SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science
p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)
Year: 2020 Issue: 07 Volume: 87
Published: 30.07.2020 http://T-Science.org

QR – Issue QR – Article

Tolliboy Absalamov
unemployed
researcher
tolliboyabsalamov@gmail.com

SOME ESTIMATES FOR BISINGULAR INTEGRAL WITH LOCALLY SUMMABLE DENSITY

Abstract*: It is obtained a Zigmund type estimate for the bisingular integral in the space of Summation functions. It is constructed an invariant functional space based on the inequality.*

Key words*: bisingular integral operator, Zigmund type estimate, invariant space.*
Language: Russian
Citation: Absalamov, T. (2020). Some estimates for bisingular integral with locally summable density. *ISJ Theoretical & Applied Science, 07 (87),* 201-208.
Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-07-87-43 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.07.87.43
Scopus ASCC*: 2600.*

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ БИСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА С ЛОКАЛЬНО СУММИРУЕМЫХ ПЛОТНОСТЬЮ

Аннотация*: Получены оценки типа оценки Зигмунда для бисингулярного интеграла. На основе полученных оценок строится класс функций инвариантного относительно бисингулярного оператора.*

Ключевые слова*: бисингулярный интеграл, оценка Зигмунда, инвариантное пространство.*

Введение

Классическая теорема об ограниченности сингулярного оператора с ядром Гильберта в пространстве $L_p\,(p>1)$

$$\|\tilde{f}\|_{L_p[-\pi,\pi]} \le A_p \|f\|_{L_p[-\pi,\pi]}\,,$$

где $\tilde{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)ctg\frac{s-x}{2}ds$, а A_p –постоянная зависящая лишь от p была доказано Н. Н. Лузиным [7] при $p=2$и М. Риссом [17] при $p>1$.

В дальнейщем этот результат был перенесен в ряде работ для довольно широких классов жордановых спрямляемых кривых . Подробная предистория этого вопроса имеется в работе [11] см., кроме того , А. П. Кальдерон [13],[14] и [12].

Для изучения особого интеграла

$$\tilde{u}(x)=\int_a^b \frac{u(s)}{s-x}ds\,,\ x\in(a,b)$$

$(-\infty<a<b<+\infty)$ с суммируемых плотностью в работе [5],[11] для функции $u\in L_p^{loc}(a,b)$ – множества функций, суммируемых в $p-$ой степени на любом внутренным отрезке в интервале (a,b), была введены характеристики

$$\Omega_p(u,\xi,\eta)=\left(\int_{a+\xi}^{b-\eta}|u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\quad \xi,\eta>0\,,$$
$$\xi+\eta\le b-a=l,$$

$$\omega_p(u,\delta,\xi,\eta)=\sup_{0<h\le\delta}\left(\int_{a+\xi}^{b-\eta-h}|u(x+h)-u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$
$$\xi+\eta+h\le l,\delta>0$$

и при 1 <p< +∞ доказана оценки , $(\Omega_p(\tilde{u}),\omega_p(\tilde{u}))$,через $(\Omega_p(u),\ \omega_p(u))$.

В предельном случае при $p=\infty$ и $u\in C_{[a,b]}$ эти результаты были получены в [1],[8] ,было показано, что оценки [2] в определенном смысле неулучшаемы. В [10] с помощью теоремы М.Рисса об ограниченном действии оператора $\tilde{u}$ в пространстве $L_p(a,b)$, утачнена результаты, полученные в [1], [3].

Одной из первых работ, посвященных повторному особому интегралу с ядром Гильберта $(Bf)(x_1,x_2)=g(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t,y+\tau)ctg\frac{t}{2}ctg\frac{\tau}{2}dtd\tau$,

была работа Л. Чезари [15]. Он доказал, что если $f\in H^2_{(\delta_1^\alpha,\delta_2^\alpha)}$ то

$$g\in H^2_{(\delta_1^\alpha|ln\delta_1|,\delta_2^\alpha|ln\delta_2|)}$$

Следуя Л.Чезари, Е.Жак [6] в своей работе также показал, что класс функций $H^2_{(\delta_1^\alpha,\delta_2^\alpha)}$ не инвариантен относительно оператора B. В этай же работе доказано, что классы функций $H^{\alpha,\beta}=\{f\in C_{[-\pi,\pi]^2}:\omega_f(\delta_1,\delta_2)=O(\delta_1^\alpha\delta_2^\beta),\omega_f^1(\delta_1)=O(\delta_1^\alpha),\omega_f^2(\delta_2)=O(\delta_2^\beta),0<\alpha,\beta<1\}$ инвариантны относительно оператора B.

Основная часть.

