

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
PIHII (Russia) = 0.126
ESJI (KZ) = 8.716
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2020 Issue: 05 Volume: 85

Published: 17.05.2020 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



Ablakul Abdirashidov
Samarkand State University
Corresponding member of International
Academy, Doctor of Physical and Mathematical
Sciences, Professor of department of
theoretical and applied mechanics,
abdira@mail.ru



Akmaljon Abdurashidov
Samarkand State University
Researcher

STATIONARY SOLUTION OF SOME EQUATIONS OF LONG SOLITARY WAVES PROPAGATING OVER THE SURFACE OF THE WATER OVER A SLOWLY CHANGING INCLINED BOTTOM

Abstract: In this paper, particular stationary solutions of some equations of the theory of strongly nonlinear waves are found using the modified simple equation method and the method of tanh-coth functions. The results of these methods converge faster to an exact solution for some nonlinear problems. These methods are very effective for finding exact and approximate solutions for wide classes of problems of mechanics. By creating a phase portrait of solitary stationary waves, qualitative conclusions are made about the state of nonlinear and dispersion effects when solving the problems of wave propagation on a water surface.

Key words: modified simple equation method, tanh-coth functions method, approximate solution, particular solution, surface waves, phase portrait.

Language: Russian

Citation: Abdirashidov, A., & Abdurashidov, A. (2020). Stationary solution of some equations of long solitary waves propagating over the surface of the water over a slowly changing inclined bottom. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 05 (85), 385-391.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-05-85-74> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.05.85.74>

Scopus ASCC: 2200.

СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛИННЫХ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ НАД МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ НАКЛОННЫМ ДНОМ

Аннотация: В данной работе найдены частные стационарные решения некоторых уравнений теории сильно-нелинейных волн с помощью упрощенным методом укороченных разложений и методом tanh-coth функций. Результаты этих методов сходятся быстрее к точному решению для некоторых нелинейных проблем. Эти методы очень эффективны для нахождения точных и приближенных решений для широких классов проблем механики. Созданием фазового портрета уединенных стационарных волн сделаны качественные выводы о состоянии нелинейных и дисперсионных эффектов при решении задач распространения волн на водной поверхности.

Ключевые слова: упрощенный метод укороченных разложений и метод tanh-coth функций, приближенное решение, частное решение, поверхностные волны, фазовый портрет.

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.716
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

Введение

При изучение нелинейных волновых процессов основные учитываемые эффекты являются нелинейность и дисперсия. Известно, что учет нелинейности приводит к появлению в спектре волн высоких гармоник, которые могут формировать крутые фронты, а дисперсия, наоборот, приводит к разбеганию этих зарождающихся гармоник [14]. Если эти две эффекты уравниваются, то в изучаемом процессе возникают стационарные бегущие волны. Если рассматривается распространение волн по поверхности воды над переменным наклонным дном, то ожидается влияние дисперсии, амплитуда волны и искривление ее профили изменяются. Даже могут возникнуть и иногда долгое время существовать волны постоянного профиля, несмотря на определенное наклона дна. Поэтому, изучение волновой динамики требует учет широкий спектр явлений, связанных с нелинейностью, дисперсией, вязкости и трением. Для достижение этой цели сначала можно изучать распространения уединенных волн на водной поверхности. Этот процесс можно описать уравнениями теории сильно-нелинейных волн, так как, поверхностные длинные волны не могут распространяться без изменения формы. Именно учет влияние дисперсии позволяет решению вопроса изучения уединенных волн. Исходя из этого в работе [14] приведен более современные уравнения теории сильно-нелинейных волн, а также их упрощенные варианты. Там некоторые частные случаи этих уравнений решены аналитически или численно. Теория длинных волн широко и успешно используется для описания прибрежных волн и волн на тонких слоях вязких жидкостей [2, 5, 7, 16]. Несмотря на это остается актуальным усовершенствования методики решения таких нелинейных уравнений и многосторонний анализ их результатов [3, 4, 8, 14-16]. В данной работе найдены частные стационарные решения некоторых уравнений теории сильно-нелинейных волн с помощью упрощенным методом укороченных разложений [1, 6, 12, 13, 15], методом синус-косинус функций [9, 11] и методом tanh-coth функций [9, 10].

