В. В. Тарасова, В. Е. Тарасов

Неприятие риска для инвесторов с памятью: эредитарные обобщения меры Эрроу — Пратта

Аннотация

В статье предлагается обобщение абсолютной меры непринятия риска Эрроу — Пратта для финансовых процессов с памятью. Показывается необходимость учитывать наличие памяти у инвесторов при описании их поведения. Стандартные меры неприятия риска, определяемые через производные целого порядка, фактически базируются на предположении об амнезии инвесторов, поскольку эти производные определяются свойствами функции лишь в бесконечно малой окрестности исследуемой точки (момента времени или количества богатства). Предлагается метод, позволяющий отказаться от предположения об отсутствии у инвесторов памяти об изменениях функции полезности и стоимости активов. Для учета эффектов памяти используется математический аппарат производных (интегро-дифференцирований) нецелых порядков. Выводятся формулы эредитарного обобщения меры Эрроу — Пратта с использованием подхода Пратта и рядов Тейлора с производными нецелого порядка. Приводятся примеры вычисления эредитарных мер неприятия риска.

Ключевые слова:

инвестиционные риски, непринятие риска, мера Эрроу — Пратта, функция полезности, поведение инвесторов, эффект памяти, производные нецелого порядка

JEL: *C1, C3*

В микроэкономике и финансовой теории активно используется понятие риска. Среди финансовых рисков выделяют инвестиционные риски, связанные с вложением капитала. Для описания поведения инвесторов вводятся характеристики, описывающие отношение к риску и склонность инвесторов к принятию решений в условиях риска. Понятие неприятия (избегания) риска характеризует поведение инвесторов в условиях неопределенности, их попытки уменьшить эту неопределенность [1–3]. Это понятие позволяет количественно описывать нежелание инвестора принять сделку с неопределенной выплатой по сравнению со сделкой с более определенной, но и более низкой ожидаемой выплатой. Количественные меры неприятия риска позволяют математически описывать ситуации, когда инвестор предпочитает определенный результат неопределенному. Например, инвестор, который не приемлет риск, приобретет актив с более низким, но гарантированным доходом вместо актива, который в среднем обеспечивает более высокий доход, но связан с более высоким риском потери части инвестиций.

Готовность инвестора рисковать деньгами часто описывают, используя функцию полезности. Пусть полезность денежной суммы W для инвестора выражается значением функции полезности $U(W)$. Стандартное определение меры Эрроу — Пратта, описывающей непринятие риска инвесторами, задается формулой

$$A(W) := -\frac{U^{(1)}(W)}{U^{(2)}(W)}, \tag{1}$$

где $U^{(n)}(W) = d^nU(W)/dW^n$ — стандартная производная порядка n.

Важнейшим условием применимости формулы (1) является предположение, что полезность $U = U(t)$ как функция времени может быть представлена в виде однозначной функции количества богатства $W = W(t)$. В общем случае данное предположение не выполняется, и зависимость $U(t)$ от $W(t)$ нельзя выразить в виде однозначной дифференцируемой функции полезности U = U(W). При этом полезность и количество богатства (денежной суммы) практически всегда можно рассматривать как однозначные функции времени.

Одним из важнейших факторов, порождающих неоднозначность функции полезности, является наличие у инвесторов памяти об изменениях U(t) и W(t). Инвесторы могут помнить предыдущие изменения полезности богатства U(t) и количества богатства W(t) и при повторных аналогичных изменениях U и W реагировать несколько иначе, чем это делали ранее. Как следствие полезность богатства U будет другой, несмотря на аналогичные изменения количества богатства W. Это приводит к возникновению нескольких различных значений U для одного значения W, что и порождает неоднозначность функции U = U(W).

В результате мы приходим к выводу о необходимости обобщения понятия «неприятие риска», которое будет учитывать не только неоднозначность зависимости U от W, но и наличие памяти у инвесторов. Меру неприятия риска, учитывающую наличие памяти у инвестора, мы будем называть эредитарной. Эредитарность (*hereditarity*) в данном случае означает, что мера зависит от всех изменений U(t) и W(t) на некотором конечном интервале времени, предшествующем рассматриваемому моменту t [4–6]. Данная зависимость обусловлена тем, что экономическое поведение инвесторов во многом определяется наличием у них памяти о предыдущих изменениях U(t) и W(t). Стандартная мера Эрроу — Пратта, задаваемая выражениями с производными целых порядков, предполагает, что зависимость U от W, заданная параметрически уравнениями W = W(t) и U = U(t), определяется только бесконечно малой окрестностью заданного момента времени t. Поэтому можно сказать, что стандартные меры риска применимы фактически только при условии, что инвестор обладает полной амнезией. Очевидно, что данное ограничение является очень сильным и не всегда может быть использовано для описания реального поведения инвесторов.

В данной статье выводятся формулы, позволяющие оценивать премию за риск для инвесторов с памятью, и предложены обобщения меры неприятия риска, учитывающие эффекты памяти. Для этого используется подход Пратта, описанный в статье [3], и формула Тейлора с производными Капуто нецелого порядка, доказанная в работе [7].

ПОНЯТИЕ ПАМЯТИ В ЭКОНОМИКЕ

Несмотря на использование понятия «память», мы не планируем обращаться к психологическим наукам. Отметим, что понятие «память» активно используется не только в психологии, но и в физике [8–10]. В данной статье мы хотим учесть эффекты памяти при описании финансовых и экономических процессов. Описать память у инвесторов и экономических агентов с точки зрения психологических наук представляется трудной задачей, которая не ставится в данной статье. Мы используем понятие «память» для финансовых и экономических процессов аналогично использованию этого понятия в физике [10, с. 417–419]. Памятью будем называть усредненную характеристику, отражающую некоторое свойство самого процесса, а именно зависимость процесса в текущий момент времени от состояний этого процесса в прошлом.

Под финансовым и экономическим процессом с памятью подразумевается процесс, состояние которого зависит не только от изменений экономических показателей и факторов (эндогенных и экзогенных переменных) в данный момент времени, но и от их значений в предыдущие моменты времени на некотором конечном интервале времени. Учет эффекта памяти проявляется в том, что при одинаковых повторных изменениях экономического фактора зависящий от него экономический показатель может меняться по-другому. Это порождает неоднозначные зависимости показателя от фактора [11; 12]. Неоднозначность фактически связана с тем, что субъекты экономической деятельности помнят предыдущие изменения этого фактора и показателя и поэтому могут реагировать уже по-другому. В результате, несмотря на то что фактор меняется аналогичным образом, поведение показателя будет другим.

Поясним теперь более подробно, что мы будем подразумевать, говоря о финансовом или экономическом процессе с памятью и об эффектах памяти. Предположим, что в экономическом или финансовом процессе некоторая эндогенная переменная — показатель $Y(t)$ связана с экзогенной переменной — фактором $X(t)$, и эту зависимость можно описать линейным уравнением

$$Y(t) = \int_0^t M(t-\tau)\cdot X(\tau)d\tau, \qquad (2)$$

где $M(t)$ — некоторая функция, которую будем называть функцией памяти. Рассмотрим следующие специальные случаи уравнения (2) и функции памяти: (I) отсутствие памяти; (II) полная (совершенная, идеальная) память (*complete memory*); (III) угасающая память (*fading memory*) степенного типа.

(I) Отсутствие памяти. Для системы без памяти зависимость функции памяти от времени имеет вид:

$$M(t-\tau) = M(t)\cdot\delta(t-\tau), \qquad (3)$$

где $\delta(t-\tau)$ — дельта-функция Дирака. Отсутствие памяти означает, что экономический показатель (эндогенная переменная) $Y(t)$ определяется фактором (экзогенной переменной) $X(t)$ только в момент времени t. Подставляя выражение (3) в уравнение (2), получаем

$$Y(t) = \int_0^t M(t)\cdot\delta(t-\tau)\cdot X(\tau)d\tau = M(t)\cdot X(t). \qquad (4)$$

Уравнение (4) является уравнением экономического (или финансового) мультипликатора и соответствует процессам с полным отсутствием памяти. Этот процесс связывает всю последовательность всех последующих состояний с предыдущими состояниями через единственное текущее состояние в каждый момент времени t. Если функция имеет вид $M(t) = M\cdot\delta(t-T)$, то уравнение (2) принимает форму $Y(t) = M\cdot X(t-T)$, которая является уравнением мультипликатора с запаздыванием (временным лагом) с фиксированной продолжительностью T [13, с. 42].