Рассмотрим бисингулярный интеграл вида

$$\tilde{u}(x_1,x_2)=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)}ds_1ds_2,$$

где функция $u\in L_p^{loc}(\Delta),\Delta=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)$, $p>1$.

Для $u\in L_p^{loc}(\Delta)$ введем характеристику

$$\Omega_p(u,\xi_1,\eta_1\xi_2,\eta_2)=\left(\int_{a_1+\xi_1}^{b_1-\eta_1}\int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2}|u(x_1,x_2)|^p dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\xi_i,\eta_i>0,\ \xi_i+\eta_i\le b_i-a_i=l_i\,,\ i=1,2.$

Теорема 1. Пусть функция $u\in L_p^{loc}(\Delta)$. Тогда при сходимости соответствующих интегралов справедливо неравенство:

$$\Omega_p(\tilde{u},\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2)\le C_pK(\Omega_p)\text{ , где}$$

$$K(\Omega_p)\quad\le C_p[\frac{1}{(\xi_1\xi_2)^{\frac{1}{q}}}\int_0^{\frac{\xi_1}{2}}\int_0^{\frac{\xi_2}{2}}\frac{\Omega_p\left(u,t_1,\frac{l_1}{2},t_2\frac{l_2}{2}\right)}{(t_1t_2)^{\frac{1}{p}}}dt_1dt_2+$$

$$\frac{1}{(\xi_1\eta_2)^{\frac{1}{q}}}\int_0^{\frac{\xi_1}{2}}\int_0^{\frac{\eta_2}{2}}\frac{\Omega_p\left(u,t_1\frac{l_1}{2},\frac{l_2}{2},t_2\right)}{(t_1t_2)^{\frac{1}{p}}}dt_1dt_2+\frac{1}{(\eta_1\xi_2)^{\frac{1}{q}}}\int_0^{\frac{\eta_1}{2}}\int_0^{\frac{\xi_2}{2}}\frac{\Omega_p\left(u,\frac{l_1}{2},t_1,t_2,\frac{l_2}{2}\right)}{(t_1t_2)^{\frac{1}{p}}}dt_1dt_2$$

$$+\frac{1}{(\eta_1\eta_2)^{\frac{1}{q}}}\int_0^{\frac{\eta_1}{2}}\int_0^{\frac{\eta_2}{2}}\frac{\Omega_p\left(u,\frac{l_1}{2},t_1,\frac{l_2}{2},t_2\right)}{(t_1t_2)^{\frac{1}{p}}}dt_1dt_2$$

$$+\frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}}}\int_0^{\frac{\xi_1}{2}}\frac{\Omega_p(u,t_1,\frac{l_1}{2},\frac{\xi_2}{2},\frac{\eta_2}{2})}{t_1^{\frac{1}{p}}}dt_1+\frac{1}{\xi_2^{\frac{1}{q}}}\int_0^{\frac{\xi_2}{2}}\frac{\Omega_p(u,\frac{\xi_1}{2},\frac{\eta_1}{2},t_2\frac{l_2}{2})}{t_2^{\frac{1}{p}}}dt_2+$$

$$\frac{1}{\eta_1^{\frac{1}{q}}}\int_0^{\frac{\eta_1}{2}}\frac{\Omega_p(u,\frac{l_1}{2},t_1,\frac{\xi_2}{2},\frac{\eta_2}{2})}{t_1^{\frac{1}{p}}}dt_1+\frac{1}{\eta_2^{\frac{1}{q}}}\int_0^{\frac{\eta_2}{2}}\frac{\Omega_p(u,\frac{\xi_1}{2},\frac{\eta_1}{2},\frac{l_2}{2},t_2)}{t_2^{\frac{1}{p}}}dt_2+\Omega_p(u,\frac{\xi_1}{2},\frac{\eta_1}{2},\frac{\xi_2}{2},\frac{\eta_2}{2})].$$

Доказательство.

Прежде всего докажем, что $u\in L_1(\Delta)$.

