

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИЦ (Russia) = 0.126
ESJI (KZ) = 8.997
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2020 Issue: 12 Volume: 92

Published: 28.12.2020 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



Alexander Olegovich Pak

Russian Technological University – MIREA

Master student, Moscow, Russia

Endemia@yandex.ru

Vyacheslav Alexandrovich Shein

Russian Technological University – MIREA

Master student, Moscow, Russia

slav1195@yandex.ru

MATHEMATICAL DESCRIPTION AND MODELING OF LONGITUDINAL VEHICLE DYNAMIC

Abstract: This paper presents the modelling of longitudinal vehicle dynamics, using vehicle dynamic and powertrain. Longitudinal vehicle dynamic plays key part in analyzing vehicle motions during increasing speeds and using brake systems. Computer model was developed in Matlab and CarSim, taking in the account all key characteristics of vehicle dynamic and powertrain. During the simulation vehicle speed and wheel speed were analyzed, considering slip ratio. The results show similarities between Matlab and CarSim models.

Key words: vehicle dynamic, vehicle longitudinal model, powertrain, Matlab Simulink.

Language: Russian

Citation: Pak, V. A., & Shein, V. A. (2020). Mathematical description and modeling of longitudinal vehicle dynamic. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 12 (92), 409-417.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-12-92-78> **Doi:** [crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.12.92.78](https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.12.92.78)

Scopus ASCC: 2207.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ДИНАМИКИ АВТОМОБИЛЯ

Аннотация: Эта работа представляет разработку продольной модели машины с помощью изучения динамики машины и трансмиссии. Продольная динамика машины играет важную роль в анализе поведения машины во время набора скорости или испытаний тормозных систем в продольном направлении. Была сформирована компьютерная модель в программном обеспечении Simulink Matlab и CarSim, принимая во внимание все ключевые характеристики динамики автомобиля и трансмиссии. Были изучены как скорость автомобиля, так и скорость прокручивания колес, учитывая коэффициент проскальзывания колеса во время проведения моделирования. Результаты показывают схожесть моделей Matlab и CarSim.

Ключевые слова: динамика автомобиля, продольная модель автомобиля, Matlab Simulink.

Введение

Полезность модели продольной динамики машины отрицать нельзя. С помощью нее происходит подавляющее количество исследований динамики машины и трансмиссии. Эта модель часто используется как основная модель объекта управления, особенно в создании системы управления тормозной системы, управлении трансмиссии, управлении

передвижения, а также адаптивным управлением перемещения. Продольная модель транспортного средства состоит из динамики транспортного средства и динамики силовой передачи, как это указано в реальных транспортных средствах [7]. Эти два компонента зависят друг от друга [2]. Многие исследователи предлагали разные варианты разработки продольной математической модели. Продольная модель машины уже была

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 0.126
ESJI (KZ) = 8.997
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

изучена в ряде работ, например, в одной из работ 2004, авторы предложили вариант продольной модели машины с учетом нелинейности продольной динамики движения машины [8]. В отличие от акцента на моделировании продольной модели машины, некоторые исследования выдвинули гипотезу развития продольной модели машины как части системы контроля. [1,5,9] Однако, в предыдущих работах описание большинства моделей были чрезмерно упрощено и осуществлено без учета таких важных аспектов, как сопротивление качению, аэродинамический эффект и загруженность пути [6]. В данной работе модель переднего колеса с 5 степенями свободы была создана с помощью программного обеспечения MATLAB Simulink и проверена через программу CarSim. В данной работе были рассмотрены итоговые данные, включая скорость машины, скорость колес (оба – в продольном измерении), а также продольное скольжение с различными вводными данными.

Модель машины

Согласно [3], продольная модель пассажирской машины была разработана на основе двумерной модели. Математическая модель была выведена на основе уравнения

движения системы с учетом всех сил, действующих в двигателе в продольном направлении. С целью создания комплексной продольной модели машины в неё была включена система трансмиссии. В процессе разработки модели были введены ряд допущений с целью проверить модель на ровном и наклонном пути с целью устранить горизонтальные и вертикальные помехи, а также с целью уравнивать скорость двигателя и скорость колес.