(II) Полная память. Для учета эффектов памяти в финансовом или экономическом процессе дельта-функция заменяется на некоторую функцию с временным интервалом, в течение которого фактор $X(t)$ воздействует на показатель $Y(t)$. Если функция памяти $M(t)$ нормирована на единицу:

$$\int_0^t M(\tau)d\tau = 1, \qquad (5)$$

то она часто называется весовой функцией. Уравнения вида (2), в которых $M(t)$ удовлетворяет условию нормировки (5), часто используются для описания экономических процессов с распределенным запаздыванием [2, с. 42]. Эффект распределенного запаздывания связан с тем, что процессы в экономике происходят с конечной скоростью, и изменение экономического фактора не приводит к мгновенному изменению показателя, зависящего от него. При выполнении условия (5) финансовый и экономический процессы проходят через все состояния без всяких потерь. В этом случае говорят, что уравнение (5) соответствует полной (совершенной, идеальной) памяти.

(III) Одним из первых, кто сформулировал базовые принципы затухающей памяти, был итальянский математик Вито Вольтерра [4]. В своих работах он предложил принцип затухания (угасания) памяти [4, с. 227] и использовал интегральные уравнения для описания процессов с памятью [4, с. 226–229], которые он называл эредитарными. Угасающая память играет важную роль при описании процессов с памятью в физике [8–10]. Для описания финансовых и экономических процессов с затухающей памятью можно использовать и уравнения с производными и интегралами нецелого порядка, которые фактически являются интегро-дифференциальными уравнениями. Если предполагать степенной характер угасания (затухания) памяти, описываемой функцией M(t), то можно использовать степенную функцию памяти в виде

$$M(t-\tau)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{m}{(t-\tau)^{1-\alpha}}, \qquad (6)$$

где $\alpha > 0$ — показатель затухания, и m — вещественное число. Подставляя выражение (6) в уравнение (2), получаем интегральное уравнение нецелого порядка $\alpha > 0$ в виде

$$Y(t)=m\cdot(I^{\alpha}_{0+}X)(t), \qquad (7)$$

где I^{α}_{0+} — левосторонний интеграл Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$ по временной переменной [14, с. 85], [15, с. 69–70]. Уравнение (7) описывает мультипликатор нецелого порядка [16], а множитель m фактически является коэффициентом мультипликатора нецелого порядка.

Отметим, что в качестве экзогенной переменной в уравнении (2) вместо X(t) может выступать предельная величина $X^{(1)}(\tau) = dX(\tau)/d\tau$, или высшая производная $X^{(n)}(\tau) = d^{n}X(\tau)/d\tau^{n}$ фактора $X(t)$ по времени, где $n = [\alpha] + 1$. В этом случае уравнение (2) со степенной функцией памяти (6) принимает вид:

$$Y(t)=m\cdot(D^{\alpha}_{0+}X)(t), \qquad (8)$$

где D^{α}_{0+}— левосторонняя производная Капуто порядка $\alpha \geq 0$ по переменной t [15, с. 92]. Уравнение (8) фактически описывает уравнение экономического или финансового акселератора нецелого порядка [16], а m — коэффициент акселерации.

Отметим, что понятие финансового акселератора было введено в 1996 г. в статье Б. Бернанке с соавторами [17] для объяснения больших колебаний совокупной экономической активности, порождаемых небольшими потрясениями. Существование механизма финансового акселератора обусловлено потребностью фирм во внешнем финансировании для инвестирования. При этом возможность фирм заимствовать существенно зависит от рыночной стоимости их активов. В силу этого падение цен на активы ухудшает балансы фирм и стоимость их активов. В результате ухудшается их способность заимствовать, а это оказывает негативное влияние на их инвестиции, что, в свою очередь, ведет к снижению экономической активности и дальнейшему снижению цен на активы. Эта цепная реакция (финансовая обратная связь, кредитный цикл) называется финансовым акселератором.

Эффекты памяти могут как ослаблять, так и усиливать эффект финансового акселератора. Например, если участники финансового рынка помнят, что предыдущие изменения экономической активности (вызванные небольшими потрясениями) были не столь значительными и краткосрочными, то эффект памяти может приводить к более быстрому затуханию текущего колебания экономической активности. С другой стороны, если агенты помнят, что предыдущие колебания были довольно большими и продолжительными и существенно ухудшили экономическую ситуацию, то повторение даже более мелких потрясений может привести к более существенным изменениям экономической активности, чем это происходило ранее.

Приведем пример эффекта памяти, используя упрощенное описание динамики валютного рынка РФ в 2014 и 2015 гг., предложенное в статье [11]. Во второй половине 2014 г. интенсивное изменение курса рубля произошло впервые за последние шесть лет, поэтому при описании динамики спроса на валюту в 2014 г. можно пренебречь эффектом памяти. Покупатели практически забыли о предыдущих резких изменениях курса рубля. При описании спроса на валюту во второй половине 2015 г. можно предполагать, что покупатели помнили недавние изменения обменного курса. Они учитывали в своем поведении, что за интенсивным ослаблением рубля во втором полугодии 2014 г. последовало его заметное укрепление. В результате этого при интенсивном изменении обменного курса во второй половине 2015 г. динамика спроса на валюту изменилась по сравнению с первой половиной 2014 г., что в первом приближении можно объяснить действием эффекта памяти. Конечно, такое описание не учитывает всех факторов, влияющих на изменение спроса на валюту, однако оно может служить некоторой «игрушечной моделью» (*toy model*), которая позволяет проиллюстрировать один из механизмов эффекта памяти. При пренебрежении влиянием других факторов на динамику спроса на валюту и использовании интерполяции полиномами второй степени, в работах [11; 12] был вычислен показатель для однопараметрической памяти степенного типа.

Теория игр (как один из методов описания поведения человека) активно применяется в рамках экономической науки. Этот метод позволяет объяснить поведение экономических агентов в различных ситуациях. Отметим, что понятие «память» используется и в теории игр [18–21]. Игрой с идеальной памятью называется игра, в которой каждый из игроков всегда помнит все, что он делал во время каждого из своих ходов. Всякая игра, в которой могут играть лишь два человека (а не команды), считается игрой с идеальной памятью [18, с. 159].

В этой теории помимо дискретных игр рассматриваются дифференциальные игры, связанные с вещественной шкалой времени. В дифференциальной игре каждый игрок должен делать ход в каждый момент времени. Среди дифференциальных игр выделяются игры с полной памятью [19; 20] и с запоминанием информации [21, с. 425–445], в которых предполагается полная информированность игрока об истории игры. В таких играх поведение игрока опирается не только на информацию о позиции игры $\{t, X(t)\}$ в рассматриваемый момент времени t, но и на информацию о состояниях процесса $\{\tau, X(\tau)\}$, реализовавшегося на отрезке времени $\tau \in [0, t]$ [21, с. 425].

При построении теоретико-игровых моделей поведения инвесторов и экономических агентов со степенной памятью должно учитываться угасание (затухание) памяти [4, с. 226–229], [22, с. 395]. Модели дифференциальных игр, в которых используются производные нецелого порядка и тем самым учитывается степенное угасание памяти, предложили А. Чикрий и И. Матичин в своих работах [23–26], которые явно не связаны с экономикой. Отметим, что построение моделей экономического поведения с использованием дифференциальных игр со степенной памятью вместо игр с полной памятью в настоящее время остается открытым вопросом. Построение таких моделей требует дальнейших исследований экономического поведения в рамках теории игр. Базисом для таких построений могут стать методы и результаты, описанные в работах [23–26]. Представляет интерес построение теоретико-игровой модели принятия инвестиционных решений до и после финансового кризиса. Полезно построение теоретико-игровой модели (в рамках дифференциальных игр со степенной памятью), объясняющей динамику средневзвешенных курсов доллара США и евро к рублю на торгах ЕТС с момента введения режима плавающего валютного курса в РФ [11; 12]. Важно сравнить поведение покупателей валюты во время трех резких изменений курсов валют в 2014–2016 гг. (а именно с 05.11.2014 по 18.05.2015, с 19.05.2015 по 09.10.2015 и с 16.10.2015 по 29.04.2016), учитывая влияние эффектов памяти на спрос во время второго и третьего изменений.