Пусть $\xi_i\le\frac{l_i}{2}(i=1,2)$ имеем

$$\int_{a_1}^{a_1+\xi_1}\int_{a_2}^{a_2+\xi_2}|u(s_1,s_2)|\,ds_1ds_2=4\int_0^{\xi_1}\int_0^{\xi_2}|u(s_1+a_1,s_2+a_2)|\,ds_1ds_2\frac{1}{s_1^2s_2^2}\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}t_1t_2dt_1dt_2$$

$$\le\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}t_1t_2dt_1dt_2\int_{t_1}^{\xi_1}\int_{t_2}^{\xi_2}\frac{|u(s_1+a_1,s_2+a_2)|}{s_1^2s_2^2}dt_1dt_2.$$

Учитывая, что $u \in L_p^{loc}(\Delta)$, применим во внутреннем интеграле неравенство Гельдера и получим

$$\int_{a_1}^{a_1+\xi_1}\int_{a_2}^{a_2+\xi_2} |u(s_1,s_2)|\, ds_1 ds_2 \le 4\int_0^{\xi_1}\int_0^{\xi_2} \frac{\Omega_p(u,t_1\frac{l_1}{2},t_2,\frac{l_2}{2})}{t_1^{\frac{1}{p}} t_2^{\frac{1}{p}}} dt_1 dt_2$$

Аналогично, при $\xi_i, \eta_i \le \left(0, \frac{l_i}{2}\right]$ $(i = 1{,}2)$ имеем

$$\int_{b_1-\eta_1}^{b_1}\int_{b_2-\eta_2}^{b_2} |u(s_1,s_2)|\, ds_1 ds_2 \le 4\int_0^{\eta_1}\int_0^{\eta_2} \frac{\Omega_p(u,\frac{l_1}{2},t_1,\frac{l_2}{2},t_2)}{t_1^{\frac{1}{p}} t_2^{\frac{1}{p}}} dt_1 dt_2$$

$$\int_{a_1}^{a_1+\xi_1}\int_{b_2-\eta_2}^{b_2} |u(s_1,s_2)|\, ds_1 ds_2 \le 4\int_0^{\xi_1}\int_0^{\eta_2} \frac{\Omega_p\left(u,t_1\frac{l_1}{2},\frac{l_2}{2},t_2\right)}{t_1^{\frac{1}{p}} t_2^{\frac{1}{p}}} dt_1 dt_2$$

$$\int_{a_1}^{a_1+\xi_1}\int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2} |u(s_1,s_2)|\, ds_1 ds_2 = \int_0^{\xi_1}\int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2} |u(s_1+a_1,s_2)| ds_1 ds_2 =$$

$$= 2\int_0^{\xi_1}\int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2} |u(s_1+a_1,s_2)| ds_1 ds_2 \frac{1}{s_1^2}\int_0^{s_1} t_1 dt_1 =$$

$$= 2\int_0^{\xi_1} t_1 dt_1 \int_{t_1}^{\xi_1}\int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2} \frac{|u(s_1+a_{1,}s_2)|}{s_1^2} ds_1 ds_2 \le$$

$$2\int_0^{\xi_1} t_1 dt_1 \left(\int_{t_1}^{\xi_1}\int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2} |u(s_1+a_1,s_2)|^p ds_1 ds_2\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{t_1}^{\xi_1}\int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2} \frac{1}{s_1^{2q}} ds_1 ds_2\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le 2l_2\int_0^{\xi_1} \frac{dt_1}{t_1^{\frac{1}{p}}} \left(\int_{t_1}^{\xi_1}\int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2} |u(s_1+a_1,s_2)|^p ds_1 ds_2\right)^{\frac{1}{p}} \le 2l_2\int_0^{\xi_1} \frac{dt_1}{t_1^{\frac{1}{p}}} \left(\int_{a_1+t_1}^{a_1+\xi_1}\int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2} |u(s_1,s_2)|^p ds_1 ds_2\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le 2l_2\int_0^{\xi_1} \frac{dt_1}{t_1^{\frac{1}{p}}} \left(\int_{a_1+t_1}^{b_1-\frac{l_1}{2}}\int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2} |u(s_1,s_2)|^p ds_1 ds_2\right)^{\frac{1}{p}} = 2l_2\int_0^{\xi_1} \frac{\Omega_p(u,t_1,\frac{l_1}{2},\xi_2,\eta_2)}{t_1^{\frac{1}{p}}} dt_{1,}$$

$$\int_{a_1+\xi_1}^{b_1-\eta_1}\int_{a_2}^{a_2+\xi_2} |u(s_1,s_2)|\, ds_1 ds_2 \le 2l_1\int_0^{\xi_1} \frac{\Omega_p(u,t_1,\frac{l_1}{2},\xi_2,\eta_2)}{t_1^{\frac{1}{p}}} dt_{1,}$$

$$\int_{b_1-\eta_1}^{b_1}\int_{a_2}^{a_2+\xi_2} |u(s_1,s_2)|\, ds_1 ds_2 \le 4\int_0^{\eta_1}\int_0^{\xi_2} \frac{\Omega_p\left(u,\frac{l_1}{2},t_1 t_2,\frac{l_2}{2}\right)}{t_1^{\frac{1}{p}} t_2^{\frac{1}{p}}} dt_1 dt_2,$$

