Impact Factor:	ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 0.829	РИНЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.716	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

QR – Issue

QR – Article

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2020 **Issue:** 04 **Volume:** 84

Published: 28.04.2020 http://T-Science.org

Roman Yurevich Kostyuchenko
Omsk State Pedagogical University
Associate Professor, Candidate of Pedagogical Sciences
Associate professor of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics Chair

LOGARITHMIC EQUATIONS AND THEIR SOLUTION METHODS AS AN ELEMENT OF THE CONTENT OF TEACHING MATHEMATICS IN HIGH SCHOOL

***Abstract**: Logarithmic equations are a traditional component of the meaningfully-methodical line of equations, in equations and their systems for a school mathematics course. The method of teaching students' logarithmic equations follows the conformities of an actual teaching methods of equations and maps the special aspects of equations of this type. So, from our point of view, the main issues of teaching logarithmic equations, which is occurred in senior high school, are related to the content component of the methodology, rather than to its other components: target, procedural, subject-personal. Therefore, the article substantiates the denotation of «Logarithmic equation» in the context of school education. And, since the denotation is revealed through classification, the author provides a tried through practice cleavage of logarithmic equations into groups based on differences in solution methods. All theoretical conclusions are illustrated by appropriate examples.*

***Key words**: Teaching methods of mathematics, teaching mathematics, teaching mathematics in senior high school, transcendental equation, logarithmic equations, solution of logarithmic equations, types of logarithmic equations, mathematical method, methods for solving logarithmic equations.*

***Language**: Russian*

***Citation**: Kostyuchenko, R. Y. (2020). Logarithmic equations and their solution methods as an element of the content of teaching mathematics in high school. *ISJ Theoretical & Applied Science, 04 (84),* 556-576.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-04-84-95 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.04.84.95

***Scopus ASCC**: 3304.*

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ КАК ЭЛЕМЕНТ СОДЕРЖАНИЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СТАРШИХ КЛАССАХ

***Аннотация**: Логарифмические уравнения – традиционная для школьного курса математики составляющая содержательно-методической линии уравнений, неравенств и их систем. Методика обучения учащихся логарифмическим уравнениям подчиняется закономерностям конкретной методики обучения уравнениям и отражает специфические особенности уравнений данного вида. Так, на наш взгляд, основные вопросы обучения логарифмическим уравнениям, которое осуществляется в старших классах, связаны с содержательным компонентом методики, нежели с её другими компонентами: целевым, процессуальным, субъектно-личностным. Поэтому в статье обосновывается объем понятия «Логарифмическое уравнение» в контексте школьного обучения. И, поскольку объем понятия раскрывается через классификацию, то автором приводится проверенное на практике деление логарифмических уравнений на группы, основанное на различии по методам решения. Все теоретические выводы иллюстрируются соответствующими примерами.*

***Ключевые слова**: методика обучения математике, обучение математике, обучение математике в старших классах, трансцендентные уравнения, логарифмические уравнения, решение логарифмических уравнений, виды логарифмических уравнений, математические методы, методы решения логарифмических уравнений.*

Введение

Логарифмические уравнения – один из классов уравнений, изучаемых в школьном курсе математики. Так, в основной школе учащиеся знакомятся преимущественно с алгебраическими уравнениями: линейными, квадратными, рациональными степени больше двух, дробными рациональными, иррациональными. Изучение этих уравнений и соответствующих неравенств продолжается и в старшей школе. Неалгебраические (трансцендентные) уравнения – показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические – изучаются в старшей школе. Порядок их изучения определяется логикой изложения материала в действующих учебниках.