Постановка задачи. В общем виде требуется решить следующую нелинейное уравнение, заданное в неявной форме

$$F(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ - неизвестная функция; x - координата; t - время; F - неявной функцией зависящая от $u(x, t)$ и его различные частные производные; $u_t = \partial u / \partial t$; $u_x = \partial u / \partial x$ и т.д.

В работе [14, с.210, форм. (7.24)] отмечены, что процесс распространения поверхностных волн по поверхности воды в одном направлении,

начальная глубина которой очень медленно меняется в масштабе длины волны, учитывающий различные нелинейные эффекты (например, капиллярность, вязкость, трения о дно), можно описать нелинейным уравнением в размерных (физических) переменных вида

$$u_{tt} - gh u_{xx} - 2gh_x u_x - gh_{xx} u = \left(h^2 / 3 - \sigma / (\rho g) \right) u_{ttxx} - u_x u_{tt} - 2gh u_x u_{xx} + 3gh u_x^2 u_{xx} + su_t / (\rho h) + 2(\pi / \rho)(2hu_{txx} + 2h_x u_{tx} + h_{xx} u_t). \quad (2)$$

В работе [14, с.207, форм. (7.1)] также отмечены, что уравнение (2) можно упростить фактором постоянства глубины ($h = \text{const}$), без вязкости ($\bar{\mu} = 0$) и трения о дно ($\bar{s} = 0$), а с учетом только капиллярности, дисперсию и нелинейности:

$$u_{tt} - gh u_{xx} = \left(h^2 / 3 - \sigma / (\rho g) \right) u_{ttxx} - u_x u_{tt} - 2gh u_x u_{xx} + 3gh u_x^2 u_{xx}, \quad (3)$$

где дисперсионный член

$\left(h^2 / 3 - \sigma / (\rho g) \right) u_{ttxx}$ учитывает влияния: $(h^2 / 3) u_{ttxx}$ - дисперсионные свойства поверхностных волн и $\sigma / (h \rho g)$ - эффект капиллярности, а остальные члены - нелинейности. Это уравнение приближенно справедливо, если глубина моря порядка 100 м, а длина волны больше 200 м.

Ниже рассмотрены вопросы нахождения частного стационарного решения вида уединенных волн, формируемые на водной поверхности, уравнения (3) и её частных случаев.

Алгоритмы упрощенного метода укороченных разложений, метода синус-косинус функций и метода tanh-coth функций.

Алгоритм 1. Основные этапы *упрощенного метода укороченных разложений*:

Шаг 1. Используя преобразование

$$u(x, t) = u(\xi) \text{ с «бегущей» координатой}$$

$$\xi = x - Ct \quad (4)$$

где C - скорость волны, мы можем переписать уравнение (1) как следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ):

$$P(u, u', u'', u''', \dots) = 0, \quad (5)$$

где верхние индексы обозначают производные относительно ξ ; P - неявная функция u и его полных производных относительно ξ . Затем интегрируем ОДУ (5) столько раз, сколько это возможно, устанавливая постоянную интегрирования равной нулю.

Шаг 2. Предположим, что формальное решение уравнения (5) может быть выражено следующим образом

$$u(\xi) = \sum_{k=0}^N a_k [\psi'(\xi)/\psi(\xi)]^k, \quad (6)$$

где a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) - произвольные постоянные, которые будут определены таким образом, который $a_N \neq 0$; $\psi(\xi)$ - неизвестная функция, которая будет определена позже.

Шаг 3. Положительное целое число N может быть определено, считая гомогенный баланс между самым высоким порядком производной и с самым высоким порядком нелинейности, появляющимся в уравнение (5).

Шаг 4. Вычисление всех необходимых производных u', u'', u''', \dots , входящие в уравнение (5) на основе (6) и подстановка их на место. Приравнивание все коэффициенты $\psi^{-j}(\xi)$ к нулю, где $j \geq 0$. Эта операция приводит к системе который может быть решен, чтобы найти a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) и $\psi(\xi)$. Замена значений a_k и $\psi(\xi)$ в (6) заканчивает определение решения уравнение (1).

