SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2020 **Issue:** 06 **Volume:** 86

Published: 30.06.2020 **http://T-Science.org**

QR – Issue

QR – Article

Mashrabjon Shaxabutdinovich Mamatov
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek
Doctor of physico-mathematical sciences,
professor of the department "Geometry and Topology"
mamatovmsh@mail.ru

Jalolxon Tursunboy ugli Nuritdinov
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek
doctoral student of the department "Geometry and Topology"
nuritdinovjt@gmail.com

ON SOME GEOMETRIC PROPERTIES OF THE DIFFERENCE AND THE SUM OF MINKOWSKI

Abstract: *The sets of Minkowski algebraic sum and geometric difference are considered. This paper investigates the geometric properties of the Minkowski algebraic sum and the geometric difference of sets. Various examples are considered that calculate the geometric differences of sets.*

Key words: *convex sets, computational geometry, algebraic sums, geometric differences, Minkowski operations, multi-valued mapping.*

Language: *Russian*

Citation: Mamatov, M. S., & Nuritdinov, J. T. (2020). On some geometric properties of the difference and the sum of Minkowski. *ISJ Theoretical & Applied Science, 06 (86),* 601-610.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-06-86-110 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.06.86.110

Scopus ASCC: *2600.*

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РАЗНОСТИ И СУММЫ МИНКОВСКОГО

Аннотация: *Рассматривается множество алгебраической суммы и геометрической разности Минковского. В данной работе исследуется геометрические свойства алгебраической суммы и геометрической разности множеств Минковского. Рассмотрены различные примеры, в которых вычисляются геометрические разности множеств.*

Ключевые слова: *выпуклое множество, вычислительная геометрия, алгебраические суммы, геометрическая разность, операции Минковского, многозначное отображение.*

Введение

UDC 517.977.1

В современной математике задачи оптимального управления динамическими системами в условиях неопределенности, помех и конфликтов изучаются в рамках теории дифференциальных игр. В работах Л.С.Понтрягина впервые в дифференциальных играх применяется геометрическая разность и суммы Минковского. Алгебраическая сумма и алгоритмы ее вычисления широко применяются во многих разделах прикладной математики, таких как вычислительная геометрия, системы числового программного управления, планирование движения роботов, теория оптимального управления и др.

Основы теории дифференциальных игр заложены в работах [1-3]. Важные результаты по дифференциальным играм были получены в работах [4-7]. В настоящее время ведутся интенсивные исследования по численной реализации теории линейных дифференциальных игр [8-10]. Для построения стратегии управления используют альтернированный интеграл Понтрягина [2]. При этом нужно будет работать приближенными-альтернированными суммами Понтрягина. Оно основывается на геометрической разности и суммах множеств Минковского.

В данной работе исследуются геометрические свойства алгебраической суммы и геометрическая разность множеств Минковского. Рассмотрены различные примеры, где вычисляются суммы и геометрические разности множеств.

1. Постановка задачи

Определение 1. Пусть в линейном пространстве E заданы непустые множества $X, Y \subset E$. *Геометрическими суммой* и *разностью* или, что же самое, *суммой* и *разностью Минковского* множества X и Y называются соответственно множества

$$X+Y=\{x+y : x\in X, y\in Y\}$$

$$X \overset{*}{-} Y=\{x : x+Y\subset X\}.$$

Определение 2. Произведением множества X на число λ называются множество

$$\lambda X=\{\lambda x : x\in X\}.$$

Определение 3. *Операторами Минковского* многозначного отображения $G: E\to 2^E$ называются операторы $A_G : 2^E \to 2^E$ и $B_G : 2^E \to 2^E$ заданные формулами

$$A_G S=\bigcup_{x\in S}(x+G(x)),$$

$$B_G S = E\setminus(A_G(E\setminus S)),$$

для любого множества $S\subset E$.

Заметим, что в случае, когда многозначное отображение G постоянно, т.е. $G(x)=G_0$ при всех $x\in S$, значения операторов Минковского совпадают соответственно с суммой и разностью Минковского:

$$A_G S = S+G_0,$$

$$B_G S = S\overset{*}{-}(-G_0).$$

Таким образом, понятие операторов Минковского представляет собой естественное обобщение понятий суммы и разности Минковского.