В данной статье уделим внимание методике обучения логарифмическим уравнениям. Анализ школьных учебников показывает, что их авторы дают определение лишь простейшему логарифмическому уравнению, а общее понятие логарифмического уравнения приводят на содержательном уровне, и поясняют его на примерах. Между тем, в научно-методической литературе отмечается, что «логарифмическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестная находится только под знаком логарифма или в основании логарифма или и то и другое одновременно» [5, с. 28]. Согласно данному определению, уравнения, например, $\log_2 x=5$, $\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3$, $\log_5 x+\log_x 5=5/2$, $\log_x(x+6)=2$ являются логарифмическими. А уравнения, например, $5^{\lg x}+2x^{\lg 5}=15$, $\log_2(4-x^2)=x^4+2$ логарифмическими не являются; их называют уравнениями, содержащими неизвестное под знаком логарифмической функции. Заметим, что в школьном курсе математики определение понятия «логарифмическое уравнение» не включается в логические операции. Поэтому требовать от учащихся знания данного определения нет необходимости, хотя учителю необходимо им владеть.

На наш взгляд, основную сложность в методике обучения учащихся старших классов уравнениям и неравенствам составляет методика подбора заданий, упражнений для их решения. Понятно, что набор задач будет различный для различных этапов освоения учащимися уравнений (знакомство, изучение, применение). Различия будут также определяться и индивидуальными особенностями учащихся, что находит свое отражение в уровневой и профильной дифференциации. Однако, в любом случае, учителю необходимо представлять уравнения, неравенства и методы их решения в обобщенном, систематизированном виде и уже в соответствии со стандартом [13] и программой [12] реализовывать процесс обучения им.

Результаты исследования и их обсуждение

Мы уже отмечали ранее, что обобщение и систематизация знаний об основных классах трансцендентных уравнений основываются на делении их на группы в зависимости от вида. Так, для тригонометрических уравнений нами определяются три большие группы (простейшие тригонометрические уравнения; уравнения определенных четырех видов; уравнения, решение которых предполагает выполнение определенных преобразований, приводящих данное уравнение к решению уравнений первой или второй группы), методика работы с которыми и уровень овладения предполагаются различными [7]. Для показательных уравнений нами выделяются пять групп; здесь принцип деления исходит из количества чисел в основании степени, которые можно/нельзя представить в виде степени с рациональным показателем [8].

Желая продолжить традицию делить классы трансцендентных уравнений по группам на основании их вида, мы выполнили это и для логарифмических уравнений. Однако, как показали дальнейшие исследования, такое деление оказалось малоэффективным. Логарифмы – одна из немногих тем школьного курса математики, в которой тождественные преобразования одного и того же выражения могут осуществляться различными способами, не уступающими друг другу по сложности и продуктивности. Более того, привычные логарифмические тождества (логарифм произведения и частного, логарифм степени и другие) есть тождества, рассматриваемые на определенном множестве, – посылка и заключение в таких тождествах могут быть определены на разных числовых множествах. Поэтому их необоснованное применение при решении уравнений может привести либо к потере корней, либо к приобретению посторонних корней. Все это в контексте формирования общего приема решения уравнений [6, с. 80] привело к тому, что при обучении логарифмическим уравнениям стало удобно их разделить на группы, основываясь не на видах уравнений, а на методах их решения.

Таких групп у нас получилось шесть. Рассмотрим их подробно.

I. Решение уравнений, основанное на определении логарифма

На основании определения логарифма чаще всего решаются простейшие логарифмические уравнения, а также и некоторые другие логарифмические уравнения.

Простейшим логарифмическим уравнением называется уравнение вида $\log_a x = b$, где $a > 0, a \neq 1$. Из определения логарифма числа следует, что $x = a^b$ является его единственным решением.

Пример 1. Решить уравнение $\log_2 x = 5$.

Решение. Это уравнение по определению логарифма имеет единственный корень $x = 2^5$ или $x = 32$.

Ответ: $x = 32$.

Как показывает практика, учащиеся при решении логарифмических уравнений приучаются выполнять проверку найденных корней. Здесь возникает вопросы: нужна ли в данном случае проверка? Как реагировать учителю, если ученик выполнил или, наоборот, не выполнил проверку? Противоречивости в ответе на данные вопросы добавляют и представленные решения примеров в учебной и научно-методической литературе, поскольку в одних случаях проверка авторами выполняется, а в других – нет.

