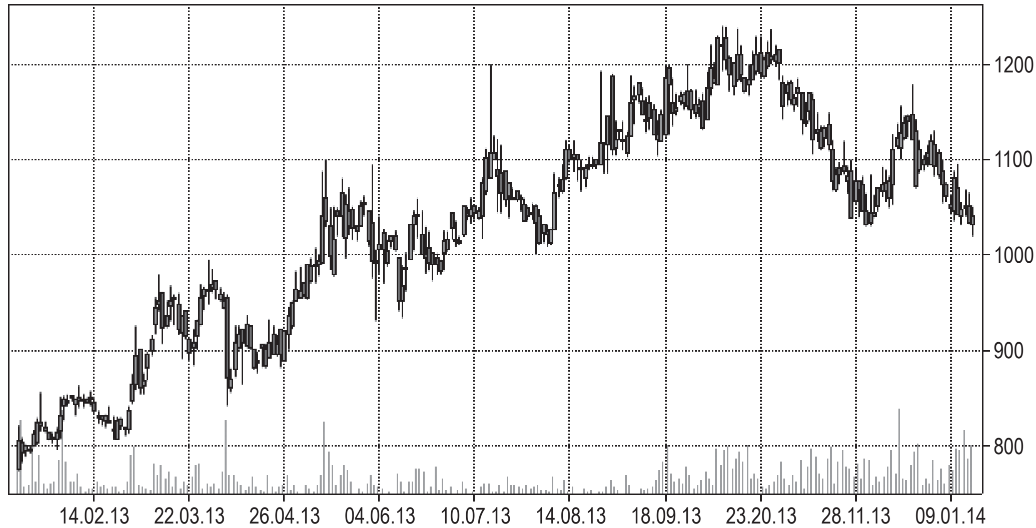
Рисунок 2

Динамика стоимости акций компании МТС, руб.

Источник: данные котировок с Московской межбанковской валютной биржи.

Рисунок 3

Динамика стоимостей акций компании «МегаФон», руб.



Источник: данные котировок с Московской межбанковской валютной биржи.

Доходности акций этих компаний определялись с использованием ежедневных цен закрытия торговых сессий. Во фрейме (GroupBox) «Обработка статистической информации» фрагмента работы программы отображаются математические ожидания доходностей ценных бумаг за каждый рабочий день, СКО и ковариации всех восьми ценных бумаг. Для акций компаний «Аэрофлот», МТС и «МегаФон» имеем вектор математических ожиданий доходностей акций $\bar{r}$ = (0,967; 0,189; 0,327), ковариационная матрица

$$K = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}466 & -0{,}18 \\ 0{,}466 & 1{,}678 & -0{,}189 \\ -0{,}18 & -0{,}189 & 0{,}379 \end{pmatrix}.$$

Пусть в задаче (1) $\varepsilon = 0{,}2$. Тогда $1 - 2\varepsilon = 0{,}6$, и по таблице значений функции Лапласа имеем $\Phi^{-1}(1 - 2\varepsilon) = 0{,}85$, а $d = (\Phi^{-1}(1 - 2\varepsilon))^{-1} = 1{,}176$. Решая задачу (7), эквивалентную (1) согласно утверждению 1, при $d = 1{,}176$ получаем оптимальный состав портфеля $x^0 = (13{,}85,\ -7{,}518,\ -5{,}332)$. Коэффициент риска α в задаче (8), найденный из решения уравнения (9) при $d = 1{,}176$, есть $\alpha = 0{,}036$. Тогда по формуле (10) состав портфеля $x^0 = (13{,}042,\ -7{,}064,\ -4{,}978)$. Приблизительное совпадение решений задач (1) и (8) можно объяснить тем, что решение задачи (7) с нелинейными ограничениями с использованием прикладного программного обеспечения Mathcad получается весьма неточным. Отметим, что второй корень квадратного уравнения (9) есть $\alpha = 0{,}792$, которому согласно (10) соответствует портфель $(0{,}923,\ -0{,}263,\ 0{,}34)$, не совпадающий с решением задачи (7). Заметим, что высокая волатильность (акции компании МТС имеют дисперсию 167,8 %) приводит к тому, что при более малых ε ограничения задачи (7) могут не выполняться. Пусть в задаче (1) $\varepsilon = 0{,}001$. Тогда $1 - 2\varepsilon = 0{,}998$, и по таблице значений функции Лапласа имеем $\Phi^{-1}(1 - 2\varepsilon) = 3{,}09$, а $d = (\Phi^{-1}(1 - 2\varepsilon))^{-1} = 0{,}324$. Задача (7) при $d = 0{,}324$ решения не имеет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами рассмотрена задача нахождения оптимального портфеля ценных бумаг с использованием вероятностной функции риска портфеля в ограничениях для гипотезы о нормальном законе распределения случайных величин доходностей. Найдено значение коэффициента риска в модели «математическое ожидание — дисперсия», при котором задача максимизации математического ожидания доходности с вероятностной функцией риска в ограничениях эквивалентна задаче максимизации линейной свертки критериев «математическое ожидание — дисперсия».