Непосредственно из определения следует, что геометрическая разность $X\overset{*}{-}Y$ - это пересечения сдвигов множества X на векторы $d\in -Y$:

$$X\overset{*}{-}Y=\bigcap_{d\in -Y}(X+d).$$

Условимся, что выражениях, не содержащих скобок, операции Минковского сложения, вычитания и умножения на число выполняются слево на право; приоритет операция умножения. Сложность вычисления разности и суммы Минковского различных типов множеств очевидна из определения этих операций.

Ниже приведены некоторые геометрические свойства операторов Минковского.

2. Полученные результаты и их доказательство

Лемма 1. Пусть в линейном пространстве E заданы непустые множества $X, Y\subset E$ и $X\overset{*}{-}Y\neq\varnothing$. Для всех $y\in Y$ векторов, найдется вектор $x\in X$ такой, что $x-y\in X\overset{*}{-}Y$.

Доказательство. Пусть $a\in X\overset{*}{-}Y$, тогда из определения разность Минковского $a+Y\subset X$. Из определении сумма Минковского для любого вектора $y\in Y$ найдется вектор $x\in X$ такой что $a+y=x$. Отсюда следует, что $a=x-y$. Это означает $a=x-y\in X\overset{*}{-}Y$. Лемма доказана.

Лемма 2. Для любого непустого множества X и Y в линейном пространстве E удовлетворяет условию $X\overset{*}{-}Y\subset X+(-Y)$.

Доказательство. Чтобы доказать эту лемму нам нужно показать, что любой вектор множества $X\overset{*}{-}Y$ принадлежит множеству $X+(-Y)$ и вектор множества $X+(-Y)$ не всегда принадлежит множеству $X\overset{*}{-}Y$.

Пусть $a\in X\overset{*}{-}Y$, из этого мы можем написать выражение $a+Y\subset X$. Выражение $a+y\in X$ верно для всех $y\in Y$. Если мы добавим $-y\in -Y$ к обеим сторонам этого отношения, формируется $a\in X+(-y)$. Из отношения $X+(-y)\subset X+(-Y)$ следует, что $a\in X+(-Y)$.

Мы используем следующий пример, чтобы доказать, что любой $a\in X+(-Y)$ не принадлежит множеству $X\overset{*}{-}Y$.

Пример: Пусть заданы множеств $X=[-4,5]; Y=(3,4)$, тогда $-Y=(-4,-3)$, $X+(-Y)=(-8,2)$, $X\overset{*}{-}Y=[-7,1]$. Это означает, что $X\overset{*}{-}Y\subset X+(-Y)$.

Лемма 3. Для число λ и непустых множеств X, Y в линейном пространстве E всегда выполняется следующее равенство

$$\lambda(X\overset{*}{-}Y)=\lambda X\overset{*}{-}\lambda Y.$$

Доказательство. Пусть $a\in\lambda(X\overset{*}{-}Y)$, тогда из определений операции произведение множества на число найдется вектор $t \in X \overset{*}{-} Y$ такой, что $a = \lambda t$.

$t \in X \overset{*}{-} Y$ означает, что $t + Y \subset X$, из этого для любой вектор $y \in Y$ найдется вектор $x \in X$ такой что $t + y = x, t = x - y$. Из $a = \lambda t$ следует, что $a = \lambda t = \lambda(x - y)$.

Из определения линейного пространства и разности Минковского следует $a = \lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y,\ a + \lambda y = \lambda x,$ $a \in \lambda X \overset{*}{-} \lambda Y$.

Пусть теперь $a \in \lambda X \overset{*}{-} \lambda Y$, тогда из определения разность Минковского $a + \lambda Y \subset \lambda X$. Для каждого вектори $\lambda y \in \lambda Y$ найдется вектор $\lambda x \in \lambda X$ такой, что $a + \lambda y = \lambda x,\ a = \lambda x - \lambda y,\ a = \lambda(x - y)$. В силу леммы 2 справедливо отношение $\lambda(x - y) \in \lambda(X \overset{*}{-} Y)$. Значит $a \in \lambda(X \overset{*}{-} Y)$. Лемма доказана.