На наш взгляд, учащиеся должны осознавать, что если все уравнения, полученные из данного последовательными преобразованиями, равносильны, то проверка найденных значений переменной не является логически необходимой, она проводится только в порядке контроля вычислений или по методическим соображениям.

В примере, разобранном выше, все преобразования равносильны, следовательно, проверка не нужна. Но нужно ли указание на равносильность в самом решении? Заметим, что равносильность преобразований при решении простейших логарифмических уравнений авторы учебников, как правило, обосновывают в теоретической части параграфа. Так, например, в одном учебнике [3] обоснование приводится в начале параграфа и опирается на свойства логарифмической функции, в другом учебнике [1] обоснование приводится в ходе получения ответа и опирается на определение логарифма числа, в третьем учебнике [4] равносильность $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b, a > 0, a \neq 1$ приводится как математический факт. Поэтому, ответ на вопрос, поставленный в начале абзаца, будет неоднозначный. Видимо, здесь следует руководствоваться не только стремлением к математической строгости, но и принципами доступности и индивидуального подхода в обучении. Хотя, справедливости ради, заметим, что выполненная проверка снимает все вопросы о равносильности выполненных преобразований.

Приведем далее уравнение, решение которого требует обязательной проверки найденных корней. Однако заметим, что в данном случае необходимость проверки обуславливается особым логическим обоснованием решения, иным, чем в остальных примерах.

Пример 2. Решить уравнение $\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3$ (*) [9, с 105; 2, с. 245].

Решение. Для подготовленного читателя решение, приведенное в учебнике, довольно простое: достаточно беглого взгляда, что бы его понять. Приведем кратко авторское решение. Предварительно заметим, что это первое логарифмическое уравнение, с решения которого начинается соответствующий параграф в указанных учебниках.

Предположим, что x – такое число, при котором равенство (*) является верным, т.е. x – корень уравнения (*). Тогда по свойству логарифма верно равенство $\log_2((x+1)(x+3)) = 3$ (**). Из этого равенства по определению логарифма получаем $(x+1)(x+3) = 2^3$ (***), откуда $x^2 + 4x + 3 = 8$, $x^2 + 4x - 5 = 0$, $x = 1$ или $x = -5$.

Так как уравнение (***) является следствием исходного уравнения (*), то необходима проверка.

Подставляя $x = 1$ в левую часть уравнения (*), получаем:

$$\log_2(1+1) + \log_2(1+3) = 3,$$

$$\log_2 2 + \log_2 4 = 3,$$

$1 + 2 = 3 - \textit{верно}$, т.е. $x = 1$ – корень исходного уравнения.

Подставляя $x = -5$ в левую часть уравнения (*), получаем:

$$\log_2(-5+1) + \log_2(-5+3) = 3,$$

$\log_2(-4) + \log_2(-2) = 3$ – *выражение не имеет смысла*, т.е. $x = -5$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 1$.

Как видим, в приведенном решении выполнялась проверка. Приведем три замечания по поводу её логической необходимости.

Во-первых, может показаться излишним начало решения «Предположим, что x – корень уравнения». Зачем так делать? Ведь понятно, что по свойству логарифма

$$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=\log_2((x+1)(x+3))$$

и тогда от уравнения (*) переходим к уравнению (**). Но вспомним, в соответствующем свойстве логарифма $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$ под a, b и c понимаются определенные действительные числа (с известными ограничениями $a>0, a\neq 1, b>0, c>0$), а не выражения с переменной. Переносить же без доказательства свойства числовых равенств на аналогичные по форме записи выражения с переменной в математике нельзя. Поэтому, предположение о том, что x – корень уравнения, дает возможность рассматривать стоящие под знаком логарифма выражения $(x+1)$ и $(x+3)$ как действительные числа и соответственно применить известное свойство логарифмов чисел – перейти от суммы логарифмов к логарифму произведения. Далее решение очевидно.