В следующих разделах будут приведены точные определения производных нецелого порядка и их свойства, выведены формулы эредитарных мер неприятия риска с памятью и даны примеры их вычислений.

ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА

В связи со сказанным встает вопрос о математическом инструменте, который позволит определить новую (эредитарную) меру неприятия риска. Стандартное выражение меры Эрроу — Пратта (1) использует понятие производной целого порядка. При этом такая производная определяется поведением функции только в бесконечно малой окрестности заданной точки, в которой эта производная рассматривается. Однако помимо производных целых порядков в математике давно известны производные нецелых (дробных) порядков [14; 15]. Отметим, что производные нецелого порядка обладают набором нестандартных свойств. Например, нарушение стандартного правила Лейбница (правила дифференцирования произведения) является характеристическим свойством всех типов производных нецелого порядка [27]. Стандартное правило для дифференцирования сложной функции также нарушается. Производные и интегралы нецелых порядков активно применяются для описания различных физических процессов, характеризующихся памятью и нелокальностью [22]. В последние два десятилетия производные и интегралы нецелого порядка стали использоваться для описания различных финансовых и экономических процессов в статьях [28–31] и в наших исследованиях.

В статьях [32–36] нами было предложено использовать производные нецелого порядка для описания характеристик экономических процессов с памятью. Применение этого математического аппарата позволяет устранить пренебрежение эффектами памяти (амнезию) в моделях экономического поведения субъектов, свойственное стандартным концепциям. Производные нецелого порядка были применены для описания поведения экономических агентов [16], для вычисления предельных величин и эластичности в экономических процессах с памятью [32; 33], для детерминированного анализа в эконометрике [34]. Математический аппарат производных нецелого порядка был также применен к анализу зависимости объемов биржевых торгов по доллару США от средневзвешенного курса доллара США на торгах ЕТС в 2014 и 2015 гг. [11] и описанию роста экономики в рамках макроэкономических и межотраслевых моделей [35; 36].

В настоящее время известны различные типы производных нецелого порядка, предложенные Б. Риманом, Ж. Л. Лиувиллем, Н. Я. Сониным, А. В. Летниковым, А. Маршо, М. Риссом, Г. Вейлем, Ж. Адамаром, М. Капуто [14; 15]. В статьях [16; 32–36] мы использовали производную Капуто [15, с. 90–99]. Основной особенностью этой производной является то, что ее действие на постоянную функцию дает ноль. Использование производной Капуто приводит, например, к тому, что эластичность постоянного спроса будет равна нулю [33, с. 226].

Приведем определения производных Капуто, данные в книге [15, с. 92].

Определение 1. Левосторонняя и правосторонняя производные Капуто порядка $\alpha \geq 0$ определяются формулами:

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-n+1}}, \tag{9}$$

$$(D^{\alpha}_{b-}f)(x) := \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{\alpha-n+1}}, \tag{10}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, $a < x < b$, а $f^{(n)}(x)$ — производная целого порядка $n := [\alpha] + 1$ от функции $f(x)$ по переменной x. При этом предполагается, что функция $f(x)$ имеет производные вплоть до $(n - 1)$ порядка, которые являются абсолютно непрерывными функциями на интервале $[a, b]$.

Отметим, что для целых значений $\alpha = n$ производная Капуто совпадает с обычной производной порядка n с точностью до знака

$$(D^{n}_{a+}f)(x) = f^{(n)}(x),\ (D^{n}_{b-}f)(x) = (-1)^n f^{(n)}(x),\ (D^{0}_{a+}f)(x) = f(x). \tag{11}$$

Из этих соотношений видно, что производная Капуто включает в себя стандартные производные целых порядков как частный случай.

Для вывода формулы эредитарной меры неприятия риска, использующей аппарат производных нецелого порядка, нам понадобится формула Тейлора для левосторонней производной Капуто, которая предложена в статье [7].

Функцию f(*x*), где $a < x \leq b$, можно разложить [7, с. 289] в обобщенный ряд Тейлора с левосторонними производными Капуто, имеющий вид:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{((D_{a+}^{\alpha})^k f)(a)}{\Gamma(k\alpha + 1)} \cdot (x - a)^{k\alpha} + \frac{((D_{a+}^{\alpha})^N f)(\xi_+)}{\Gamma(N\alpha + 1)} \cdot (x - a)^{N\alpha} \tag{12}$$

для любых *x* из интервала $[a, b]$, $0 < \alpha \leq 1$ и $a \leq \xi_+ \leq x$. Например, для $N = 2$ формула (12) имеет вид:

$$f(x) = f(a) + \frac{(D_{a+}^{\alpha} f)(a)}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot (x - a)^{\alpha} + \frac{(D_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f)(\xi_1)}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot (x - a)^{2\alpha}, \tag{13}$$

где $a \leq \xi_1 \leq x$.

Используя свойства правосторонней производной [15, с. 95], функцию f(*x*) можно также представить в виде обобщенного ряда Тейлора порядка $0 < \alpha \leq 1$ с правосторонними производными Капуто:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{((D_{b-}^{\alpha})^k f)(b)}{\Gamma(k\alpha + 1)} \cdot (b - x)^{k\alpha} + \frac{((D_{b-}^{\alpha})^N f)(\xi_-)}{\Gamma(N\alpha + 1)} \cdot (b - x)^{N\alpha} \tag{14}$$

для любых x из интервала $[a, b]$ и $x \leq \xi_- \leq b$. Например, для $N = 2$ и $N = 1$ будем использовать формулы

$$f(x) = f(b) + \frac{(D_{b-}^{\alpha} f)(b)}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot (b - x)^{\alpha} + \frac{(D_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} f)(\xi_2)}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot (b - x)^{2\alpha}, \tag{15}$$

$$f(x) = f(b) + \frac{(D_{b-}^{a} f)(\xi_3)}{\Gamma(\alpha + 1)} (b - x)^{\alpha}, \tag{16}$$

где $x \leq \xi_2 \leq b$ и $x \leq \xi_3 \leq b$.

Применение производных нецелого порядка по времени позволяет описывать процессы с памятью. Важнейшей особенностью памяти является свойство ее затухания (угасание памяти). В упрощенных моделях поведения инвесторов можно использовать предположение, что существует только один параметр, который характеризует степень угасания памяти об изменениях U(*t*) и W(*t*) с течением времени *t*.

ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ЭРЕДИТАРНОЙ МЕРЫ НЕПРИЯТИЯ РИСКА

Получим формулу, позволяющую оценивать премию за риск для небольших значений риска. Для этого воспользуемся подходом Пратта, описанным в статье [3], и формулой Тейлора с производными Капуто нецелого порядка, доказанной в работе [7]. Предположим, что инвестор располагает богатством W и приобретает на него некоторый рискованный актив S, то есть W = S. Предположим, что ожидаемый доход равен V, а среднеквадратическое отклонение равно σ_z. Ожидаемое суммарное богатство инвестора после инвестиции определяется как W + V и описывается нормальным распределением $N(W + V, \sigma_z^2)$. Пусть *z* — случайная переменная, описывающая доход от приобретенного рискованного актива. В общем случае переменная *z* может принимать как положительные значения ($z > 0$), так и отрицательные ($z < 0$). Таким образом, полезность является функцией текущего уровня богатства W и случайной переменной *z*, определяющей доход от актива, т. е. полезность такой стратегии описывается функцией U(W + *z*). Ожидаемая полезность владения этим рискованным активом — E[U(W + *z*)], где E — математическое ожидание.

Пусть сумма страховки, которую готов заплатить инвестор для исключения риска, равна π. Тогда гарантированная величина (сумма) предполагаемого дохода от рискованного актива равна $(W + V - \pi)$. Полезность данной суммы для инвестора равна $U(W + V - \pi)$.

Мы будем искать такую премию за риск $\pi(W)$, чтобы инвестору с памятью был безразличен выбор между гарантированной суммой $W + V - \pi(W)$ и неопределенной ситуацией $W + z$. Данное условие приводит к тому, что ожидаемая полезность владения этим рискованным активом $E[U(W + z)]$ и полезность гарантированной суммы $U(W + V - \pi)$ должны быть равны:

$$E[U(W + z)] = U(W + V - \pi). \tag{17}$$

Данная постановка задачи аналогична задаче, описанной в классической работе Пратта [7]. Отличие заключается в том, что мы будем предполагать наличие памяти у инвестора.