Таким образом, если для нахождения оптимального портфеля использовать модель с вероятностной функцией риска, то результаты проведенного исследования дают возможность определять эквивалентное отношение инвестора к риску (коэффициент риска). При этом задача выпуклого программирования (7), к которой сводится задача (1), в вычислительном плане является неудобной. Это связано с видом нелинейных ограничений, которые затрудняют нахождение точного решения аналитическим путем, а численные методы дают приближенное решение с большими погрешностями. Задача (8) в вычислительном плане самая удобная и при нахождении точного решения сводится к системе линейных уравнений. Полученные в работе результаты позволяют вместо задачи (1) решать задачу (8) при определенных значениях параметров этих задач.

На основе полученных теоретических результатов найден оптимальный портфель акций российских компаний «Аэрофлот», МТС и «МегаФон». Использование инструментальных средств позволяет автоматизировать процесс обработки статистических данных и нахождения оптимальных портфелей с использованием различных математических моделей принятия решений на фондовом рынке.

Библиография

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: КноРус, 2010.
2. Горелик В. А., Золотова Т. В. Задача выбора оптимального портфеля с вероятностной функцией риска // Современная математика и ее приложения. Тбилиси: Национальная академия наук Грузии. Том 95, 2015.
3. Горелик В. А., Золотова Т. В. Критерии оценки и оптимальности риска в сложных организационных системах. М.: ВЦ РАН, 2009.
4. Горелик В. А., Золотова Т. В. Оценка корреляции доходности инвестиционных портфелей и устойчивость фондового рынка // Государственный университет Минфина России. Финансовый журнал. 2012. № 3.
5. Горелик В. А., Золотова Т. В. Об эквивалентности принципов оптимальности инвестиционного портфеля // Научно-исследовательский финансовый институт. Финансовый журнал. 2014. № 2.
6. Горелик В. А., Золотова Т. В. О некоторых оценках устойчивости фондового рынка и влиянии на них информированности инвесторов // Проблемы управления. 2013. № 6.
7. Золотова Т. В., Прохорова М. С. Информационные аспекты и инструментальные средства оценки устойчивости на фондовом рынке // Ученые записки КнАГТУ. 2014. № II–1 (18).
8. Прохорова М. С. Исследование связи решений задач на максимум линейной свертки «математическое ожидание — дисперсия» и на минимум дисперсии при ограничении по доходности // Экономика, Статистика и Информатика. Вестник УМО. 2014. № 3.
9. Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции / Пер. с англ. М.: ИНФРА-М, 2004. Т. XII.
10. Fulga C. Portfolio optimization under loss aversion // European Journal of Operational Research. 2016. V. 251. № 1.
11. Kibzun A. I., Ignatov A. N. The two-step problem of investment portfolio selection from two risk assets via the probability criterion // Automation and Remote Control. 2015. T. 76. № 7.
12. Zhao Pan, Xiao Qingxian. Portfolio selection problem with Value-at-Risk constraints under non-extensive statistical mechanics // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2016. V. 298.
13. Данные котировок с Московской межбанковской валютной биржи [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.finam.ru/analysis/profile00008/default.asp.