По той причине, что в начале решения мы исходили из высказанного предположения (которое не доказывали), то полученный ответ истинен настолько, насколько истинно высказанное предположение. Поэтому найденные корни подлежат обязательной проверке. Заметим, при выбранном способе решения проверка необходима, её необходимость определяется именно способом решения, а не осуществлением неравносильных преобразований, как может показаться с первого взгляда.

Во-вторых, приведенный способ решения содержит математические нюансы, описанные выше, которые вряд ли будут доступны пониманию большинства школьников. Поэтому практически во всех школьных учебниках, и далее в данном учебнике, свойства логарифмов применяют в решении уравнений и неравенств без дополнительных пояснений и доказательств, что считаем вполне оправданным при нахождении компромисса между принципом научности и доступности.

Однако тогда возникает вопрос, почему, применяя, казалось бы, верные тождества, появляются посторонние корни? Ответ достаточно прост. Переход от уравнения (*) к уравнению (**) не есть равносильное преобразование. Все дело в том, что при $a>0, a\neq 1$ левая часть равенства $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$ определена только для положительных b и c, а правая, помимо этого, определяется и для отрицательных b и c, при условии, что они оба меньше нуля. Получается, переход от уравнения (*) к уравнению (**) связан с расширением области допустимых (ОДЗ) значений уравнения. И в этой расширенной ОДЗ как раз и получился корень $x=-5$, который является корнем уравнения (**), но не является корнем исходного уравнения (*). Заметим, еще и то, что уравнения (**) и (***) равносильны, что в авторском решении явно не прослеживается и вдумчивым ученикам предстоит осознать это самим.

В-третьих, учителя и учащиеся часто вместо выполнения проверки предпочитают осуществлять цепочку равносильных преобразований. Да, такой подход целесообразен, так как, с одной стороны, бывает, что найденные корни представляют собой громоздкие выражения и вычисления с ними затруднительны, с другой стороны, при решении логарифмических неравенств ответом чаще всего служит некоторый промежуток(ки) и тогда проверка подстановкой в принципе невозможна. Решение с помощью равносильных преобразований покажем далее в следующей группе, в частности, в примере 5.

Приведем уравнение, решение которого, как и в предыдущем случае, требует обязательной проверки найденных корней, однако не содержащее посторонних корней.

Пример 3. Решить уравнение $\log_2(x+1)+\log_2(5-x)=3$.

Решение. Так как $\log_2(x+1)+\log_2(5-x)=\log_2((x+1)(5-x))$, то данное уравнение можно переписать так: $\log_2((x+1)(5-x))=3$. Из этого равенства по определению логарифма получаем $(x+1)(5-x)=2^3$, откуда $5x-x^2+5-x=8$, $x^2-4x+3=0$, $x=1$ или $x=3$.

Так как в ходе решения уравнения осуществлялись неравносильные преобразования (переход от уравнения $\log_2(x+1)+\log_2(5-x)=3$ к уравнению $\log_2((x+1)(5-x))=3$), то необходима проверка.

Подставляя в левую часть исходного уравнения $x=1$, получаем:

$$\log_2(1+1)+\log_2(5-1)=3,$$

$$\log_2 2+\log_2 4=3,$$

$1+2=3-$ *верно*, т.е. $x=1$ – корень исходного уравнения.

Подставляя в левую часть исходного уравнения $x=3$, получаем:

$$\log_2(3+1)+\log_2(5-3)=3,$$

$$\log_2 4+\log_2 2=3$$

$2+1=3-$ *верно*, т.е. $x=3$ – корень исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

В заключение рассмотрения уравнений данной группы приведем пример логарифмического уравнения, в котором неизвестная находится и под знаком логарифма, и в основании логарифма.