Рассмотрим сначала левую часть уравнения (17). Для небольших положительных значений риска $z > 0$ выражение $U(W + z)$ можно разложить в обобщенный ряд Тейлора (13), где $x = W + z$, $\xi_+ = w_+$ и $a = W$. В результате $U(W + z)$ можно представить в виде

$$U(W + z) = U(W) + \frac{(D^{\alpha}_{w+}U)(w)}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot |z|^{\alpha} + \frac{((D^{\alpha}_{w+})^2 U)(w_+)}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot |z|^{2\alpha}, \tag{18}$$

где $W \le w_+ \le W + z$.

В формуле (18) в силу условия $z > 0$ модуль можно убрать ($|z| = z$). Формула (18) предполагает, что $z > 0$, поэтому содержит левосторонние производные. Отметим, что эту формулу нельзя применять для $z < 0$. Для отрицательных значений риска ($z < 0$), выражение $U(W + z)$ можно разложить в обобщенный ряд Тейлора (15) с правосторонними производными, где $x = W - |z|$, $b = W$ и $\xi_- = w_-$. В результате $U(W + z)$ можно представить в виде

$$U(W + z) = U(W) + \frac{(D^{\alpha}_{w-}U)(w)}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot |z|^{\alpha} + \frac{((D^{\alpha}_{w-})^2 U)(w_-)}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot |z|^{2\alpha}, \tag{19}$$

где $W - |z| \le w_- \le W$ и используются правосторонние производные.

Формулы (18) и (19) можно записать в виде одной формулы:

$$U(W + z) = U(W) + \frac{(D^{\alpha}_{w\pm}U)(w)}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot |z|^{\alpha} + \frac{((D^{\alpha}_{w\pm})^2 U)(w_\pm)}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot |z|^{2\alpha}. \tag{20}$$

Взяв математическое ожидание $E[.]$ от обеих частей выражения (20), получаем

$$U(W \pm |z|) = U(W) + \frac{(D^{\alpha}_{w\pm}U)(w)}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot E[|z|^{\alpha}] + \frac{((D^{\alpha}_{w\pm})^2 U)(w_\pm)}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot E[|z|^{2\alpha}], \tag{21}$$

где мы использовали свойства математического ожидания $E[U(W)] = U(W) \cdot E[1] = U(W)$.

Рассмотрим теперь правую часть уравнения (17), т. е. полезность $U(W + V - \pi)$ гарантированной суммы $W + V - \pi$ предполагаемого дохода от рискованного актива. Для простоты будем рассматривать случай $V = 0$. Поскольку $\pi > 0$ и $W - \pi < W$, то используя формулу (16) для $x = W - \pi$ и $b = W$, получаем

$$U(W - \pi) = U(W) + \frac{(D^{\alpha}_{w-}U)(w_\pi)}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot \pi^{\alpha}, \tag{22}$$

где $W - \pi \le w_\pi \le W$ и используются правосторонние производные Капуто (10).

Подставляя (21) и (22) в уравнение (17) с $V = 0$, получаем

$$\frac{(D^{\alpha}_{w\pm}U)(w)}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot E[|z|^{\alpha}] + \frac{((D^{\alpha}_{w\pm})^2 U)(w_\pm)}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot E[|z|^{2\alpha}] = \frac{(D^{\alpha}_{w-}U)(w_\pi)}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot \pi^{\alpha}. \tag{23}$$

В результате из уравнения (23) получаем премию за риск $\pi(W)$ в виде

$$\pi^{\alpha} = \frac{(D^{\alpha}_{w\pm}U)(w)}{(D^{\alpha}_{w-}U)(w_{\pi})} \cdot E[|z|^{\alpha}] + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} \frac{((D^{\alpha}_{w\pm})^2U)(w_{\pm})}{(D^{\alpha}_{w-}U)(w_{\pi})} \cdot E[|z|^{2\alpha}]. \quad (24)$$

Используя $D[|z|^{\alpha}] = E[|z|^{2\alpha}] - E^2[|z|^{\alpha}]$, в уравнении (24) можно явно выделить дисперсию $D[|z|^{\alpha}]$ вместо $E[|z|^{2\alpha}]$.

Отметим, что для вывода уравнения (24) мы использовали формулы Тейлора с остаточным членом, в которых равенство было не приближенным, а точным. Мы не отбрасывали старшие члены ряда Тейлора, а учли их в остаточном члене. Поэтому уравнение (24) задает точное выражение для $\pi(W)$, а не приближенное. При этом значения $w_{\pm}$ и w_{π} не являются произвольными, поскольку они заданы равенствами (18), (19) и (22), аналогично стандартной формуле Тейлора с остаточным членом в форме Коши. Другими словами, величины $w_{\pm}$ и w_{π} берутся такими, чтобы выполнялись равенства (18), (19) и (22). В качестве $w_{\pm}$ и w_{π} можно также использовать любые значения из интервалов $W \leq w_{+} \leq W + z$, $W - |z| \leq w_{-} \leq W$, $W - \pi \leq w_{\pi} \leq W$, но в этом случае выражение (24) должно рассматриваться как приближенное.

Уравнение (24) содержит слагаемое с математическим ожиданием $E[|z|^{\alpha}]$, которое может быть ненулевым для нецелых значений $\alpha \geq 0$. Отметим, что для уравнений аномальной диффузии, применяемых для описания финансовых процессов, математическое ожидание нецелой степени $\delta > 0$ случайной переменной $|z(t)|$ задается зависимостью $E[|z(t)|^{\delta}] \sim t^{\delta/\mu}$, где μ — сумма порядков дробных производных. Множитель при выражении $E[|z|^{\alpha}]$ интерпретируется как эредитарная (предельная) норма замещения

$$MRS_{\pm}(w_{\pm}, w_{\pi}, W, \alpha) := \frac{MU_{\pm}(W, W, \alpha)}{MU_{-}(W, w_{\pi}, \alpha)} = \frac{(D^{\alpha}_{w\pm}U)(w)}{(D_{w-}U)(w_{\pi})}, \quad (25)$$

где $MU_{\pm}(W, W, \alpha)$ — эредитарные предельные полезности богатства [32]. Экономический смысл этого множителя заключается в том, что его величина определяет количество блага, от которого инвестор готов отказаться ради увеличения другого блага на единицу.

В уравнении (25) для заданного рискованного актива математическое ожидание $E[|z|^{2\alpha}]$ является постоянной величиной. Поэтому абсолютное неприятие риска инвестором можно описывать соответствующим множителем при выражении $E[|z|^{2\alpha}]$. Это приводит нас к определению эредитарного обобщения меры Эрроу — Пратта в виде

$$A_{\pm}(w_{\pm}, w_{\pi}, W, \alpha) := \frac{2\cdot\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} \cdot \frac{((D^{\alpha}_{w\pm})^2U)(w_{\pm})}{(D^{\alpha}_{w-}U)(w_{\pi})}. \quad (26)$$

Эредитарные меры (26) характеризуют неприятие риска инвестором, обладающим памятью о положительных (+) и отрицательных (−) результатах дохода по рискованному активу, соответственно. В результате получаем следующее определение эредитарных мер неприятия риска.

Определение 2. Эредитарные меры Эрроу — Пратта порядка $0 < \alpha \leq 1$ для инвесторов с памятью об изменениях полезности U и богатства W определяются формулой

$$A_{\pm}(w_{\pm}, w_{\pi}, W, \alpha) := A(\alpha) \cdot \frac{((D^{\alpha}_{w\pm})^2U)(w_{\pm})}{(D^{\alpha}_{w-}U)(w_{\pi})}, \quad (27)$$

при условии существования однозначной функции полезности $U = U(W)$ и соответствующих производных Капуто, где коэффициент $A(\alpha)$ имеет вид

$$A(\alpha) := \frac{2\cdot\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}. \quad (28)$$

Отметим, что ограничение $0 < \alpha \le 1$ на параметр возникло из формул Тейлора (12) и (14). Для $\alpha = 1$ формула (26) и тем самым формулы (27–28) дают стандартную меру Эрроу — Пратта (1). Формула (24) для $\alpha = 1$ также принимает стандартный вид

$$\pi \approx -\frac{1}{2}\sigma_z^2 \cdot \frac{U^{(2)}(W)}{U^{(1)}(W)}, \tag{29}$$

где мы учли, что $E[z] = 0$ и $A(\alpha) = 1$.