Используя эти свойства операторов Минковского, мы можем вычислить разность и сумму Минковского множеств одного типа.

Теорема 1. Сумма Минковского интервалов $X = (a, b)$ и $Y = (a_1, b_1)$, заданных на прямой R, равна интервалу $X + Y = (a + a_1, b + b_1)$.

Доказательство. Из определения сумма Минковского сумма Минковского интервалов (a, b) и (a_1, b_1) множества элементов который сумма каждое элементов интервалов (a, b) и (a_1, b_1). Мы добавляем все точки $x \in X$, где $a < x < b$ ко всем точкам $y \in Y$, где $a_1 < y < a_2$. По свойства неравенства $a + a_1 < x + y < b + b_1$. Из x и y - произвольные элементы множеств X и Y соответственно следует, что $X + Y = (a + a_1, b + b_1)$.

Аналогичным образом можно найти сумму Минковского множеств следующего вида, заданных прямой R:

$$[a, b] + [a_1, b_1] = [a + a_1, b + b_1];$$
$$[a, b] + (a_1, b_1) = (a + a_1, b + b_1);$$
$$[a, b) + (a_1, b_1] = (a + a_1, b + b_1);$$
$$\{a\} + (a_1, b_1) = (a + a_1, a + b_1)$$

Теорема 2. Для разности Минковского интервалов $X = (a, b)$ и $Y = (a_1, b_1)$, заданных на прямой R, справедливо следующее соотношение

$$X \overset{*}{-} Y = \begin{cases} [a - a_1, b - b_1] & если\ a - a_1 < b - b_1, \\ \{a - a_1\} & если\ a - a_1 = b - b_1, \\ \varnothing & если\ a - a_1 > b - b_1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $z \in X \overset{*}{-} Y$. Из определения разности Минковского $z + Y \subset X$. Это означает $z + (a_1, b_1) \subset (a, b)$. По теореме 1 $(z + a_1, z + b_1) \subset (a, b)$, из этого следует $z + a_1 \geq a,\ z + b_1 \leq b$ и $a - a_1 \leq z \leq b - b_1$.

Нетрудно видеть, что $a - a_1 \leq z \leq b - b_1$, если $a - a_1 \leq z \leq b - b_1$ и $z = a - a_1$, если $a - a_1 = b - b_1$.

Если $a - a_1 > b - b_1$, тогда следует противоречие с неравенством $a - a_1 \leq z \leq b - b_1$ и $X \overset{*}{-} Y = \varnothing$.

Аналогично, мы можем найти разность Минковского множеств следующего вида, заданную прямой R:

$$[a, b] \overset{*}{-} [a_1, b_1] = [a - a_1, b - b_1];$$
$$[a, b] \overset{*}{-} (a_1, b_1) = [a - a_1, b - b_1];$$
$$(a, b) \overset{*}{-} [a_1, b_1] = (a - a_1, b - b_1);$$

Здесь $a - a_1 < b - b_1$.

Теорема 3. Сумма Минковского двух замкнутых(открытых) кругов X, Y радиуса r_1, r_2 с центрами в точках $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ является замкнутым(открытым) кругом радиуса $r_1 + r_2$ с центром $\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Согласно условию теоремы заданы круги

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} : (x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 \leq r_1^2 \right\}$$

$$\left(X = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} : (x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 < r_1^2 \right\} \right)$$

и

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} : (x_2 - a_2)^2 + (y_2 - b_2)^2 \leq r_2^2 \right\}$$

$$\left(Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} : (x_2 - a_2)^2 + (y_2 - b_2)^2 \leq r_2^2 \right\} \right).$$

Из определения суммы Минковского нам нужно добавить каждый $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in X$ к каждому

Impact Factor:

ISRA (India)	= **4.971**	**SIS** (USA)	= **0.912**	**ICV** (Poland)	= **6.630**
ISI (Dubai, UAE)	= **0.829**	**РИНЦ** (Russia)	= **0.126**	**PIF** (India)	= **1.940**
GIF (Australia)	= **0.564**	**ESJI** (KZ)	= **8.997**	**IBI** (India)	= **4.260**
JIF	= **1.500**	**SJIF** (Morocco)	= **5.667**	**OAJI** (USA)	= **0.350**