Модель силы тяги машины

Основной фактор при разработке модели – динамика машины и динамика колес. Облегчая модель транспортного средства можно получить двухколесную модель машины, которую можно использовать для моделирования поворота машины, ускорения или тормозной системы. Поперечные и вертикальные силы можно опустить, если учитывать, что моделирование проходит на ровной дороге. Точка силы притяжения находится рядом с центром масс, так как машина максимально устойчива во время моделирования. На рисунке 1 изображена двумерная модель движения автомобиля с передним приводом.

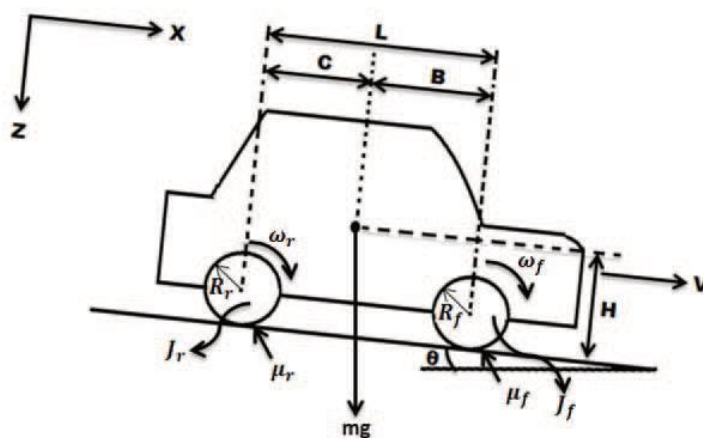


Рисунок 1. Двумерная модель движения переднеприводного автомобиля

Модель имеет общую массу m и вектор скорости V сонаправлен оси X . Угловая скорость колес выражена через ω , с радиусом R и моментом инерции J . Индексы f и r обозначают переднее и заднее колеса. Коэффициент проскальзывания между колесами и дорогой обозначен как μ . Расстояния от центра масс до центра колес обозначены как B и C . Длина трансмиссии обозначена как L . Расстояние от поверхности дороги до центра масс выражено как H . Угол наклона дороги к горизонту обозначен как θ .

Уравнение движения автомобиля

Главными факторами при составлении математической модели продольного движения являются силы направленные вдоль оси X , влияющие на тело через колеса или дорожное покрытие и пропорциональны силе реакции опоры по оси Z . Силы можно вывести как:

$$F_{x,fi} = \mu_f F_{z,fi} \quad (1)$$

$$F_{x,ri} = \mu_r F_{z,ri} \quad (2)$$

где

$i = l$ в случае левого и r в случае правого колес.

$F_{x,fi}$ = продольная сила на передних левом и правом колесах

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.997
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$F_{x,ri}$ = продольная сила на задних левом и правом колесах

$F_{r,fi}$ = сила нормали на передних левом и правом колесах

$F_{r,ri}$ = сила нормали на задних левом и правом колесах

Совместив формулу 1 и 2 выводим формулу суммы всех сил, действующих на автомобиль:

$$F_{x,TOTAL} = 2F_{x,fi} + 2F_{x,ri} \quad (3)$$

Статической нагрузкой обозначается сумма сил, действующих на каждой точке соприкосновения автомобиля. Статической нагрузкой обозначается сумма сил, действующих на каждой точке. Однако, во время ускорения и торможения появляется динамическая нагрузка, которую следует учитывать при разработке математической модели. Силы нормали на передних и задних колесах могут быть выражены следующим образом:

$$F_{z,fi} = mg \left[\frac{C}{L} \cos(\theta) + \frac{H}{L} \sin(\theta) \right] - m \left(\frac{dV}{dt} \right) \frac{H}{L} \quad (4)$$

$$F_{z,ri} = mg \left[\frac{B}{L} \cos(\theta) + \frac{H}{L} \sin(\theta) \right] - m \left(\frac{dV}{dt} \right) \frac{H}{L} \quad (5)$$

Важно учитывать продольную скорость V и угловые скорости колес ω_f и ω_r для моделирования. Если учитывать массу тела m , можно выразить следующую формулу:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-F_{x,TOTAL} + g \sin \theta + F_d(V)}{m} \quad (6)$$