При этом если функция полезности отличается только на некоторую константу, то соответствующие эредитарные меры абсолютного неприятия риска будут одинаковыми, поскольку такие функции имеют одинаковые производные нецелого порядка.

В результате мы вывели выражение (27) для эредитарных мер неприятия риска инвесторами, обладающими памятью. Как и в стандартном случае, величина π равна разности между величиной начального богатства W инвестора и величиной богатства, соответствующей гарантированной эквивалентной сумме G. В силу этого величина $\pi = W - G$ характеризует неприятие риска инвестором с памятью. Чем больше эта величина, тем менее инвестор склонен к риску. В этом случае рискованный актив должен дать инвестору более высокий ожидаемый доход по сравнению с величиной гарантированной суммы G. Только тогда инвестор, обладающий памятью, будет безразличным при выборе между гарантированной эквивалентной суммой и рискованным активом.

ЭРЕДИТАРНАЯ МЕРА ЭРРОУ — ПРАТТА И НЕОДНОЗНАЧНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Выражение (27) для эредитарной меры неприятия риска не учитывает зависимость полезности U и богатства от времени, так же как и уравнение (1) — стандартной меры неприятия риска. Рассмотрим сначала стандартную (не эредитарную) меру Эрроу — Пратта для случая явно заданной зависимости полезности $U = U(t)$ и богатства $W = W(t)$ от времени t. Будем предполагать, что функции $U = U(t)$ и $W = W(t)$ имеют нужное число производных по параметру t, а функция $W = W(t)$ имеет обратную функцию в окрестности рассматриваемой точки t. В этом случае говорят, что переменная U как функция W задана параметрически. Для функции, заданной параметрически, верна следующая формула дифференцирования:

$$\frac{d}{dw}U(W) = \frac{D_t^1 U(t)}{D_t^1 W(t)}, \tag{30}$$

где $D_t^1 = d/dt$ — стандартная производная первого порядка и $D_t^1 W(t) \neq 0$. Аналогичную формулу можно написать и для второй производной $U(W)$ по W. В результате, используя эти формулы, определение меры Эрроу — Пратта (1) можно записать в виде

$$A(W(t), U(t)) := -\frac{1}{D_t^1 W(t)} \cdot \left(\frac{D_t^2 U(t)}{D_t^1 U(t)} - \frac{D_t^2 W(t)}{D_t^1 W(t)} \right), \tag{31}$$

где $D_t^1 U(t) \neq 0$ и $D_t^1 W(t) \neq 0$. Если зависимость полезности $U = U(t)$ от богатства $W = W(t)$ является однозначной и может быть представлена в виде дифференцируемой функции $U = U(W)$, тогда формулы (31) и (1) эквивалентны в силу правила дифференцирования сложной функции. Если же эта зависимость не является однозначной, то формула (1) неприменима и следует использовать формулу (31).

Приведем пример неоднозначной зависимости полезности U от богатства W, задаваемой уравнениями

$$W(t) = 0{,}001t^2 - 0{,}2t + 70, \tag{32}$$

$$U(t) = 0{,}01t^2 - 3t + 1400, \tag{33}$$

аналогичными рассмотренным в нашей статье [17].

Приведем второй пример неоднозначной зависимости полезности U от богатства W, задаваемой уравнениями

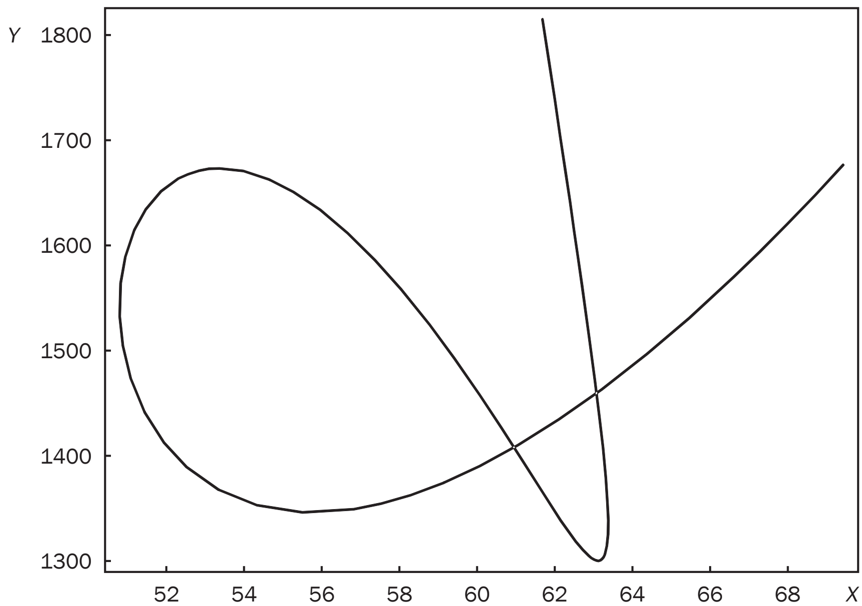
$$W(t) = 8{,}2 \cdot 10^{-9} t^4 - 1{,}5 \cdot 10^{-5} t^3 + 5{,}4 \cdot 10^{-3} t^2 - 0{,}58t + 70, \tag{34}$$

$$U(t) = 7{,}5 \cdot 10^{-6} t^4 - 3{,}5 \cdot 10^{-3} t^3 + 0{,}51 t^2 - 24t + 1700, \tag{35}$$

которые аналогичны рассмотренным в статье [12]. Зависимость U от W, заданная параметрически уравнениями (34) и (35), представлена на рис. 1.

Рисунок 1

Зависимость полезности U(*t*) от богатства W(*t*) для *t* из интервала [0, 240]



Примечание: по оси X отложена величина полезности W(t), а по оси Y — величина богатства U(t).
Источник: рассчитано авторами.

Выражение (31) позволяет нам построить обобщение меры неприятия риска на эредитарный случай, учитывающий наличие у инвестора памяти об изменениях полезности U = U(*t*) и богатства W = W(*t*) в прошедшие моменты времени. С точностью до множителя, зависящего от параметра затухания памяти, эредитарные меры Эрроу — Пратта можно определить формулой (31), в которой производные первого порядка заменены на производные Капуто ${}_0^C D_t^\alpha$ порядка $\alpha > 0$, а производные второго порядка — на квадрат производной Капуто. Используя выражение для множителя (28), полученное при выводе эредитарных мер (27), можно определить меру для случая явно заданной зависимости полезности U = U(*t*) и богатства W = W(*t*) от времени *t*. Для производных по времени мы используем только левосторонние производные, поскольку экономический процесс в момент времени *T* зависит только от изменений состояния этого процесса в прошлом, то есть для $t < T$, а правосторонняя производная Капуто определяется интегрированием по значениям $t > T$. В результате получаем следующее определение.

Определение 3. Эредитарная мера Эрроу — Пратта порядка $\alpha > 0$ для инвесторов с памятью об изменениях полезности U = U(*t*) и богатства W(*t*) на временном интервале [0, *T*] определяется формулой

$$A(T,\alpha) := A(\alpha)\cdot\frac{1}{{}_0^{C}D_T^{\alpha}W(t)}\cdot\left(\frac{({}_0^{C}D_T^{\alpha})^2U(t)}{{}_0^{C}D_T^{\alpha}U(t)} - \frac{({}_0^{C}D_T^{\alpha})^2W(t)}{{}_0^{C}D_T^{\alpha}W(t)}\right), \tag{36}$$

где множитель $A(\alpha)$ задается выражением (19), а ${}_0^{C}D_t^{\alpha}$ — оператор дифференцирования по Капуто

$${}_0^{C}D_t^{\alpha}f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^T \frac{f^{(n)}(t)dt}{(T-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{37}$$

где $0 < t < T$, $n := [\alpha] + 1$, $n - 1 \le \alpha < n$.

Для $\alpha = 1$ формула (36) дает выражение (31), поскольку ${}_0^{C}D_T^{1}f(t) = f^{(1)}(T)$. Отметим, что в силу нарушения стандартного правила дифференцирования сложной функции для производных нецелого порядка формулы (27) и (36) задают разные (неэквивалентные) меры неприятия риска. Кроме этого, в общем случае при проведении вычислений следует учитывать, что квадрат оператора Капуто порядка α не равен оператору Капуто порядка 2α, т. е. $({}_0^{C}D_T^{\alpha})^2 \neq {}_0^{C}D_T^{2\alpha}$.