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in Y$. Из неравенств $a_1 - r_1 \le x_1 \le a_1 + r_1$ $(a_1 - r_1 < x_1 < a_1 + r_1)$ и $a_2 - r_2 \le x_2 \le a_2 + r_2$ $(a_2 - r_2 < x_2 < a_2 + r_2)$ в силу теорему 1 следует

$$a_1 + a_2 - r_1 - r_2 \le x_1 + x_2 \le a_1 + a_2 + r_1 + r_2$$
$$(a_1 + a_2 - r_1 - r_2 < x_1 + x_2 < a_1 + a_2 + r_1 + r_2).$$

То же самое

$$b_1 + b_2 - r_1 - r_2 \le y_1 + y_2 \le b_1 + b_2 + r_1 + r_2$$
$$(b_1 + b_2 - r_1 - r_2 < y_1 + y_2 < b_1 + b_2 + r_1 + r_2)$$

Это означает для каждой точки $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ справедливо неравенство

$$(x_1 + x_2 - a_1 - a_2)^2 + (y_1 + y_2 - b_1 - b_2)^2 \le (r_1 + r_2)^2$$
$$((x_1 + x_2 - a_1 - a_2)^2 + (y_1 + y_2 - b_1 - b_2)^2 < (r_1 + r_2)^2)$$

Значит

$$X + Y == \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} : (x_1 + x_2 - a_1 - a_2)^2 + \right.$$
$$\left. +(y_1 + y_2 - b_1 - b_2)^2 \le (r_1 + r_2)^2 \right\}$$

$$\left(X + Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} : (x_1 + x_2 - a_1 - a_2)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (y_1 + y_2 - b_1 - b_2)^2 < (r_1 + r_2)^2 \right\} \right)$$

Теорема доказано.(Рис. 1.)

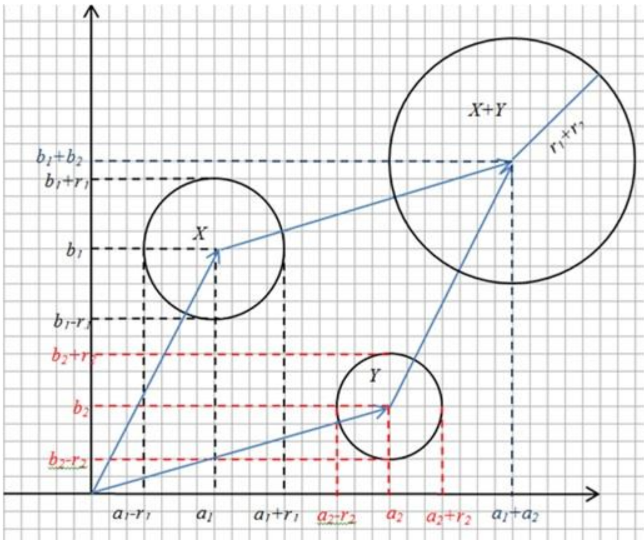

Рис. 1.

Из доказанной теоремы следует, что если центры данного круга находятся в начале координат, то центр круга, образованный их суммой Минковского, также находится в начале координат (Рис. 2.).

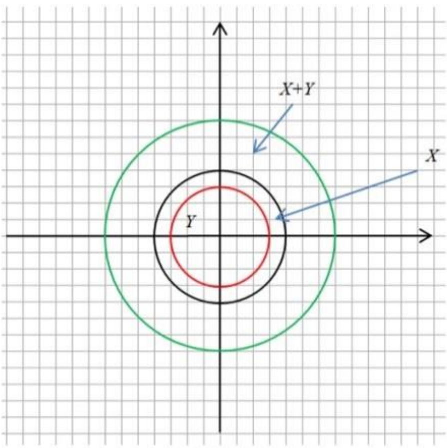

Рис. 2.

Если посмотрим на рис. 2 мы уверены, что сумма Минковского круга X и Y означает новый круг, образованный перемещением центра круга X вдоль границы круга Y (Рис. 3.).