где $F_d(V)$ = суммарная сила сопротивления, которую в свою очередь можно выразить как:

$$F_d = F_a + F_r \quad (7)$$

$$F_a = \frac{1}{2} \rho A C_d (V^2) \quad (8)$$

$$F_r = mg C_r (V) \quad (9)$$

При учете коэффициента скольжения, продольная скорость и скорости вращения колес будут идентичны при условии, что коэффициент скольжения будет приближен к нулю. При торможении или разгоне коэффициент скольжения равен нулю. Есть 2 варианта, где продольный коэффициент скольжения будет равен 1 или -1, при условии разгона и торможения автомобиля. Продольный коэффициент скольжения не может быть вычислен, когда скорость автомобиля и скорость вращения колес равны 0. Так как колеса и коэффициент скольжения связаны, модель колеса в данной работе описывается по магической формуле Пацейки:

$$\mu_{fi}(\lambda) = D \sin \left[C \arctan \left(B \lambda_{fi} - E \left(B \lambda_{fi} - \arctan(B \lambda_{fi}) \right) \right) \right] \quad (10)$$

$$\mu_{ri}(\lambda) = D \sin \left[C \arctan \left(B \lambda_{ri} - E \left(B \lambda_{ri} - \arctan(B \lambda_{ri}) \right) \right) \right] \quad (11)$$

где

B = коэффициент жесткости

C = коэффициент формы

D = пиковый фактор

E = коэффициент кривизны

Значения этих параметров представлены в таблице 1

Таблица 1. Параметры Пацейки для моделирования модели колеса

Коэффициенты Пацейки				
Поверхность	B	C	D	E
Сухая поверхность	10	1.9	1	0.97
Мокрая поверхность	12	2.3	0.82	1
Заснеженная поверхность	5	2	0.3	1
Покрытая льдом поверхность	4	2	0.1	1

Уравнения движения для скорости вращения колес выражается следующим образом:

$$\omega_{fi} = \frac{\tau_{efi} + \tau_{rfi} - \tau_{bfi} - \tau_{dfi}(\omega_{fi})}{J_{fi}} \quad (12)$$

$$\omega_{ri} = \frac{\tau_{eri} + \tau_{rri} - \tau_{bri} - \tau_{dri}(\omega_{ri})}{J_{ri}} \quad (13)$$

τ_{efi} , τ_{eri} = крутящий момент двигателя передаваемый на каждое колесо

τ_{bfi} , τ_{bri} = крутящий момент тормозной системы передаваемый на каждое колесо во время торможения

$$\tau_{rfi} = R_{fi} F_{x,fi} \quad (14)$$

$$\tau_{rri} = R_{ri} F_{x,ri} \quad (15)$$

$$\tau_{dfi}(\omega_{fi}) = \omega_{fi} C_{ffi} \quad (16)$$

$$\tau_{dri}(\omega_{ri}) = \omega_{ri} C_{fri} \quad (17)$$

Модель трансмиссии

Для разработки полной математической модели и для вычисления передачи крутящего момента каждому колесу в выражениях 11 и 13 необходимо выразить математическую модель трансмиссии, включающую в себя крутящий момент и динамику двигателя, а также модель коробки передач. На рисунке 2 видно моделирование крутящего момента двигателя

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.997	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

Mercedes Benz V8. Максимальный крутящий момент достигал 800 Нм при 3700 оборотах в минуту.

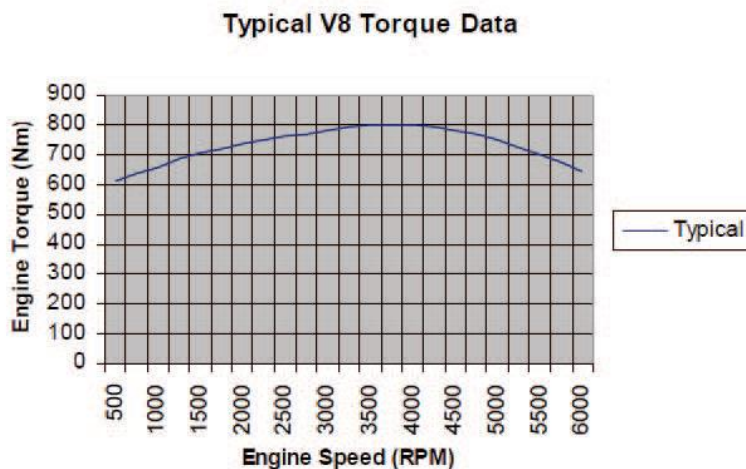


Рисунок 2. Моделирование крутящего момента

Применив метод интерполяции второго порядка можно вывести максимально точную математическую модель. Выражение крутящего момента автомобиля основано на полиноме максимального крутящего момента и описывается как:

$$T_{Max} = 528.7 + 0.152R - 0.0000217R^2 \quad (18)$$

Обороты двигателя в минуту обозначаются как R и выражены так:

$$R = (\eta_g \eta_f \omega_{fi}) = \text{переднее левое колесо} \quad (19)$$

$$R = (\eta_g \eta_f \omega_r) = \text{переднее правое колесо} \quad (20)$$

Динамика автомобиля может выражена предполагая, что дроссельная заслонка приводится в движение сервоприводом с соответствующим временным запаздыванием. Взаимосвязь между крутящим моментом передних колес и установкой дроссельной заслонки обозначается как:

$$\mu_e = 0.01\mu_t - \tau_{es}\dot{\mu}_e \quad (21)$$

$$\tau_{efi} = \mu_e T_{max} \eta_g \eta_f \quad (22)$$

Для получения лучшей продольной модели машины необходимо выразить модель трансмиссии. В этой работе используется автоматическая коробка передач, описываемая логической системой переключения передач, с предположением, что автоматическая коробка передач была разработана и включена в имитационное моделирование. В этой работе система логического переключения разработана в среде программного моделирования Matlab Simulink для отображения автоматической коробки передач. Происходит моделирование 2 сценариев. Первый сценарий при ускорении, второй при замедлении соответственно. На рисунке 3 изображен результат моделирования автоматической коробки передач.

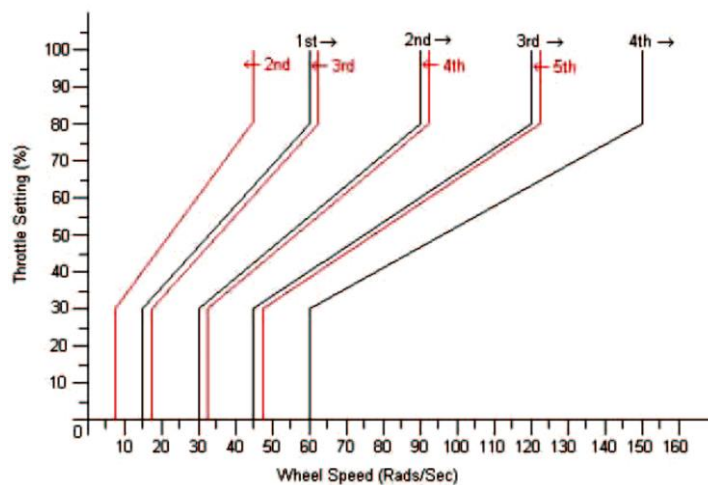


Рисунок 3. Результат моделирования автоматической коробки передач

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.997
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

Черная линия указывает на сдвиг вверх с первой передачи на четвертую передачу, в то время как красная линия указывает на сдвиг вниз с четвертой передачи на первую передачу. Сдвиг вверх и вниз разрабатывается с помощью функционального блока "if and action" в модели Simulink. Ниже показана функция логики переключения передач:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } \mu_t \leq 30\% , \omega \text{ сохраняется} \\ \text{если } 30\% < \mu_t \leq 80\% , \omega \text{ увеличивается} \\ \mu_t > 80\% , \omega \text{ сохраняется, передача увел - ся} \\ \text{если } \mu_t \geq 30\% , \omega \text{ сохраняется} \\ \text{если } 30\% \leq \mu_t < 80\% , \omega \text{ уменьшается} \\ \mu_t < 80\% , \omega \text{ сохраняется, передача умен - ся} \end{array} \right.$$

Переключение передач в этой модели зависит от ускорения и замедления автомобиля. Единая функция может быть получена путем слияния обеих функций из логики переключения и описана как:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } \mu_t > 80\% , \text{ скорость и передача увел - ся} \\ \text{если } \mu_t < 30\% , \text{ скорость и передача умен - ся} \\ \text{в ином случае скорость и передача неизменны} \end{array} \right.$$

Моделирование динамики машины включая выражения трансмиссии было проведено в среде Simulink пакета MATLAB как показано на рисунке 4. Все параметры, используемые при моделировании, будут рассмотрены в следующих двух разделах.