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЭРЕДИТАРНОЙ МЕРЫ ЭРРОУ — ПРАТТА

Для вычисления эредитарных мер неприятия риска следует использовать формулы левосторонней и правосторонней производных Капуто для степенной функции [15, с. 95], имеющие вид:

$$D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha},\ (0<\alpha<1,\ \beta>0), \tag{38}$$

$$D_{b-}^{\alpha}(b-x)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(b-x)^{\beta-\alpha},\ (0<\alpha<1,\ \beta>0), \tag{39}$$

$$D_{a+}^{\alpha}1 = D_{b-}^{\alpha}1 = 0, \tag{40}$$

где $a < x < b$.

Повторное действие производной Капуто на функцию:

$$(D_{a+}^{\alpha})^2(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-2\alpha+1)}(x-a)^{\beta-2\alpha}. \tag{41}$$

Из формулы (41) видно, что для степенной функции квадрат оператора Капуто порядка α равен оператору Капуто порядка 2α, если $\beta - 2\alpha \ge 0$.

Известно, что стандартная мера Эрроу — Пратта постоянна для функции полезности экспоненциального вида. Экспоненциальные функции не инвариантны относительно действия левосторонней и правосторонней производных Капуто нецелого порядка [15, с. 98]. Функция Миттаг — Леффлера является обобщением экспоненциальной функции [15, с. 40], поскольку для функции Миттаг — Леффлера выполняется свойство $E_1(\lambda x) = e^{\lambda x}$ для любых действительных значений λ. Известно, что функция Миттаг — Леффлера $E_{\alpha}(\lambda(x-a)^{\alpha})$ инвариантна по отношению к действию левосторонней производной Капуто порядка $\alpha > 0$ [15, с. 98]. Следует отметить, что функция Миттаг — Леффлера не инвариантна относительно действия правосторонней производной Капуто порядка $\alpha > 0$. Это не позволяет предложить явный вид функции, для которой эредитарная мера Эрроу — Пратта (27) будет постоянной в общем случае.

Отметим, что различие в математических свойствах левосторонней и правосторонней производных Капуто нецелого порядка можно интерпретировать как различие в отношении инвестора к положительным и отрицательным результатам дохода по рискованному активу.

В качестве примера вычисления эредитарной меры Эрроу — Пратта (27) рассмотрим случай степенной функции полезности

$$U(W) := (W - w_-)^{\beta}. \tag{42}$$

Для простоты будем рассматривать ситуацию, когда $w_\pi = w_-$. Используя формулу (39), эредитарная мера Эрроу — Пратта

$$A_-(w_-, w_-, W, \alpha) := \frac{2\cdot\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\cdot\frac{((D^{\alpha}_{w-})^2U)(w_-)}{(D^{\alpha}_{w-}U)(w_-)} \tag{43}$$

для функции полезности (42) получается в виде:

$$A_-(w_-, w_-, W, \alpha) = \frac{2\cdot\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta-2\alpha+1)}(W - w_-)^{-\alpha}. \tag{44}$$

Для случая $\alpha = 1$ формула (44) дает стандартное выражение

$$A_-(w_-, w_-, W, 1) = (\beta - 1)\cdot(1 - w_-)^{-1} \tag{45}$$

для функции полезности (42). Отметим, что эредитарная мера $A_+(w_+, w_\pi, W, \alpha)$ может быть вычислена аналитически только для целых степеней β. Для нецелых значений β необходимо использовать численные методы с использованием компьютеров.

Приведем пример вычисления эредитарной меры $A(T, \alpha)$, определенной формулой (36). Рассмотрим неоднозначную зависимость полезности U от богатства W, заданную параметрически в виде уравнений (32) и (33). Используя формулу

$$ {}_0^CD_T^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\cdot T^{\beta-\alpha}, \ (n-1<\alpha<n, \ \beta>n), \tag{46}$$

для функции $U(t) = 0{,}01t^2 - 3t + 1400$ получаем

$$ {}_0^CD_T^{\alpha} U(t) = \frac{0{,}01\,\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)}\cdot T^{2-\alpha} - \frac{3\,\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)}\cdot T^{1-\alpha}, \tag{47}$$

$$ ({}_0^CD_T^{\alpha})^2 U(t) = \frac{0{,}01\,\Gamma(3)}{\Gamma(3-2\alpha)}\cdot T^{2-2\alpha} - \frac{3\,\Gamma(2)}{\Gamma(2-2\alpha)}\cdot T^{1-2\alpha}. \tag{48}$$

Для функции $W(t) = 0{,}001t^2 - 0{,}2t + 70$ формула (46) дает выражения:

$$ {}_0^CD_T^{\alpha} W(t) = \frac{0{,}001\,\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)}\cdot T^{2-\alpha} - \frac{0{,}2\,\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)}\cdot T^{1-\alpha}, \tag{49}$$

$$ ({}_0^CD_T^{\alpha})^2 W(t) = \frac{0{,}001\,\Gamma(3)}{\Gamma(3-2\alpha)}\cdot T^{2-2\alpha} - \frac{0{,}2\,\Gamma(2)}{\Gamma(2-2\alpha)}\cdot T^{1-2\alpha}. \tag{50}$$

Подставляя (47–50) в формулу

$$A(T, \alpha) := \frac{2\cdot\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\cdot\frac{1}{{}_0^CD_T^{\alpha}W(t)}\cdot\left(\frac{({}_0^CD_T^{\alpha})^2U(t)}{{}_0^CD_T^{\alpha}U(t)} - \frac{({}_0^CD_T^{\alpha})^2W(t)}{{}_0^CD_T^{\alpha}W(t)}\right), \tag{51}$$

получаем следующее выражение для обобщенной меры неприятия риска:

$$A(T,\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\,(\Gamma(3-\alpha)\,\Gamma(2-\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha+1)\,\Gamma(3-2\alpha)} \cdot \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)T^2 - 100\,\Gamma(3-\alpha)T} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{T - 150\,\dfrac{\Gamma(3-2\alpha)}{\Gamma(2-2\alpha)}}{\Gamma(2-\alpha)T - 150\,\Gamma(3-\alpha)} - \frac{T - 100\,\dfrac{\Gamma(3-2\alpha)}{\Gamma(2-2\alpha)}}{\Gamma(2-\alpha)T - 100\,\Gamma(3-\alpha)} \right). \qquad (52)$$

Для $\alpha = 1$ формула (52) приводит к выражению, получаемому из формулы (45). Для $0 < \alpha < 1$ формулу (52) можно записать в виде

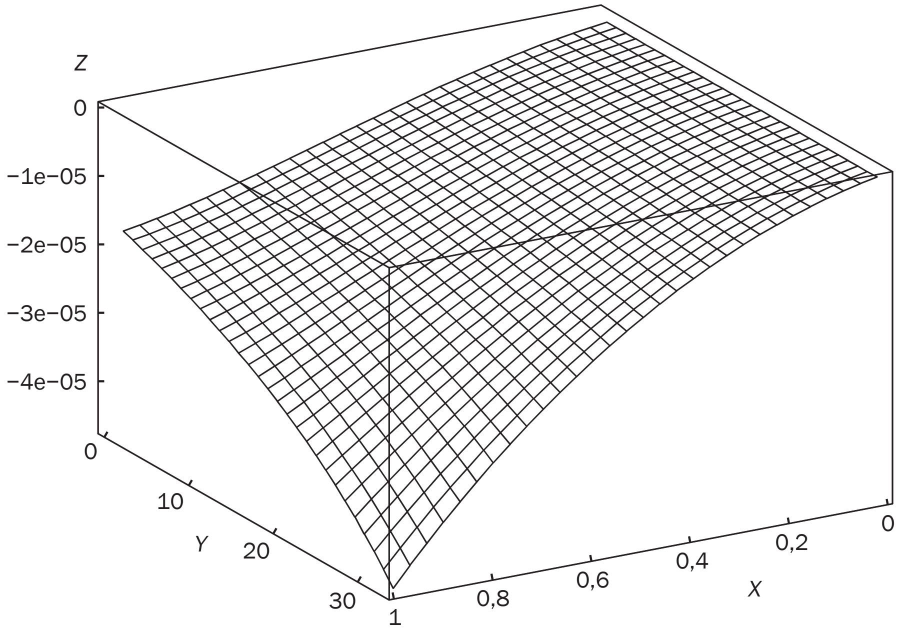
$$A(T,\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\,(\Gamma(3-\alpha)\,\Gamma(2-\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha+1)\,\Gamma(3-2\alpha)\,\Gamma(2-2\alpha)} \cdot \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)T^2 - 100\,\Gamma(3-\alpha)T} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\Gamma(2-2\alpha)T - 150\,\Gamma(3-2\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)T - 150\,\Gamma(3-\alpha)} - \frac{\Gamma(2-2\alpha)T - 100\,\Gamma(3-2\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)T - 100\,\Gamma(3-\alpha)} \right). \qquad (53)$$

Приведем зависимость величины эредитарной меры (53) от времени *T* из интервала [0; 33] и параметра α из интервала [0,01; 0,99] на рис. 2.