Теорема 4. Разность Минковского двух замкнутых кругов X, Y радиуса r_1, r_2 ($r_1 > r_2$) с центрами в точках $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ является замкнутых круг радиуса $r_1 - r_2$ с центром $\begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ b_1 - b_2 \end{pmatrix}$.

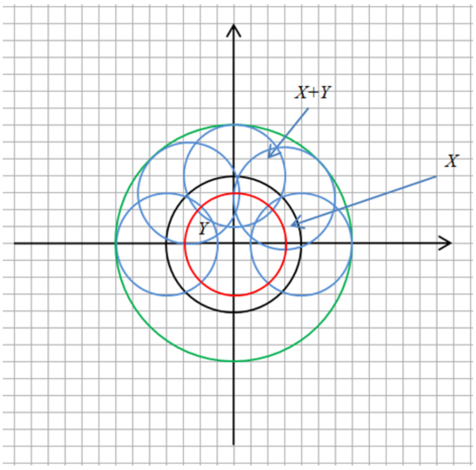

Рис. 3.

Доказательство: Согласно условию теоремы заданы кругов

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} : (x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 \le r_1^2 \right\},$$

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} : (x_2 - a_2)^2 + (y_2 - b_2)^2 \le r_2^2 \right\}.$$

Пусть некоторый вектор $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \in X \overset{*}{-} Y$, тогда $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + Y \subset X$. Для всех $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in X$ справедливо соотношение $a_1 - r_1 \le x_1 \le a_1 + r_1$, $b_1 - r_1 \le y_1 \le b_1 + r_1$. Из этого следует, что $x_1 \in [a_1 - r_1, a_1 + r_1]$, $y_1 \in [b_1 - r_1, b_1 + r_1]$. То же самое для всех $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in Y$ справедливо соотношение

$$x_2 \in [a_2 - r_2, a_2 + r_2],\ y_2 \in [b_2 - r_2, b_2 + r_2].$$

В силу теоремы 2 следует, что

$$x_3 \in [a_1 - r_1, a_1 + r_1] \overset{*}{-} [a_2 - r_2, a_2 + r_2] =$$
$$= [a_1 - a_2 - (r_1 - r_2), a_1 - a_2 + (r_1 - r_2)],$$
$$y_3 \in [b_1 - r_1, b_1 + r_1] \overset{*}{-} [b_2 - r_2, b_2 + r_2] =$$
$$= [b_1 - b_2 - (r_1 - r_2), b_1 - b_2 + (r_1 - r_2)].$$

Из этого

$$X \overset{*}{-} Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} : (x_3 - (a_1 - a_2))^2 + (y_3 - (b_1 - b_2))^2 \le (r_1 - r_2)^2 \right\}.$$

Теорема доказана (Рис. 4.).

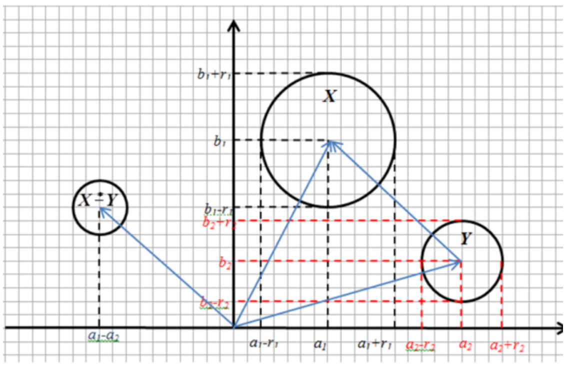

Рис. 4.

$X \overset{*}{-} Y$ разность Минковского кругов X, Y радиуса r_1, r_2 с центрам в начало координата в плоскости R^2, является круг радиуса $r_1 - r_2$ с центрам в начало координата (Рис. 5.).

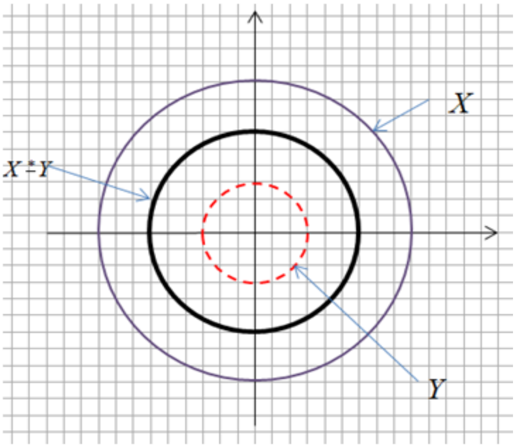

Рис. 5.