$$\int_{b_1-\eta_1}^{b_1}\int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2}|u(s_1,s_2)|\,ds_1ds_2 \le 2l_2\int_0^{\eta_1}\frac{\Omega_p(u,\frac{l_1}{2},t_1\xi_2,\eta_2)}{t_1^{\frac{1}{p}}}dt_1,$$

$$\int_{a_1+\xi_1}^{b_1-\eta_1}\int_{b_2-\eta_2}^{b_2}|u(s_1,s_2)|\,ds_1ds_2 \le 2l_1\int_0^{\eta_2}\frac{\Omega_p(u,\xi_1,\eta_1\frac{l_1}{2},t_2)}{t_2^{\frac{1}{p}}}dt_2,$$

$$\int_{a_1+\xi_1}^{b_1-\eta_1}\int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2}|u(s_1,s_2)|\,ds_1ds_2 \le 4l_1l_2\Omega(u,\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2)$$

Из последних неравенств при $\xi_i=\eta_i=\frac{l_i}{2}$, $i=1,2$ вытекает, что $u\in L_1(\Delta)$, откуда следует, что $\tilde{u}$ существует почти везде.

Далее, для почти всех $x_i\in[a_i+\xi_1,b_2-\eta_2]$ $(i=1,2)$ имеет место равенство

$$\tilde{u}(x_1,x_2)=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)}ds_1ds_2 =$$

$$=\int_{a_1}^{a_1+\frac{\xi_1}{2}}\int_{a_2}^{a_2+\frac{\xi_2}{2}}\frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)}ds_1ds_2+\int_{a_1}^{a_1+\frac{\xi_1}{2}}\int_{a_2+\frac{\xi_2}{2}}^{b_2-\frac{\eta_2}{2}}\frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)}ds_1ds_2+$$

$$\int_{a_1}^{a_1+\frac{\xi_1}{2}}\int_{b_2-\frac{\eta_2}{2}}^{b_2}\frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)}ds_1ds_2+\int_{a_1+\frac{\xi_1}{2}}^{b_1-\frac{\eta_1}{2}}\int_{a_2}^{a_2+\frac{\xi_2}{2}}\frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)}ds_1ds_2+$$

$$\int_{a_1+\frac{\xi_1}{2}}^{b_1-\frac{\eta_1}{2}}\int_{a_2+\frac{\xi_2}{2}}^{b_2-\frac{\eta_2}{2}}\frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)}ds_1ds_2+\int_{a_1+\frac{\xi_1}{2}}^{b_1-\frac{\eta_1}{2}}\int_{b_2-\frac{\eta_2}{2}}^{b_2}\frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)}ds_1ds_2+$$

$$\int_{b_1-\frac{\eta_1}{2}}^{b_1}\int_{a_2}^{a_2+\frac{\xi_2}{2}}\frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)}ds_1ds_2+\int_{b_1-\frac{\eta_1}{2}}^{b_1}\int_{a_2+\frac{\xi_2}{2}}^{b_2-\frac{\eta_2}{2}}\frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)}ds_1ds_2+$$

$$\int_{b_1-\frac{\eta_1}{2}}^{b_1}\int_{b_2-\frac{\eta_2}{2}}^{b_2}\frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)}ds_1ds_2=\sum_{k=1}^{9}I_k(x_1,x_2).$$

Следовательно,

$$\Omega_p(\tilde{u},\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2)\le\Big(\int_{a_1+\xi_1}^{b_1-\eta_1}\int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2}\Big|\sum_{k=1}^{9}I_k(x_1,x_2)\Big|^p dx_1dx_2\Big)^{\frac{1}{p}}\le\sum_{k=1}^{9}\Big(\int_{a_1+\xi_1}^{b_1-\eta_1}\int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2}|I_k(x_1,x_2)|^p dx_1dx_2\Big)^{\frac{1}{p}}=\sum_{k=1}^{9}I_k$$