Рисунок 2

Зависимость эредитарной меры от *T* и α



Примечание: по оси X отложен порядок α, по оси Y — время T, а по оси Z — величина меры A(T, α).
Источник: рассчитано авторами.

Отметим, что аналитические выражения для эредитарной меры ограничиваются только степенной функцией полезности (42), суммой степенных функций и полиномиальными функциями вида (32–33) и (34–35). Для других видов функции полезности необходимо использовать компьютерное моделирование с применением численных методов. Несмотря на это ограничение, формулы (38–40) позволяют использовать полиномиальные интерполяции широкого класса функций и параметрических зависимостей U от W для вычисления эредитарных мер неприятия риска.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, при описании поведения инвесторов и их отношения к риску в общем случае следует учитывать, что инвесторы обладают памятью о предыдущих изменениях количества богатства и его полезности. Использование стандартных мер неприятия риска, определяемых через производные целого порядка, фактически базируется на предположении об амнезии инвесторов, поскольку эти производные определяются свойствами функции лишь в бесконечно малой окрестности исследуемой точки (момента времени или количества богатства). Стандартные формулы неприятия риска обобщены на случай неоднозначной зависимости полезности от богатства. Предлагается метод, базирующийся на применении производных нецелого порядка, который позволяет учитывать наличие у инвестора затухающей памяти об изменениях функции полезности и стоимости активов. Предлагаемые обобщения меры непринятия риска Эрроу — Пратта позволят более адекватно описывать финансовые процессы за счет учета эффектов памяти при описании поведения инвесторов.

Библиография

1. Эрроу К. Восприятие риска в психологии и экономической науке // THESIS. 1994. № 5. С. 81–90.
2. Arrow K. J. Aspects of the Theory of Risk Bearing / The Theory of Risk Aversion. Helsinki: Yrjo Jahnssonin Saatio, 1965. Reprinted in: Essays in the Theory of risk bearing. Chicago: Markham, 1971. P. 90–109.
3. Pratt J. W. Risk Aversion in the Small and in the Large // Econometrica. 1964. Vol. 32. № 1–2. P. 122–136.
4. Вольтерра В. Теория функционалов и интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Пер с англ. М.: Наука, 1982, 304 с.
5. Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Критерии эредитарности экономического процесса и эффект памяти // Молодой ученый. 2016. № 14 (118). С. 396–399.
6. Tarasov V. E., Tarasova V. V. Long and Short Memory in Economics: Fractional-Order Difference and Differentiation // IRA — International Journal of Management and Social Sciences. 2016. Vol. 5. № 2. P. 327–334.
7. Odibat Z. M., Shawagfeh N. T. Generalized Taylor's Formula // Applied Mathematics and Computation. 2007. Vol. 186. № 1. P. 286–293.
8. Дэй У. А. Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974, 192 с.
9. Локшин А. А., Суворова Ю. В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982, 152 с.
10. Тарасов В. Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. М.: Институт компьютерных исследований, 2011. 568 с.
11. Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Эластичность внебиржевого кассового оборота валютного рынка РФ // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2016. № 07–1 (90). С. 207–215.
12. Тарасова В. В., Тарасов В. Е. О применимости точечной эластичности спроса по цене для биржевых торгов по доллару США // Научная перспектива. 2016. № 6. С. 6–11.
13. Аллен Р. Математическая экономия. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963, 670 с.
14. Самко С. Г., Килбас А. А., Марычев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск: Наука и Техника, 1987, 688 с.
15. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 540 p.
16. Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Обобщение понятий акселератора и мультипликатора для учета эффектов памяти в макроэкономике // Экономика и предпринимательство. 2016. № 10–3 (75–3). С. 1121–1129.
17. Bernanke B., Gertler M., Gilchrist S. The Financial Accelerator and the Flight to Quality // Review of Economics and Statistics. 1996. Vol. 78. № 1. P. 1–15.
18. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1960, 420 с.
19. Субботин А. И. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с полной памятью // Доклады АН СССР. 1972. Т. 206. № 3. С. 552–555.
20. Субботин А. И. Дифференциальные игры с полной памятью / Экстремальные стратегии в позиционных дифференциальных играх. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1974. Вып. 8. С. 211–223.
21. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974, 456 с.
22. Tarasov V. E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. New York: Springer, 2010. 505 p.
23. Чикрий А. А., Матичин И. И. Игровые задачи для линейных систем дробного порядка / Труды института математики и механики УрО РАН. 2009. Том 15. № 3. С. 262–278.

24. Чикрий А. А., Матичин И. И. О линейных конфликтно управляемых процессах с дробными производными / Труды института математики и механики УрО РАН. 2011. Том 17. № 2. С. 256–270.
25. Chikriy A. A., Matychyn I. I. Riemann-Liouville, Caputo, and Sequential Fractional Derivatives in Differential Games / M. Breton, K. Szajowski (eds.). Advances in Dynamic Games. Birkhauser, Boston: Springer Science+Business Media, 2011. P. 61–81.
26. Matychyn I. I., Chikriy A. A., Onyshchenko V. V. Conflict-Controlled Processes Involving Fractional Differential Equations with Impulses // Mathematica Balkanica. Vol. 26. № 1–2, P. 159–168.
27. Tarasov V. E. No Violation of the Leibniz Rule. No Fractional Derivative // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2013. Vol. 18. № 11. P. 2945–2948.
28. Scalas E., Gorenflo R., Mainardi F. Fractional Calculus and Continuous-Time Finance // Physica A. 2000. Vol. 284. № 1–4. P. 376–384.
29. Mainardi F., Raberto M., Gorenflo R., Scalas E. Fractional Calculus and Continuous-Time Finance II: The Waiting-Time Distribution // Physica A. 2000. Vol. 287. № 3–4. P. 468–481.
30. Gorenflo R., Mainardi F., Scalas E., Raberto M. Fractional Calculus and Continuous-Time Finance III: the Diffusion Limit // Mathematical Finance. Birkhäuser, Basel, 2001. P. 171–180.
31. Tenreiro Machado J., Duarte F. B., Duarte G. M. Fractional Dynamics in Financial Indeces // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2012. Vol. 22. № 10.
32. Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Экономический показатель, обобщающий среднюю и предельную величины // Экономика и предпринимательство. 2016. № 11–1 (76–1). С. 817–823.
33. Tarasova V. V., Tarasov V. E. Elasticity for Economic Processes with Memory: Fractional Differential Calculus Approach // Fractional Differential Calculus. 2016. Vol. 6. № 2. P. 219–232.
34. Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Детерминированный факторный анализ: методы интегро-дифференцирования нецелого порядка // Актуальные проблемы экономики и права. 2016. Т. 10. № 4. С. 77–87.
35. Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Влияние эффектов памяти на мировую экономику и бизнес // Азимут научных исследований: Экономика и управление. 2016. Том 5. № 4 (17). С. 369–372.
36. Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Динамические межотраслевые модели с памятью, обобщающие модель Леонтьева // Экономика и предпринимательство. 2017. № 2–1 (79–1). С. 913–924.