Если мы посмотрим на рис. 5, то убедимся, что граница круг $X \overset{*}{-} Y$ - это множество центров окружности X при смещении окружности Y от внутренней части окружности к границе окружности X (Рис. 6.).

Используя приведенные соображения и теоремы, мы можем построить разность и сумму Минковского различных множеств.

Геометрической разностью круга и горизонтального отрезка называется *лунка* (Рис.7.).

Пуст $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \le \sqrt{2} \right\}$ круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и отрезка $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : |x| \le 1 \right\}$.

Тогда множества $L = A \overset{*}{-} B$ является лунка.

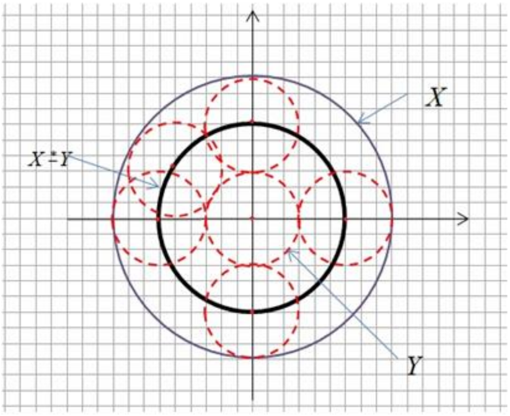

Рис. 6.

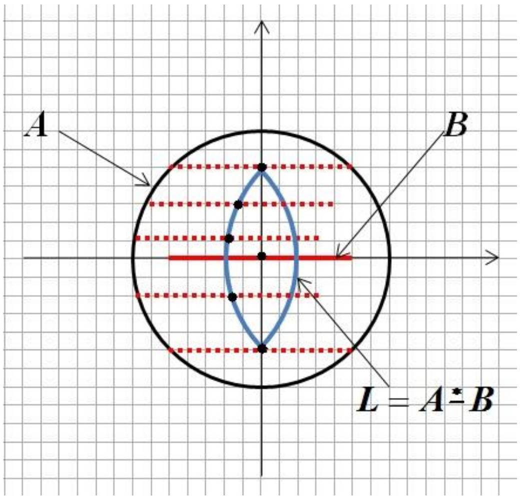

Рис. 7.

Рассмотрим круг $A=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}: x^2+y^2\le r^2\right\}$, *прямоугольник* $P=\{|x|\le h_1, |y|\le h_2\}$, см. рис. 8, и их *геометрическую разность*

$$D=A\overset{*}{-}P \quad D\neq\varnothing,$$

предполагая, что

$$h_1\ge 0, h_2\ge 0,\ \ 0<h_1^2+h_2^2<R^2$$

Если $h_2=0$, то множество P превращается в горизонтальный отрезок $P=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}: |x|\le 1\right\}$, а множество D имеет форму вертикальной лунки L.

Множество D центрально-симметрично, симметрично относительно осей x и y, и ограничено кривой $P_1P_2P_3P_4$. Дуга P_1P_2 кусок окружности радиуса r с центром в точке $(-h_1,-h_2)$, причём

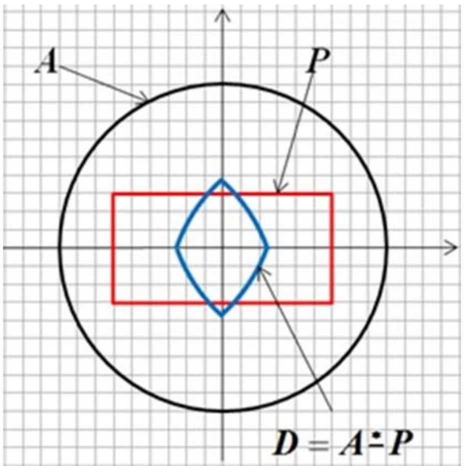

Рис. 8.