Рисунок 4. Продольная математическая модель в среде Matlab Simulink

Параметры моделирования

Продольная модель машины с учетом трансмиссии разработана в среде Matlab Simulink. Характеристики приведены в таблице 2.

Таблица 2. Параметры, использующиеся во время моделирования

Символ параметра	Значение
L	3.048
B	1.402
C	1.646
H	0.59
m	1653
R_j	0.3
C_d	0.30
C_r	0.004
C_{ff}	0.1
E_s	0.2
b_s	0.3
I_w	4.5

Impact Factor:

SISRA (India)	= 4.971	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
ISI (Dubai, UAE)	= 0.829	РИИЦ (Russia)	= 0.126	PIF (India)	= 1.940
GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.997	IBI (India)	= 4.260
JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 5.667	OAJI (USA)	= 0.350

Результаты моделирования

Моделирование модели прошло в 3 вариантах, 1 вариант - четверть дроссельной заслонки, 2 вариант - половина дроссельной заслонки и 3 вариант - полная дроссельная заслонка. Выходные значения системы будут сопоставлены с результатами в ПО CarSim.

Результаты моделирования четверти заслонки можно увидеть на рисунках 5 и 6.

Данные моделирования и результаты с CarSim совпадают. Максимальная скорость равна 118 км/ч в то время как результаты CarSim равны 115. Проскальзывание машины происходит в начале движения машины, во время движения проскальзывание постепенно падает и снова возрастает в конце во время торможения, как показано на рисунке 8.