Оценивая слагаемые по норме $L_p(\bar{\Delta})$ $\bar{\Delta}=$ $[a_1+\xi_1,b_1-\eta_1]\times[a_2+\xi_2,b_2-\eta_2]$ $i=1,2$ аналогично предыдущему, получим

$$|I_1|_{L_p(\bar{\Delta})} = \left(\int_{a_1+\xi_1}^{b_1-\eta_1} \int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2} \left| \int_{a_1}^{a_1+\frac{\xi_1}{2}} \int_{a_2}^{a_2+\frac{\xi_2}{2}} \frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)} ds_1 ds_2 \right|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le 16 \frac{1}{(p-1)^{\frac{2}{p}}} \frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}} \xi_2^{\frac{2}{q}}} \int_0^{\frac{\xi_1}{2}} \int_0^{\frac{\xi_2}{2}} \frac{\Omega_p\left(u, t_1, \frac{l_1}{2}, t_2, \frac{l_2}{2}\right)}{(t_1 t_2)^{\frac{1}{p}}} dt_1 dt_2,$$

$$|I_3|_{L_p(\bar{\Delta})} = \left(\int_{a_1+\xi_1}^{b_1-\eta_1} \int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2} \left| \int_{a_1}^{a_1+\frac{\xi_1}{2}} \int_{b_2-\frac{\eta_2}{2}}^{b_2} \frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)} ds_1 ds_2 \right|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le 16 \frac{1}{(p-1)^{\frac{2}{p}}} \frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}} \eta_2^{\frac{2}{q}}} \int_0^{\frac{\xi_1}{2}} \int_0^{\frac{\eta_2}{2}} \frac{\Omega_p\left(u, t_1, \frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}, t_2\right)}{(t_1 t_2)^{\frac{1}{p}}} dt_1 dt_2,$$

$$|I_7|_{L_p(\bar{\Delta})} = \left(\int_{a_1+\xi_1}^{b_1-\eta_1} \int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2} \left| \int_{b_1-\eta_1}^{b_1} \int_{a_2}^{a_2+\frac{\xi_2}{2}} \frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)} ds_1 ds_2 \right|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le 16 \frac{1}{(p-1)^{\frac{2}{p}}} \frac{1}{\eta_1^{\frac{1}{q}} \xi_2^{\frac{1}{q}}} \int_0^{\frac{\eta_1}{2}} \int_0^{\frac{\xi_2}{2}} \frac{\Omega_p\left(u, \frac{l_1}{2}, t_1, t_2 \frac{l_2}{2}\right)}{(t_1 t_2)^{\frac{1}{p}}} dt_1 dt_2,$$

В силу теоремы М.Рисса [17]

$$|I_2|_{L_p(\bar{\Delta})} = \left(\int_{a_1+\xi_1}^{b_1-\eta_1} \int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2} \left| \int_{a_1}^{a_1+\frac{\xi_1}{2}} \int_{a_2+\frac{\xi_2}{2}}^{b_2-\frac{\eta_2}{2}} \frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)} ds_1 ds_2 \right|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le 4 \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}}} \left(\int_{a_2+\frac{\xi_2}{2}}^{b_2-\frac{\eta_2}{2}} \left| \int_{a_1}^{a_1+\frac{\xi_1}{2}} A(s_1,s_2)\, ds_1 \right|^p dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$4 \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}}} \int_{a_1}^{a_1+\frac{\xi_1}{2}} \left(\int_{a_2+\frac{\xi_2}{2}}^{b_2-\frac{\eta_2}{2}} |A(s_1,x_2)|^p dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} ds_1 \le \le A_p \frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}}} \int_{a_1}^{a_1+\frac{\xi_1}{2}} \left(\int_{a_2+\frac{\xi_2}{2}}^{b_2-\frac{\eta_2}{2}} |u(s_1,s_2)|^p ds_2 \right)^{\frac{1}{p}} dx_1$$

$$= A_p \frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}}} \int_{a_1}^{a_1+\frac{\xi_1}{2}} A(s_1) ds_1 \le A_p \frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}}} \int_0^{\frac{\xi_1}{2}} \frac{1}{t_1^{\frac{1}{q}}} \left(\int_{a_1+t_1}^{b_1-\frac{\eta_1}{2}} |A(s_1)|^p ds_1 \right)^{\frac{1}{p}} dt_1$$

$$= A_p \frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}}} \int_0^{\frac{\xi_1}{2}} \frac{1}{t_1^{\frac{1}{q}}} \left(\int_{a_1+t_1}^{b_1-\frac{l_1}{2}} \int_{a_2+\frac{\xi_2}{2}}^{b_2-\frac{\eta_2}{2}} |u(s_1,s_2)|^p ds_1 ds_2 \right)^{\frac{1}{p}} dt_1 = A_p \frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}}} \int_0^{\frac{\xi_1}{2}} \frac{\Omega_p(u, t_1 \frac{l_1}{2}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\eta_2}{2})}{t_1^{\frac{1}{p}}} dt_1$$