Алгоритм 2. Основные этапы *метода синус-косинус функций*:

Шаг 1. Повторяется 1-шаг 1-го алгоритма.

Шаг 2. Следуя выводам работ [9, 11, 15], решения (5) могут быть установлены в виде

$$u(\xi) = \lambda \sin^v(\mu\xi) \text{ или } u(\xi) = \lambda \cos^v(\mu\xi), \quad (7)$$

где λ, μ, v - определяемые параметры; $|\xi| \leq 0,5\pi/\mu$.

Шаг 3. Как следствие, производные (7) становятся

$$\begin{aligned} u_\xi &= \lambda v \mu \sin^{v-1}(\mu\xi) \cos(\mu\xi), \\ u_{\xi\xi} &= \lambda v(v-1)\mu^2 \sin^{v-2}(\mu\xi) - \lambda v^2 \mu^2 \sin^v(\mu\xi) \\ &\text{или} \\ u_\xi &= -\lambda v \mu \cos^{v-1}(\mu\xi) \sin(\mu\xi), \\ u_{\xi\xi} &= -\lambda v^2 \mu^2 \cos^v(\mu\xi) + \lambda \mu^2 v(v-1) \cos^{v-2}(\mu\xi). \end{aligned} \quad (8)$$

Шаг 4. Подставим соотношений (7) и (8) в приведенного уравнения (5) и будем решать полученную систему алгебраических уравнений с помощью компьютеризированных символических пакетов. Далее мы собираем все члены с функциями $\sin^v(\mu\xi)$ для балансирования синусов или $\cos^v(\mu\xi)$ для балансирования косинусов, и приравниваем к нулю их коэффициентов, чтобы получить систему алгебраических уравнений с неизвестными λ, μ, v . Далее решим последующую систему, чтобы получить все возможные значения этих параметров.

Алгоритм 3. Основные этапы *метода tanh-coth функций*:

Шаг 1. Повторяется 1-шаг 1-го алгоритма.

Шаг 2. Следуя выводам работ [9, 10, 15], решения (5) могут быть установлены в виде

$$u(\xi) = \sum_{k=0}^N a_k y^k + \sum_{k=1}^N b_k y^{-k}, \quad (9)$$

где $y = y(\xi) = \tanh(\mu\xi)$ или $y = y(\xi) = \coth(\mu\xi)$;

a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) и b_k ($k = 1, 2, \dots, N$) - произвольные постоянные, которые будут определены таким образом, который $a_N \neq 0$ или $b_N \neq 0$; μ - определяемый параметр.

Шаг 3. Повторяется 3-шаг 1-го алгоритма.

Шаг 4. Повторяется 4-шаг 1-го алгоритма, но с учетом неизвестных коэффициентов a_k, b_k и неизвестной функции

$$y = y(\xi) = \tanh(\mu\xi) \text{ или } y = y(\xi) = \coth(\mu\xi). \quad (10)$$

Основным преимуществом этих методов являются то, что они может быть применены непосредственно к большинству типов дифференциальных уравнения. Другим важным преимуществом этих методов являются то, что они способны значительно сократить размер вычислительной работы.

Результаты расчетов. Для нахождения частного стационарного решения уравнения (1) примем обозначение вида (4). В этом случае уравнение (3) преобразуется в ОДУ, которое имеет первый интеграл

$$(gh - C^2)u_\xi = B_1 C^2 u_{\xi\xi\xi} + B_2 (u_\xi)^2 - gh(u_\xi)^3 + C_1. \quad (11)$$

Здесь $B_1 = \sigma/(\rho g) - h^2/3$; $B_2 = C^2/2 + gh$; C_1 - постоянная интегрирования.