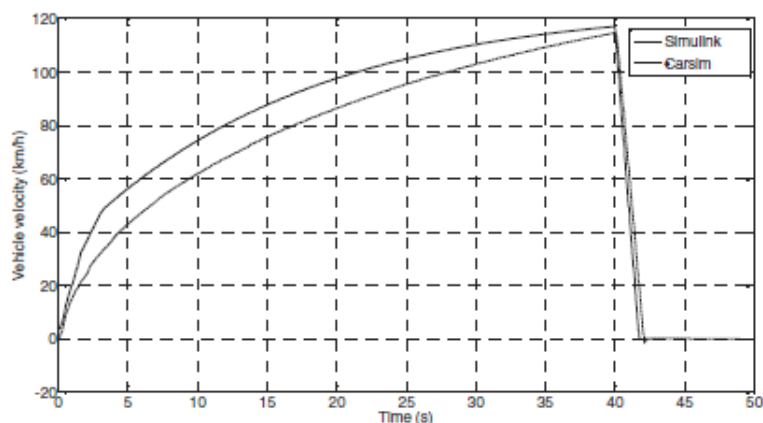


Рисунок 5. Скорость автомобиля в Matlab и CarSim

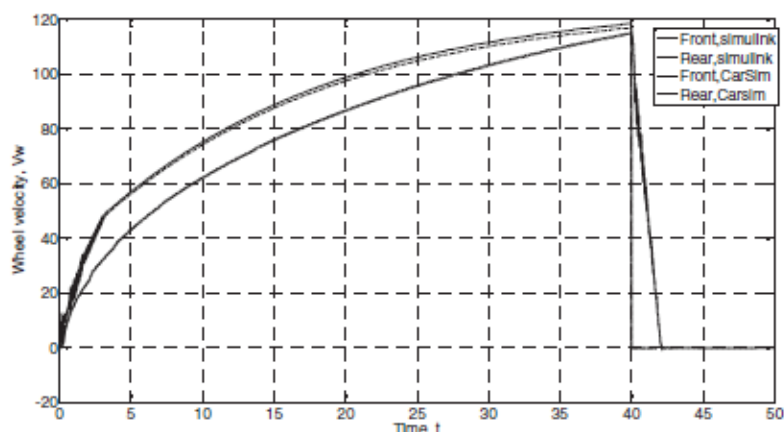


Рисунок 6. Скорость колес в Matlab и CarSim

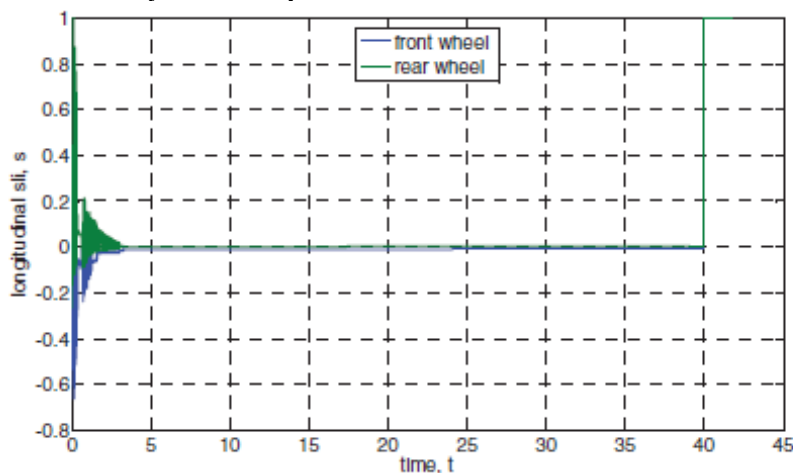


Рисунок 7. Проскальзывание колес автомобиля

Impact Factor:

ISRA (India)	= 4.971	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
ISI (Dubai, UAE)	= 0.829	РИИЦ (Russia)	= 0.126	PIF (India)	= 1.940
GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.997	IBI (India)	= 4.260
JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 5.667	OAJI (USA)	= 0.350

Результаты с половиной заслонки можно увидеть на рисунках 8 и 9. Максимальная скорость как в Matlab и CarSim равна 175 км/ч