Аналогично оценивается I_4, I_6, I_8, I_9. Теперь оценим I_5 в норме $L_p(\bar{\Delta})$. В силу теоремы [16], имеем

$$|I_5|_{L_p(\bar{\Delta})} = \left(\int_{a_1+\xi_1}^{b_1-\eta_1} \int_{a_2+\xi_2}^{b_2-\eta_2} \left| \int_{a_1}^{b_1-\frac{\eta_1}{2}} \int_{a_2+\frac{\xi_2}{2}}^{b_2-\frac{\eta_2}{2}} \frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)} ds_1 ds_2 \right|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left(\int_{a_1+\frac{\xi_1}{2}}^{b_1-\frac{\eta_1}{2}} \int_{a_2+\frac{\xi_2}{2}}^{b_2-\frac{\eta_2}{2}} \left| \int_{a_1}^{b_1-\frac{\eta_1}{2}} \int_{a_2+\frac{\xi_2}{2}}^{b_2-\frac{\eta_2}{2}} \frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)} ds_1 ds_2 \right|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le A_p \left(\int_{a_1+\frac{\xi_1}{2}}^{b_1-\frac{\eta_1}{2}} \int_{a_2+\frac{\xi_2}{2}}^{b_2-\frac{\eta_2}{2}} |u(s_1,s_2)|^p ds_1 ds_2 \right)^{\frac{1}{p}} = A_p \Omega_p\left(u, \frac{\xi_1}{2}, \frac{\eta_1}{2}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\eta_2}{2}\right)$$

где постоянная A_p независит от $\xi_i, \eta_i (i = 1,2)$. Теорема доказана.

Для стандартной схемы построим новые инвариантные пространства для оператора $\tilde{u}$.

Обозначим через G класс положительных функций $\varphi(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ определенных при $0 < \xi_i, \eta_i,\ \xi_i + \eta_i \le l_i, i = 1,2; \varphi(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ почти убывает по $\xi_i, \eta_i\ (i = 1,2)$,

$$\varphi(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \varphi\left(\xi_1, \frac{l_1}{2}, \xi_2, \frac{l_2}{2}, \eta_2\right) + \varphi\left(\frac{l_1}{2}, \eta_1, \xi_2, \frac{l_2}{2}\right) + \varphi\left(\xi_1, \frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}, \eta_2\right) + \varphi\left(\frac{l_1}{2}, \eta_1, \frac{l_1}{2}, \eta_2\right).$$

Пусть $\varphi \in G$. Введем Z_φ^p —множество измеримых на Δ функций таких, что $\Omega_p(u, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = 0\big(\varphi(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)\big)$. Нетрудно проверить, что множество Z_φ^p в норме

$$\|u\|_{Z_\varphi^p} = \sup_{\substack{\xi_i, \eta_i \\ i=1,2}} \frac{\Omega_p(u, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)}{\varphi(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)}$$

является банаховым пространством.

Теорема 2. Пусть $\varphi \in G$ и сходятся интегралы

$$\int_0^{\xi_1}\int_0^{\xi_2} \frac{\varphi\left(t_1, \frac{l_1}{2}, t_2, \frac{l_2}{2}\right)}{(t_1 t_2)^{\frac{1}{p}}} d\,t_1 dt_2, \int_0^{\xi_1}\int_0^{\eta_2} \frac{\varphi\left(t_1, \frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}, t_2\right)}{(t_1 t_2)^{\frac{1}{p}}} dt_1 dt_2$$

$$\int_0^{\eta_1}\int_0^{\xi_2} \frac{\varphi\left(\frac{l_1}{2}, t_1, t_2, \frac{l_2}{2}\right)}{(t_1 t_2)^{\frac{1}{p}}} d\,t_1 dt_2, \int_0^{\eta_1}\int_0^{\eta_2} \frac{\varphi\left(\frac{l_1}{2}, t_1, \frac{l_2}{2}, t_2\right)}{(t_1 t_2)^{\frac{1}{p}}} dt_1 dt_2$$

Тогда $\tilde{u}: Z_\varphi^p \to Z_{K(\varphi)}^p$, если же $K(\varphi) = 0(\varphi(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2))$ то $\tilde{u}: Z_\varphi^p \to Z_\varphi^p$ и ограничен.