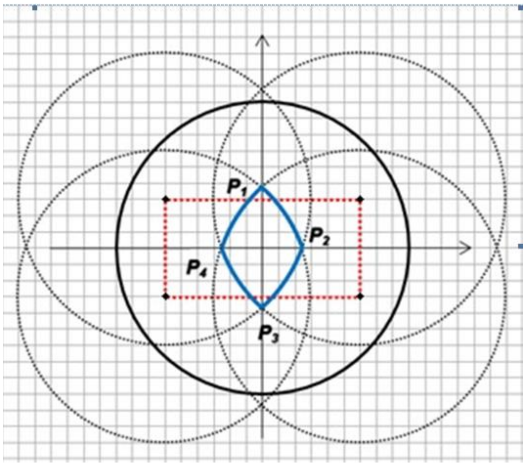

Рис. 9.

$$P_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{R^2 - h_2^2} - h_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{R^2 - h_1^2} - h_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

см. рис. 9, который построен для набора параметров $R = 3,\ h_1 = 2,\ h_2 = 1$.

3.Обсуждение полученных результатов

Пусть движение вектора z на плоскости R описывается линейным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = \upsilon - u, \tag{1}$$

где $u \in P,\ \upsilon \in Q -$ управляющие параметры, u управляющий параметр преследующего игрока, υ управляющий параметр убегающего игрока. $P,\ Q -$ произвольные непустые подмножества R. Далее, в R задано терминальное множество M.

Игра начинается из положения $z(0) = z_0 \notin M$ и считается законченной в тот момент времени t_1, когда $z(t_1) \in M$. В противном случае, то есть, если такое конечное t_1 не существует, то будем говорить, что произошло уклонение. Преследователь пытается вывести фазовую точку на множество M. Преследуемый объект – убегающий, вообще говоря, придерживается противоположной цели.

Определение 4. Множество допустимых стратегий убегающего игрока, состоящее из всех измеримых функций $\upsilon : R \times [0, \infty) \to R$, удовлетворяющих условию $\upsilon \in Q$ при почти всех $t \ge 0$ будем обозначать через V. Множество допустимых стратегий преследователя, состоящее из всех измеримых функций $u : U \times R \times [0, \infty) \to R$, удовлетворяющих условию $u \in P$ при почти всех $t \ge 0$ будем обозначать через U.

Определение 5. В игре (1) время преследования $t_1 = T(z_0)$ будем называть оптимальным, если

1) у убегающего игрока существует такая стратегия $\upsilon = \upsilon(z_0, t)$, что любой стратегии преследующего игрока, $z(t) \notin M$ при $t < t_1 = T(z_0)$.

2) по любой стратегии $\upsilon = \upsilon(z_0, t)$ убегающего игрока, у преследующего существует такая стратегия $u = u(z_0, \upsilon(t), t)$ что, $z(t_1) \in M$.

Тогда соответствующие стратегии убегающего и преследующего игрока называется оптимальными.

Пусть теперь в игре (1) $M = \{0\}$,

$$P = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : (u_1)^2 + (u_2)^2 \le a^2 \right\},$$

$$Q = \left\{ \upsilon = \begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{pmatrix} : (\upsilon_1)^2 + (\upsilon_2)^2 \le b^2 \right\}, \quad a > b,$$

$z(0) = z_0 \ne 0$ тогда в силу теоремы 4 $P \overset{*}{-} Q = \left\{ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} : (w_1)^2 + (w_2)^2 \le (a - b)^2 \right\}$ - является замкнутым кругом с радиусом $a - b$. Нетрудно показать, что $\upsilon = \upsilon(z_0, t) = b \dfrac{z_0}{\|z_0\|}$ оптимальное управление убегающего игрока, $u = u(z_0, \upsilon(t), t) = \upsilon(t) + (a - b)\dfrac{z_0}{\|z_0\|}$ оптимальное управление преследующего игрока и время поимки $t_1 = T(z_0) = \frac{\|z_0\|}{a-b}$ будет оптимальным в смысле определение 5.