Сначала введем обозначение $u_\xi = w$,

$u_{\xi\xi\xi} = w''$ и вместо (11) получим более простое ОДУ относительно новое неизвестной функции w :

$$w'' + aw + bw^2 + cw^3 + d = 0. \quad (12)$$

Здесь

$$a = (C^2 - gh)/(B_1 C^2); \quad b = B_2/(B_1 C^2);$$

$$c = -gh/(B_1 C^2); \quad d = C_1/(B_1 C^2).$$

Это уравнение с наличием третьего и пятого слагаемым отличается от уравнения Дурффинга. Для построения фазовой плоскости (w, w_ξ) уравнению (12) приведем к виду умножая ее на w_ξ и интегрируя один раз:

$$w'^2 + aw^2 + (2b/3)w^3 + (c/2)w^4 + 2dw + C_2 = 0, \quad (13)$$

где C_2 - постоянная интегрирования. На фазовой плоскости (w, w_ξ) точка $(0, 0)$ устойчивого положения равновесия типа «узел», кроме того точки на полупрямой $w > w_0$ неустойчивого положения равновесия, а одна из них $(0, w_0)$ типа «седло». Фазовой портрет говорит о том, что по

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.716
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

поверхности воды могут существовать как периодические стационарные волны (им соответствуют движения по фазовым траекториям вокруг положения равновесия типа «узел»), так и

уединенная стационарная волна (движение по «седло») (см. рис.1). Эти факты существуют только при определенных соотношениях нелинейных и дисперсионных эффектов.

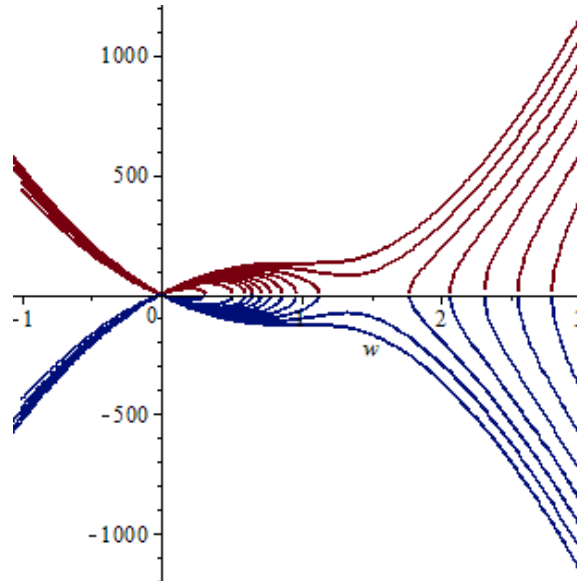


Рис.1.

Далее в работе [14] отмечены, что решения уравнения (13) может быть выражены в терминах эллиптических функций с двумя произвольными константами C_1 и C_2 .

Теперь перейдем к решению уравнения (12) с помощью упрощенного метода укороченных разложений и методом \tanh - \coth функций.

Упрощенный метод укороченных разложений.

Предположим, что решение уравнение ОДУ (12) может быть выражено полиномом по $\psi'(\xi)/\psi(\xi)$ как показано в (6). Условие балансирование w^3 и w'' в уравнении (12) дает: $3N = N+2$, т.е. $N = 1$. Таким образом, мы можем написать (6) как следующая простая форма

$$w(\xi) = a_0 + a_1 \psi'(\xi)/\psi(\xi), \quad (14)$$

где a_0 и a_1 - константы, которые будут определены таким образом, чтобы выполнялось условие $a_1 \neq 0$. Подставляя (14) в (13) и приравняем к нулю коэффициентов $\psi^0, \psi^{-1}, \psi^{-2}, \psi^{-3}$, легко получим систему уравнений относительно неизвестных констант a_0 и a_1 . Из первого кубического уравнения находим a_0 , а из четвертого имеем $a_1 = \pm \sqrt{-2/c}$, тогда из второго и третьего уравнения получим

$$\frac{\psi'''}{\psi''} = \delta \Rightarrow \psi'' = c_2 e^{\delta \xi}; \quad \psi' = c_2 m e^{\delta \xi} \Rightarrow \psi(\xi) = c_1 + \frac{c_2 m}{\delta} e^{\delta \xi},$$