Введем пространства $J_p(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$. Пусть $\psi_i > 0$ п. в. и $\psi_i \in L_1(\Delta_1)$,$\Delta_1[0, l_1, 0, l_2]$ $i = \overline{1,4}$. Обозначим

$J_p(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = \{u =$ изм:

$$K_1 = \int_0^{\frac{l_1}{2}}\int_0^{\frac{l_2}{2}} \Omega_p^p\left(u, \xi_1, \frac{l_1}{2}\xi_2, \frac{l_2}{2}\right) \psi_1(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 < +\infty,$$

$$K_2 = \int_0^{\frac{l_1}{2}}\int_0^{\frac{l_2}{2}} \Omega_p^p\left(u, \frac{l_1}{2}, \xi_1, \xi_2, \frac{l_2}{2}\right) \psi_2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 < +\infty,$$

$$K_3 = \int_0^{\frac{l_1}{2}} \int_0^{\frac{l_2}{2}} \Omega_p^p\left(u, \xi_1, \frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}, \xi_2\right) \psi_3(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 < +\infty,$$

$$K_4 = \int_0^{\frac{l_1}{2}} \int_0^{\frac{l_2}{2}} \Omega_p^p\left(u, \frac{l_1}{2}, \xi_1, \frac{l_2}{2}, \xi_2\right) \psi_4(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 < +\infty\}.$$

В норме $\|u\|_{Jp(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4)} = \max_i\{K_i^{\frac{1}{p}}, i = \overline{1,4}\}$, $\left\{J_p, \|.\|_{j_p}\right\} - B -$ пространство.

Теорема 3. Пусть $\psi_i \in L_1(\Delta_1)$ и почти везде на Δ_1 $\psi_i > 0$ и функция

$x_1 x_2 (x_1 x_2 \psi_i(x_1, x_2))^{\frac{-q}{p}}$ почти возрастает, кроме того

$$\int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{dt_1 dt_2}{(t_1 t_2 \psi_i(t_1, t_2))^{\frac{q}{p}}} = O\left(\frac{x_1 x_2}{(x_1 x_2 \psi_i(x_1, x_2))^{\frac{q}{p}}}\right),$$

$$i = \overline{1,4}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1,$$

тогда $\|\tilde{u}\|_{j_p} \le const \|u\|_{j_p}$, где постоянная не зависит от u.

Доказательство. Воспользовавшись теоремой 1, получим

$$\int_0^{\frac{l_1}{2}} \int_0^{\frac{l_2}{2}} \Omega_p^p\left(\tilde{u}, \xi_1, \frac{l_1}{2} \xi_2, \frac{l_2}{2}\right) \psi_1(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \le const \int_0^{\frac{l_1}{2}} \int_0^{\frac{l_2}{2}} \psi_1(\xi_1, \xi_2) (K(\Omega_p))^p d\xi_1 d\xi_2$$

Оценим

$$J = \int_0^{\frac{l_1}{2}} \int_0^{\frac{l_2}{2}} \frac{\psi_1(\xi_1, \xi_2)}{(\xi_1 \xi_2)^{\frac{p}{q}}} d\xi_1 d\xi_2 \left(\int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \frac{\Omega_p\left(u, t_1, \frac{l_1}{2}, t_2 \frac{l_2}{2}\right)}{(t_1 t_2)^{\frac{1}{p}}} dt_1 dt_2\right)^p =$$

$$\int_0^{\frac{l_1}{2}} \int_0^{\frac{l_2}{2}} \frac{\psi_1(\xi_1, \xi_2)}{(\xi_1 \xi_2)^{p-1}} d\xi_1 d\xi_2 \left(\int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \Omega_p\left(u, t_1, \frac{l_1}{2}, t_2, \frac{l_2}{2}\right) \psi_1^{\frac{1}{p}}(t_1, t_2) (t_1 t_2 \psi_1(t_1, t_2))^{\frac{-1}{p}} dt_1 dt_2\right)^p$$

По условию теоремы

$$\int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{dt_1 dt_2}{(t_1 t_2 \psi_i(t_1, t_2))^{\frac{q}{p}}} = O\left(\frac{x_1 x_2}{(x_1 x_2 \psi_i(x_1, x_2))^{\frac{q}{p}}}\right),$$

отсюда по лемме [4] существует $\alpha \in (0,1)$ что функция

$$\frac{(t_1 t_2)^{1-\alpha}}{(t_1 t_2 \psi_i(t_1, t_2))^{\frac{q}{p}}}$$

почти возрастает по t_1, t_2. Кроме того, зафиксируем r' такой, что

$$(1-\alpha)\frac{1}{q} < \frac{1}{r'} < \frac{1}{q}$$

и пусть $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Очевидно, что $p > r$. Применяя во внутреннем интеграле неравенства Гельдера и учитывая предыдущее, получим

$$J \le \int_0^{\frac{l_1}{2}} \int_0^{\frac{l_2}{2}} \frac{\psi_1(\xi_1, \xi_2)}{(\xi_1 \xi_2)^{p-1}} d\xi_1 d\xi_2 \left(\int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left(\Omega_p\left(u, t_1, \frac{l_1}{2}, t_2, \frac{l_2}{2}\right) \psi_1^{\frac{1}{p}}(t_1, t_2)\right)^r dt_1 dt_2\right)^{\frac{p}{r}}$$