Отметим, что как в работе [12] вводя понятие телесно гладкое множество с константой $\frac{1}{c}$, $c>0$ и сильно выпуклое множество с константой $r \in (0;c)$ можно было решить эту задачу в более общих случаях. В работах [12,13] дифференциальная игра (1) рассматривается на конечном отрезке и доказана теорема об альтернативе.

Заключение.

Таким образом, в данной работе приведены определения разности и суммы Минковского множеств и их некоторых свойств с доказательствами. Построены аналитические формулы функции Минковского для разности (суммы) различных выпуклых множеств, таких как параллелепипеды, круги и прямоугольники. Доказано, что сумма Минковского двух замкнутых (открытых) кругов, является замкнутый(открытый) круг. Разработанный метод позволит строить приближенные функции Минковского для разности различных тел. Предложенный подход применяется для решения задач дифференциальных игр преследования.

В статье описаны способы преодоления особенностей вычисления суммы и геометрической разности Минковского. Приведенные здесь примеры на самом деле описаны для множеств на плоскости. Их расчет в трехмерном пространстве довольно сложен, и во многих случаях допущены ошибки, даже в четырехмерных полиэдрах эти случаи не изучались. Однако приблизительный расчет суммы и геометрической разности Минковского в трехмерном пространстве может быть относительно быстрым и простым. Тем не менее, решение этих вопросов в общих случаях остается актуальным.

Сумма и разность Минковского были использованы для получения достаточных условий для завершения игры в дифференциальных играх [12], [13], [14], [15]. Расчет геометрической разности был в основном необходим при определении адекватности условий в примерах [15]. Сегодня приближенное вычисление суммы и разности Минковского играет важную роль в решении практических задач с помощью дифференциальных игр. В то же время одним из важнейших вопросов теоретического исследования является оценка разницы Минковского снизу и сверху.

References:

1. Minkowski, H. (1904). *Verhandlungen des III internationalen Mathematiker Kongresses in Heidelberg*. (pp.164-173). Berlin.
2. Matheron, G. (1976). *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley, New York.
3. Hadwiger, H. (1957). *Vorlesungen über Inhalt Oberfläche und*. Isoperimetrie, Springer, Berlin.
4. Ghosh, P. K. (1988). A mathematical model for shape description using Minkowski operators, *Comput. Vision, Graphics, Image Process,* 44, 239-269.
5. Kaul, A. (1993). *Computing Minkowski sums*, PhD Thesis, Columbia University.
6. Kaul, A., & Rossignac, J. R. (1992). Solid interpolating deformations: Construction and animation of PIP, *Computers and Graphics*, 16, 107-115.
7. Lozano-Pe¨rez, T., & Wesley, M.A. (1979). An algorithm for planning collision-free paths among polyhedral obstacles, *Comm. ACM* 22, 560-570.
8. Polovinkin, Y.S., & Balashov, M.V. (2007) Elements of convex and strongly convex analysis. *Fizmatlit.,* Issue 2, pp.440.
9. Wein, R. (2006). *Exact and efficient construction of planar Minkowski sums using the convolution method*. Proc. 14th European Symposium on Algorithms (ESA), LNCS. 2006. V. 4186, pp. 829–840.
10. Ramkumar, G.D. (1996). *An algorithm to compute the Minkowski sum outer-face of two simple polygons*. In: Proc. 12th Sympos. Comput. Geom., pp. 234–241.
11. Kaul, A., O'Connor, M.A., & Srinivasan, V. (1991). *Computing Minkowski sums of regular polygons*. In: Proc. 3rd Canad. Conf. Comput. Geom., pp. 74–77.
12. Pontryagin, L.S. (1980). Linear differential games of pursuit. *Math. USSR-Sb.*, Vol 40, Issue 3, pp. 285-303.

13. Pontryagin, L.S. (1971). Linear differential runaway game. *Trudi MIAN SSSR.*, Vol 112, pp. 30-63.
14. Satimon, N.Yu. (1973). To the pursuit problem in linear differential games. *Differential equations*, Vol 9, Issue 11, pp. 2000-2009.
15. Ivanov, G.E. (2006). Weakly convex sets and their properties. *Math. Notes*., Vol 79, Issue 1, pp. 60-86.