где c_1, c_2 – постоянные интегрирования;

$$m = \frac{3}{(b + 3ca_0)a_1}$$

$$\delta = -m(a + 2ba_0 + 3ca_0^2).$$

Отсюда имеем точное решение уравнение (13)

$$w(\xi) = a_0 + a_1 \frac{c_2 m \delta e^{\delta \xi}}{c_1 \delta + c_2 m e^{\delta \xi}},$$

в частности это означает, что, если $c_1 = 1, c_2 m = \delta$, то уединенная стационарная волна имеет форму перепада (кинка) и описывается гиперболическим тангенсом: $w(\xi) = a_0 + (a_1 \delta / 2)(1 + \tanh(\delta \xi / 2))$, а если $c_1 = -1, c_2 m = \delta$, то гиперболическим котангенсом:

$w(\xi) = a_0 + (a_1 \delta / 2)(1 + \coth(\delta \xi / 2))$. Заметим, что произведение амплитуды уединенной волны на ее ширину является постоянной величиной $a_1 = const$.

Точное решение уравнение (11) равно

$$u(\xi) = a_0 \xi + a_1 \ln(c_1 \delta + c_2 m e^{\delta \xi}) + c_3,$$

а для (3) при $\xi = x - Ct$ имеем

$u(x,t) = a_0(x - Ct) + a_1 \ln(c_1\delta + c_2me^{\delta(x-Ct)}) + c_3$, (15)
 где c_3 – постоянное интегрирование.

Частные случаи. Теперь рассмотрим две упрощенные версии решения уравнения (3) и их будем решать, как в общем случае.

1. Пусть $c = 0$. Это соответствует к случаю постоянство глубины воды и не учету донное трение. В этом случае уравнение (12) примут вид

$$w'' + aw + bw^2 + d = 0 \quad (16)$$

На фазовой плоскости (w, w_ξ) уравнения (16) в этом случае точка $(0,0)$ является единственным устойчивым положением равновесия. Это положение равновесия типа «узел». Это означает, что в воде могут существовать только периодические стационарные волны.

Упрощенный метод укороченных разложений.

Предположим, что решение уравнение ОДУ (16) может быть выражено полиномом по $\psi'(\xi)/\psi(\xi)$ как показано в (6). Условие балансирование w^2 и w'' в уравнении (16) дает: $2N = N+2$, т.е. $N = 2$. Таким образом, мы можем написать (6) как следующая простая форма

$$w(\xi) = a_0 + a_1\psi'(\xi)/\psi(\xi) + a_2[\psi'(\xi)/\psi(\xi)]^2, \quad (17)$$

где a_0, a_1 и a_2 - константы, которые будут определены таким образом, чтобы выполнялось условие $a_2 \neq 0$. Подставляя (17) в (16) и приравниваем к нулю коэффициентов $\psi^0, \psi^{-1}, \psi^{-2}, \psi^{-3}, \psi^{-4}$ легко получим систему уравнений относительно неизвестных констант a_0, a_1 и a_2 . Из первого находим

$a_0 = -a/(2b) \pm \sqrt{(a/(2b))^2 - d/b}$, а из пятого имеем $a_2 = -6/b$, тогда из второго и четвертого уравнения получим

$$\frac{\psi'''}{\psi''} = \delta \Rightarrow \psi'' = c_2e^{\delta\xi}; \quad \psi' = c_2me^{\delta\xi} \Rightarrow$$

$$\psi(\xi) = c_1 + \frac{c_2m}{\delta}e^{\delta\xi},$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования;

$m = \frac{5a_2}{a_1 + ba_1a_2}; \delta = -m(a + 2ba_0)$. Из третьего получим уравнение относительно неизвестного a_1 : $ba_1^2 - (3/m)a_1 + (2/m^2)a_2 - aa_2 - 2ba_0a_2 = 0$.