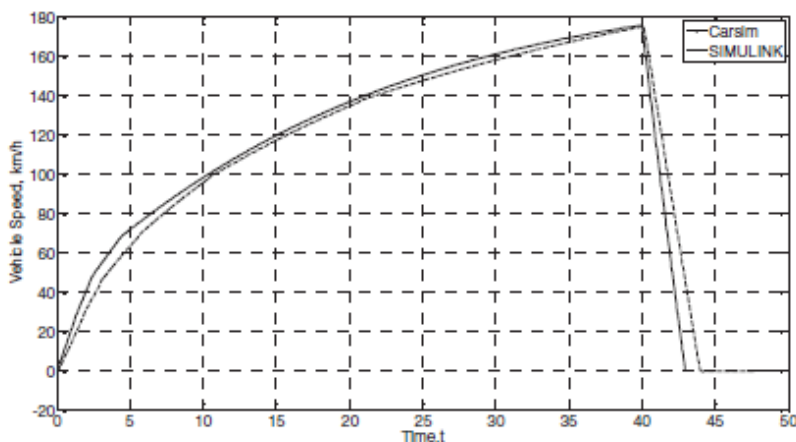


Рисунок 8. Скорость автомобиля в Matlab и CarSim

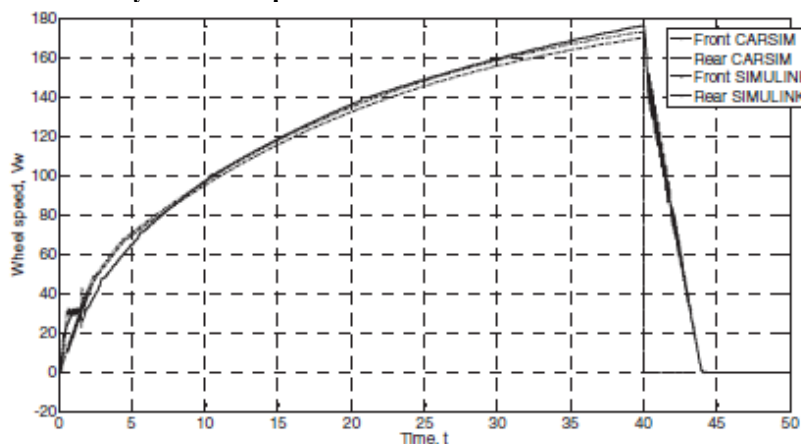


Рисунок 9. Скорость колес в Matlab и CarSim

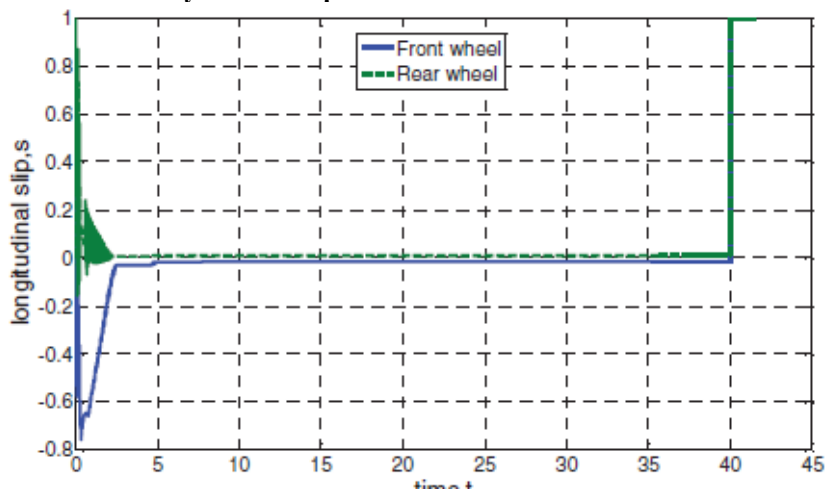


Рисунок 10. Проскальзывание колес автомобиля

При моделировании полной заслонки, скорость машины увеличивалась пропорционально скоростью колёс. Максимальная скорость при моделировании равна

210, а в CarSim 200, разница 5 процентов, графики представлены на 11 рисунке. Скорость колёс примерно равны скорости машины, как видно на рисунке 12.

Impact Factor:

ISRA (India)	= 4.971	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
ISI (Dubai, UAE)	= 0.829	ПИИЦ (Russia)	= 0.126	PIF (India)	= 1.940
GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.997	IBI (India)	= 4.260
JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 5.667	OAJI (USA)	= 0.350