Авторы

***Тарасова Валентина Васильевна**, магистрант Высшей школы бизнеса Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (e-mail: v.v.tarasova@mail.ru)*

***Тарасов Василий Евгеньевич**, д. ф.-м. н., вед. науч. сотр. Научно-исследовательского института ядерной физики имени Д. В. Скобельцына Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (e-mail: v.e.tarasov@bk.ru, tarasov@theory.sinp.msu.ru)*

V. V. Tarasova, V. E. Tarasov

Risk Aversion for Investors with Memory: Hereditary Generalizations of Arrow-Pratt Measure

Abstract

The paper proposes a generalization of the Arrow-Pratt measures of absolute risk-aversion (ARA) for the case of financial processes with memory. The authors take into account the presence of the investors'memory in the description of their behavior. Standard risk aversion measures, which are defined by derivatives of integer orders, are actually based on the assumption of investors' amnesia, because these derivatives are determined by the properties of the function only in an infinitesimal neighborhood of the point (point in time or amount of wealth). The authors propose a method that allows them to refuse the assumptions about absence of a memory about changes of the utility function and value of assets. In order to take into account the memory effects the authors used mathematical tools of derivatives (integro-differentiations) of non-integer orders. Formulas of hereditary generalizations *of Arrow-Pratt measure are derived by using a generalization of the Pratt approach and the Taylor series with derivatives of non-integer order. Examples of calculation of the hereditary measures of risk aversion are also suggested in the article.*

Keywords:
investment risks, risk of failure, risk aversion, Arrow-Pratt measure, utility function, investor behavior, memory effect, derivatives of non-integer order

JEL: *C1, C3*

References

1. Arrow K. Perception of RISK in Psychology and Economics. THESIS, 1994, no. 5, pp. 81–90.
2. Arrow K. J. Aspects of the Theory of Risk Bearing. The Theory of Risk Aversion. Helsinki: Yrjo Jahnssonin Saatio, 1965. Reprinted in: Essays in the Theory of Risk Bearing. Chicago: Markham, 1971, pp. 90–109.
3. Pratt J. W. Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*, 1964, Vol. 32, no. 1–2, pp. 122–136.
4. Volterra V. Theory of Functionalities and Integrated and Integro-Differential Equations. (Russian translation). Moscow, Nauka Publ., 1982. 304 p.
5. Tarasova V. V., Tarasov V. E. Criteria of the Hereditary of the Economic Process and the Effect of Memory. *Molodoj Uchenyj — Young Scientist*, 2016, no. 14 (118). pp. 396–399.
6. Tarasov V. E., Tarasova V. V. Long and Short Memory in Economics: Fractional-Order Difference and Differentiation. IRA — *International Journal of Management and Social Sciences*, 2016. vol. 5, no 2. pp. 327–334.
7. Odibat Z. M., Shawagfeh N. T. Generalized Taylor's Formula. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, vol. 186, no. 1, pp. 286–293.
8. Day W. A. The Thermodynamics of Simple Materials with Fading Memory. Moscow: Mir Publ., 1974. 192 p.
9. Lokshin A. A., Suvorova Yu. V. The Mathematical Theory of Wave Propagation in Materials with Memory. Moscow: Moscow State University Publ., 1982. 152 p.
10. Tarasov V. E. Models of Theoretical Physics with Integro-Differentiation of a Fractional Order. Moscow: Institut komp'yuternykh issledovanii Publ., 2011. 568 p.
11. Tarasova V. V., Tarasov V. E. Elasticity of the Over-the-Counter Cash Turnover of the Russian Currency Market. *Aktual'nye Problemy Gumanitarnyh i Estestvennyh Nauk — Actual Problems of the Humanities and Natural Sciences*, 2016, no. 07–1 (90), p. 207–215.
12. Tarasova V. V., Tarasov V. E. About Applicability of Dot Elasticity of Demand at the Price for the Exchange Auction on US Dollar. *Nauchnaya Perspektiva — Scientific Prospect*, 2016, no. 6, pp. 6–11.
13. Allen R. Mathematical Economics. Moscow: Publishing House of Foreign Literature, 1963. 670 p.
14. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some Applications. Minsk: Nauka i Tekhnika Publ., 1987, 688 p.
15. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006, 540 p.
16. Tarasova V. V., Tarasov V. E. Generalization of the Concepts of an Accelerator and a Multiplier for Accounting for Memory Effects in Macroeconomics. *Ekonomika i Predprinimatel'stvo — Economics and Entrepreneurship*, 2016, no. 10–3 (75–3), p. 1121–1129.
17. Bernanke B., Gertler M., Gilchrist S. The Financial Accelerator and the Flight to Quality. *Review of Economics and Statistics*, 1996, vol. 78, no. 1, pp. 1–15.
18. McKinsey J. Introduction to the Theory of Game. Moscow: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1960, 420 p.
19. Subbotin A. I. Extreme Strategies in Differential Games with full Memory. *Doklady AN SSSR — Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1972, vol. 206, no. 3, pp. 552–555.
20. Subbotin A. I. Differential Games with Full Memory / Extreme Strategies in Positional Differential Games. Sverdlovsk: IMM UNC of the USSR Academy of Sciences, 1974, vol. 8, pp. 211–223.
21. Krasovskij N. N., Subbotin A. I. Positional Differential Games. Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
22. Tarasov V. E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. New York: Springer, 2010, 505 p.
23. Chikriy A. A., Matychyn I. I. Game Problems for Linear Systems of Fractional Order / Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics. Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2009, vol. 15, no. 3, pp. 262–278.
24. Chikriy A. A., Matychyn I. I. On Linear Conflict-Controlled Processes with Fractional Derivatives. Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 256–270.
25. Chikriy A. A., Matychyn I. I. Riemann-Liouville, Caputo, and Sequential Fractional Derivatives in Differential Games / M. Breton, K. Szajowski (eds.). Advances in Dynamic Games. Birkhauser, Boston: Springer Science+Business Media, 2011, pp. 61–81.
26. Matychyn I. I., Chikriy A. A., Onyshchenko V. V. Conflict-Controlled Processes Involving Fractional Differential Equations with Impulses. *Mathematica Balkanica*, vol. 26, no. 1–2, pp. 159–168.

27. Tarasov V. E. No Violation of the Leibniz Rule. No Fractional Derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, vol. 18, no. 11, pp. 2945–2948.
28. Scalas E., Gorenflo R., Mainardi F. Fractional Calculus and Continuous-Time Finance. *Physica A*, 2000, vol. 284, no. 1–4, pp. 376–384.
29. Mainardi F., Raberto M., Gorenflo R., Scalas E. Fractional Calculus and Continuous-Time Finance II: The Waiting-Time Distribution. *Physica A*, 2000, vol. 287, no. 3–4, pp. 468–481.
30. Gorenflo R., Mainardi F., Scalas E., Raberto M. Fractional Calculus and Continuous-Time Finance III: the Diffusion Limit. Mathematical Finance. Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 171–180.
31. Tenreiro Machado J., Duarte F. B., Duarte G. M. Fractional Dynamics in Financial Indices. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012, vol. 22, no. 10.
32. Tarasova V. V., Tarasov V. E. Economic Indicator, Generalizing the Average and Limit Values. *Ekonomika i Predprinimatel'stvo — Economics and Entrepreneurship*, 2016. no. 11–1 (76–1). pp. 817–823.
33. Tarasova V. V., Tarasov V. E. Elasticity for economic processes with memory: Fractional differential calculus approach. *Fractional Differential Calculus*, 2016, vol. 6, no. № 2, pp. 219–232.
34. Tarasova V. V., Tarasov V. E. Deterministic Factor Analysis: Methods of Integro-differentiation of Non-integer Order. *Aktual'nye Problemy Ekonomiki i Prava — Actual Problems of Economics and Law*, 2016, vol. 10, no. 4, pp. 77–87.
35. Tarasova V. V., Tarasov V. E. Influence of Memory Effects on the World Economy and Business. *Azimut Nauchnyh Issledovanij: Ekonomika i Upravlenie — Azimuth of Scientific Researches: Economics and Management*, 2016, vol. 5, no. 4 (17), pp. 369–372.
36. Tarasova V. V., Tarasov V. E. Dynamic Inter-Branch Models with Memory, Generalizing the Leontief Model. *Ekonomika i Predprinimatel'stvo — Economics and Entrepreneurship*, 2017, no. 2–1 (79–1), pp. 913–924.

***Tarasova Valentina V.**, Master's Student, Higher School of Business, Lomonosov Moscow State University*
(e-mail: v.v.tarasova@mail.ru)
***Tarasov Vasily E.**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher of Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University*
(e-mail: v.e.tarasov@bk.ru, tarasov@theory.sinp.msu.ru)

Authors' affiliation:
Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russian Federation