$$\frac{(\xi_1 \xi_2)^{(1-\alpha)\frac{p}{q}}}{\xi_1 \xi_2 \psi_1(\xi_1, \xi_2)} \left(\int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} (t_1 t_2)^{-(1-\alpha)\frac{r'}{q}} dt_1 dt_2\right)^{\frac{p}{r'}} =$$

$$= C \int_0^{\frac{l_1}{2}} \int_0^{\frac{l_2}{2}} \left(\frac{1}{(\xi_1 \xi_2)^{p-1}} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left(\Omega_p\left(u, t_1, \frac{l_1}{2}, t_2, \frac{l_2}{2}\right) \psi_1^{\frac{1}{p}}(t_1, t_2)\right)^r dt_1 dt_2\right)^{\frac{p}{r}} d\xi_1 d\xi_2$$

Далее, $\frac{p}{r}>1$ следовательно, в силу неравенства Харди-Литтльвуда [9]

$$J \le C \int_0^{\frac{l_1}{2}} \int_0^{\frac{l_2}{2}} \Omega_p^p\left(u, t_2, \frac{l_2}{2}, t_2, \frac{l_2}{2}\right) \psi_1(t_1,t_2) dt_1 dt_2.$$

Остальные слагаемые оцениваются аналогично.

Методом последовательных приближений доказана разрешимость нелинейного бисингулярного интегрального уравнения

$$u(x_1,x_2) = \lambda \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \frac{f(s_1,s_2,u(s_1,s_2))}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)} ds_1 ds_2$$

в Z_φ, где функция $f(s_1,s_2,u)$ определена на $(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times(-\infty,+\infty)$ и λ-действительный параметр.

References:

1. Abdullaev, S.K., & Babaev, A.A. (1969). *Nekotorye svojstva osobogo integrala*. Dokl.AN. CCCR,188,2.
2. Abdullaev, S.K., & Babaev, A.A. (1978). *Ob osobom integrale s summiruemoj plotnost`u.* Funkcional`nyj analiz i ego prilozhenie. Baku “Jelm” vyp.
3. Babaev, A.A. (1966). *Nekotorye svojstva osobogo integrala s nepreryvnoj plotnost`u i ego prilozhenija*. Dokl. AN SSSR, 170, 5.
4. Bari, I.K., & Stechkin, S.B. (1956). *Trudy Moskovskogo matem*. Obshhestva, 5.
5. Gusejnov, E.G., & Salaev, V.V. (1979). Osobyj integral po otrezku prjamoj v prostranstvah summiruemyh funkcij. *Nauch.Tr.MV i SSO Azerb.SSR*, ser. fiz.-mat. nauk, 1, 81-87.
6. Zhak, I.E. (1952). O soprjazhennyh dvojnyh trigonometricheskih rjadah. *Matem. sb.* t.31 (73), 3,469-48.
7. Luzin, N.N. (1927). *Integral i trigonometricheskij rjad.*, 6.
8. Salaev, V.V. (1966). Nekotorye svojstva osobogo integrala. *“Uchenye zapiski”AGU* ser. fiz,mat. nauk., 6.
9. Hardi, G.G., Littl`vud, D.E., & Polia, G. (1948). Neravenstva. Moscow: Izd.I.L.
10. HvedelidzeB.V. (1975). Sovremennye problemy matematiki. (p.7). Moscow.
11. Holmurodov, Je. (1978). Nekotorye ocenki dlja osobogo integrala s lokal`no summiruemoj plotnost`u, *Uch.zap.MV i SSO Azerb.SSR*, serija fiz-mat. nauk-,6,71-80.
12. Jean-Michel, B. (1982). *R´ esolution des conjectures de Calderón et espaces de Hardy g´ en´ eraliz´ es,* ”Ast´ erisque”, 92-93, 293-300.
13. Calderón, A.P. (1977). Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 74, 13 24-13 27.
14. Calderón, A.P., Calderón, C.P., Fabes, E., Jodeit, M., & Rivi´ere, N. M. (1978). Applications of the Cauchy integral on Lipschitz curves, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84, 287-290.
15. Cesari, L. (1938). Sulle cerie di Fourier delle funzioni Lipschitziane di piu variable. *Ann. Schola. Norm. Sup.Piza*, 7, 279-295.
16. Fefferman, R. (1988). A p Weights and Singular Integrals. *Amer. J.Math.*, 110, 5, pp.975-987.
17. Riesz, M. (1928). Sur les fonctions conjugue’es. *Math. Z.*, 27, 218-244.