Тогда имеем точное решение уравнение

$$w(\xi) = a_0 + a_1 \frac{c_2m\delta e^{\delta\xi}}{c_1\delta + c_2me^{\delta\xi}} + a_2 \left(\frac{c_2m\delta e^{\delta\xi}}{c_1\delta + c_2me^{\delta\xi}} \right)^2.$$

2. Рассмотрим случай кубической нелинейности, когда $B_2(u_\xi)^2 = 0, C_1 = 0$ в уравнение (3). В этом случае мы имеем, что

$$u_{\xi\xi\xi} + \alpha u_\xi + \beta(u_\xi)^3 = 0. \quad (18)$$

где

$$\alpha = (C^2 - gh)/(B_1C^2); \quad \beta = -gh/(B_1C^2);$$

$$u_\xi = w; \quad w_{\xi\xi} = w''$$

и получим следующее ОДУ

$$w'' + \alpha w + \beta w^3 = 0. \quad (19)$$

Упрощенный метод укороченных разложений.

Предположим, что решение уравнение ОДУ (19) может быть выражено полиномом по $\psi'(\xi)/\psi(\xi)$ как показано в (6). Условие балансирование w^3 и w'' в уравнении (19) дает: $3N = N+2$, т.е. $N=1$. Таким образом, как и в предыдущих случаях, получим

$$a_0 = 0 \text{ или } a_0 = \pm\sqrt{-\alpha/\beta}; \quad a_1 = \pm\sqrt{-2/\beta}.$$

Частные случаи:

$$\text{Случай 1. } a_0 = \pm\sqrt{-\alpha/\beta}, \quad a_1 = \pm\sqrt{-2/\beta},$$

тогда получим

$$\frac{\psi'''}{\psi''} = \delta \Rightarrow \psi'' = c_2e^{\delta\xi}; \quad \psi' = c_2me^{\delta\xi} \Rightarrow$$

$$\psi(\xi) = c_1 + \frac{c_2m}{\delta}e^{\delta\xi},$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования;

$$m = \frac{1}{\beta a_0 a_1}; \quad \delta = -\frac{\alpha + 3\beta a_0^2}{\beta a_0 a_1}.$$

Отсюда имеем точное решение уравнение (19)

$$w(\xi) = a_0 + a_1 \frac{c_2m\delta e^{\delta\xi}}{c_1\delta + c_2me^{\delta\xi}}$$

или точное стационарное решение уравнения (3)

$$u(x,t) = a_0(x - ct) + a_1 \ln(c_1\delta + c_2me^{\delta(x-ct)}) + c_3.$$

Случай 2. $a_0 = 0$ и $a_1 \neq 0$, тогда получим

$$u(x,t) = a_1 \ln(c_1\delta + c_2me^{\delta(x-ct)}) + c_3,$$

где c_3 – постоянный интегрирования.

Метод tanh-coth функций.

Предположим, что решение уравнение ОДУ (16) может быть выражено полиномом по $y(\xi)$ как показано в (9). Условие балансирование w^3 и w'' в уравнении (16) дает: $3N = N + 2$, т.е. $N = 1$. Таким образом, мы можем написать (17) как следующая простая форма $w(\xi) = a_0 + a_1y(\xi)$, где a_0 и a_1 - константы, которые будут определены таким образом, чтобы выполнялось условие $a_1 \neq 0$. Легко получим следующие равенства:

$$w(\xi) = a_0 + a_1y; \quad w''(\xi) = 2\mu^2 a_1 y(y^2 - 1). \quad (20)$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	РИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.716	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

Эти выражения (20) подставляем в уравнение (16) и приравниваем к нулю коэффициенты y^0 , y^1 , y^2 , y^3 . Тогда имеем систему уравнений относительно неизвестных констант a_0 , a_1 и b_1 и получим при $\mu = \pm 1$: $a_0 = 0$ или $a_0 = \pm\sqrt{-\alpha/\beta}$; $a_1 = \pm\sqrt{-2/\beta}$. Частные случаи:

Случай 1. $a_0 = \pm\sqrt{-\alpha/\beta}$ и $a_1 = \pm\sqrt{-2/\beta}$. Отсюда имеем точное решение уравнение (16) $w(\xi) = a_0 \pm a_1 \tanh \xi$ или точное решение уравнение (12)

$$u(x, t) = a_0(x - ct) \pm a_1 \ln(\cosh \xi) + c_3,$$

где c_3 – постоянный интегрирования.