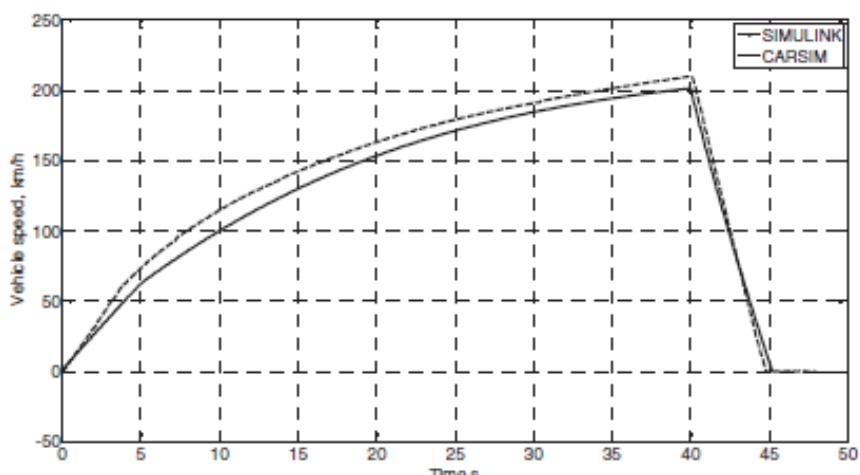


Рисунок 11. Скорость автомобиля в Matlab и CarSim

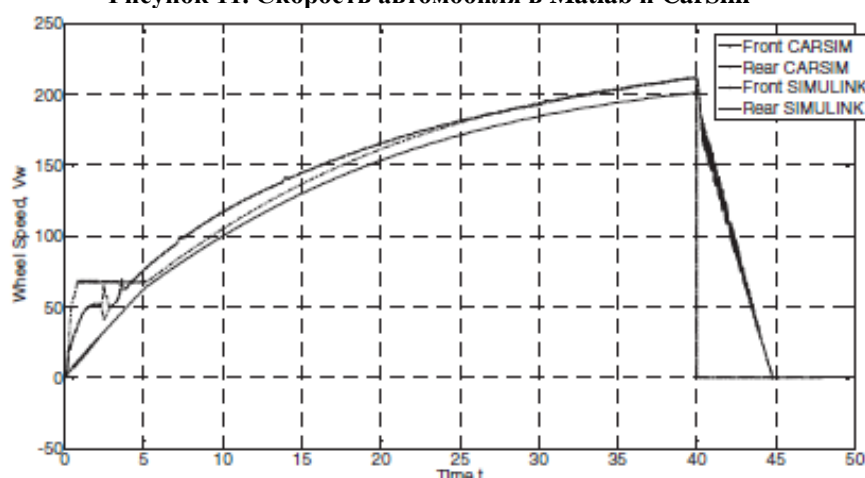


Рисунок 12. Скорость колес в Matlab и CarSim

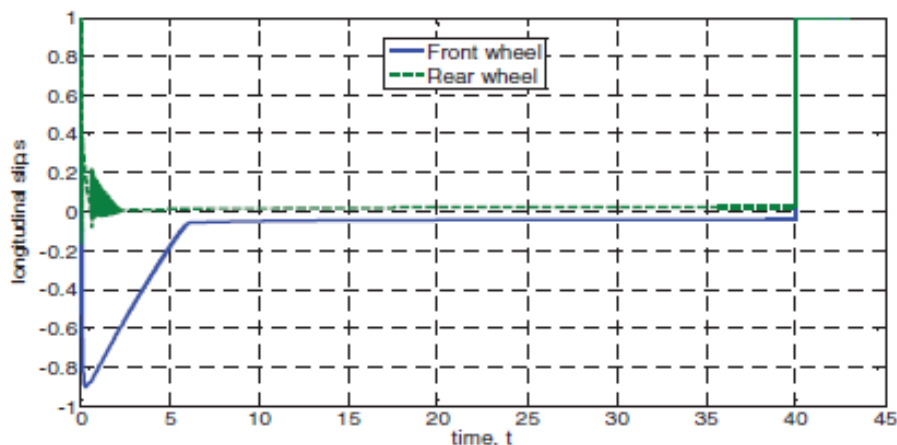


Рисунок 13. Проскальзывание колес автомобиля

Вывод

Выполненная математическая и компьютерная модели были проверены и сверены с результатами аналогичного моделирования в ПО CarSim. Во время сравнения особенности изменения графических результатов были одинаковы с максимальным отклонением в 10 процентов. Учитывая, что модели в CarSim

достаточно сложнее, это может стать причиной отличий результатов. Максимальная скорость достигла 220 км/ч показывает, что автомобиль с двигателем серии V8 имеет крутящий момент равный 800 Nm при 3700 оборотах в минуту. Продольная математическая модель подтверждена моделированиями в CarSim.

Impact Factor:	ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИИ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.997	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

References:

1. Rajamani, R. (2011). *Vehicle dynamics and control*. Springer.
2. Yao, Z., Mousseau, R., & Kao, B. G. (2003). "A powertrain model for real-time vehicle simulation." Department of Mechanical, Industrial and Manufacturing Engineering, The University of Toledo, Ford Research Company, DSC North America Proceedings, (p. 16).
3. Short, M., Pont, M. J., & Huang, Q. (2004). "Simulation of vehicle longitudinal dynamics." UK: Safety and Reliability of Distributed Embedded Systems. Embedded Systems Laboratory. University Leicester.
4. Shahbakhti, S. M., Aslani, A. R., Jazayeri, S.A., Azadi, S., & Shamekhi, A. H. (2004). *Longitudinal Vehicle Dynamics Modeling on the Basis of Engine Modeling*. No. 2004-01-1620. SAE Technical Paper.
5. Junwei, L., & Jian, W. (n.d.). "Design of anti-lock braking system on variable control structure" IEEE International Conference on Intelligent Computing and Intelligent Systems (pp. 411-415). Shandong of University Technology Shanghai, China.
6. Majdoub, E. K., Giri, F., Ouadi, H., Dugard, L., & Chaoui, F. Z. (2012). "Vehicle longitudinal motion modeling for nonlinear control." *Control Engineering Practice* 20, no. 1 (2012): 69-81.
7. Aparow, V. R., Ahmad, F., Hudha, K., & Jamaluddin, H. (2013). "Modelling and PID control of antilock braking system with wheel slip reduction to improve braking performance." *International Journal of Vehicle Safety* 6.3 (2013): 265-296.
8. Olson, J., Shaw, S. W., & Stépán, G. (2004). "Nonlinear dynamics of longitudinal vehicle traction." Proc. of th (2004): 537-545.
9. Ng, L., Clark, C.M., & Huissoon, J. P. (2008). "Reinforcement learning of adaptive longitudinal vehicle control for dynamic collaborative driving." *Intelligent Vehicles Symposium, 2008 IEEE*, pp. 907-912. IEEE, 2008.
10. Nouveliere, L., & Mammar, S. (2007). "Experimental vehicle longitudinal control using a second order sliding mode technique." *Control Engineering Practice*, 15.8 (2007): 943-95.