Случай 2. $a_0 = 0$ и $a_1 \neq 0$, тогда получим

$$u(x, t) = \pm a_1 \ln(\cosh \xi) + c_3.$$

Выводы.

Таким образом, приближенно решены уравнения поверхностных волн в частном случае и получены точные решения. Упрощенным методом укороченных разложений и метод \tanh - \coth функций успешно применены к решению некоторых эволюционных уравнений. Результаты расчетов проверены с помощью Maple. Эти методы полезны и для линейных и для нелинейных уравнений разного порядка и разного типа. Эти методы очень эффективны для нахождения точных и приближенных решений для широких классов проблем механики.

References:

1. Abdurashidov, A. A., Ortiqov, B. B., Qadirov, N. X., & Abdirashidov A. (2018). Exact solution of nonlinear equations Burgers-Huxley, Korteweg-de Vries-Burgers and Klein-Gordon using the modified simple equation method. *International Scientific Journal Theoretical & Applied Science*, №3, pp.101-107.
2. Debnath, L. (1994). *Nonlinear water waves*. Academic Press: New York.
3. Galiev, Sh. U., & Galiyev, T. Sh. (2017). 'Elastica'-like waves and particles: from Bernoulli, Euler, Laplace and Faraday to the eruption of the Universe. (p.50). The University of Auckland.
4. Galiev, Sh. U., & Galiyev, T. Sh. (2017). *Eruption of matter, dark energy and the Universe from a pre-universe*. (p.93). The University of Auckland.
5. Lui, X., & Duncan, J. H. (2003). The effects of surfactants on spilling breaking waves. *Nature*, 421, pp. 520–523.
6. Mirzazadeh, M. (2014). Modified Simple Equation Method and its Applications to Nonlinear Partial Differential Equations // *Inform. Sci. Lett.* No. 1, pp. 1-9.
7. Oron A., Davis S. H., & Bankoff, S. G. (1997). Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev. Modern Phys.*, 69 (3), pp. 931–980.
8. Smith, R. A. (1998). An operator expansion formalism for nonlinear surface waves over variable depth. *J. Fluid Mech.*, 363, pp. 333–347.
9. Wazwaz, A. M. (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. (p.761). Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
10. Wazwaz, A. M. (2004). The tanh method for traveling wave solutions of nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.*, 154, pp. 714-723.
11. Wazwaz, A. M. (2004). A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 40, pp. 499–508.
12. Abdirashidov, A., Kuvandikov I. M., Abdurashidov A. A., Ortikov B. B., Kadirov N. X., & Mustafoyeva A. X. (2018). Tochnoye resheniye nelineynix uravneniy Byurgersa-Xaksli, Korteveg-de Vriza-Byurgersa i Kleyna-Gordona uproshyennim metodom ukorochennix razlozeniy. *Problemi arxitekturi i stroitelstvo*, 1, pp. 114-119.
13. Abdurashidov, A. A. (2018). Tochnoye resheniye nekotoryx nelineynix uravneniy Gardnera uproshennim metodom ukorochennix razlozeniy. *Mejd. setevoy nauchno-prakticheskiy jurnal «Nauka sredi nas»*. 2(6), pp. 35-46.
14. Galiev, Sh. U. (2009). *Charles Darwin's geophysical reports as models of the theory of catastrophic waves*, Auckland.
15. Kudryashov, N. A. (2010). *Metodi nelineynoy matematicheskoy fiziki: Uchebnoye posobiye*. 2-ye izd. (p.368). Dolgoprudnyy: Intellekt.

Impact Factor:	ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 0.829	PIHII (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.716	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

16. Pelinovskiy, Ye. N. (1996). *Gidrodinamika voln sunami. Institut prikladnoy fiziki RAN. Nijniy Novgorod.*

Impact Factor:	ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 0.829	PIHHI (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.716	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350