Пример 4. Решить уравнение $\log_x(x+6) = 2$ [5, с. 32].

Решение. По определению логарифма имеем $x^2 = (x+6)$, откуда $x^2 - x - 6 = 0$, $x = -2$ или $x = 3$.

Проверка:

Если $x = -2$, то при подстановке его в исходное уравнение получаем:

$\log_{-2}(-2+6) = 2$ – *выражение не имеет смысла*, т.е. $x = -2$ – посторонний корень.

Если $x = 3$, то при подстановке его в исходное уравнение получаем:

$\log_3(3+6) = 2$,

$\log_3 9 = 2 - \textit{верно}$, т.е. $x = 3$ – корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 3$.

II. Решение логарифмических уравнений потенцированием

Потенцирование – действие, обратное логарифмированию, заключающееся в нахождении числа по данному логарифму. При решении логарифмических уравнений под потенцированием понимается переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0,\ a \neq 1$ к уравнению $f(x) = g(x)$.

Распространено решение логарифмических уравнений потенцированием в три этапа: 1) нахождение области допустимых значений (ОДЗ); 2) преобразования уравнения, сводящие его к виду более простому до тех пор, пока не получается одно или несколько стандартных уравнений, решаемых по известным алгоритмам или формулам (в частности, это переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к решению уравнения $f(x) = g(x)$); 3) нахождение ответа, как пересечения множеств, полученных в первых двух пунктах.

Такой метод решения обосновывается следующей теоремой: «Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$, X – решение системы неравенств $f(x) > 0 \wedge g(x) > 0$. Тогда уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно на множестве X уравнению $f(x) = g(x)$» [11, с. 133].

Приведем пример решения уравнения потенцированием по предложенной схеме.

Пример 5. Решить уравнение $\log_3(x^2 - 4x - 5) = \log_3(7 - 3x)$.

Решение.

1) Найдем область допустимых значений переменной x:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0, \\ 7 - 3x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1,\ x > 5, \\ x < \dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x < -1$$

2) От уравнения $\log_3(x^2 - 4x - 5) = \log_3(7 - 3x)$ переходим к уравнению-следствию $x^2 - 4x - 5 = 7 - 3x$, которое имеет два корня $x = 4$ и $x = -3$.

3) Значение $x = 4$ не удовлетворяет условию $x < -1$, полученному в п.1 решения, поэтому $x = 4$ – посторонний корень для исходного уравнения. Значение $x = -3$ удовлетворяет условию $x < -1$, полученному в п.1 решения, поэтому $x = -3$ – корень заданного исходного уравнения.

Ответ: $x = -3$.

Однако, наряду с описанным процессом решения, имеет место быть и решение логарифмических уравнений с помощью равносильных преобразований. В этом случае от исходного уравнения переходят к равносильной системе уравнений и неравенств. Такой метод решения также обосновывается утверждением, приведенным выше, но в несколько иной формулировке. Теорема: «Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0,\ a \neq 1$, равносильно системе $f(x) = g(x) \wedge f(x) > 0 \wedge g(x) > 0$, состоящей из уравнения и двух неравенств» [4, с. 76].

Приведем решение уравнения с помощью равносильных преобразований, используя для этого

пример 5. Решить уравнение $\log_3(x^2 - 4x - 5) = \log_3(7 - 3x)$.

Решение. По приведенной выше теореме данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2-4x-5=7-3x, \\ x^2-4x-5>0, \\ 7-3x>0. \end{cases}$$

Решение данной системы вполне очевидно и состоит из цепочки равносильных преобразований:

$$\begin{cases} x^2-4x-5=7-3x, \\ x^2-4x-5>0, \\ 7-3x>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4,\ x=-1, \\ x<-1,\ x>5, \\ x<7/3 \end{cases} \Leftrightarrow x=-3.$$

Ответ: $x=-3$.

Сделаем замечание по данному методу решения.

При решении с помощью равносильных преобразований можно вместо перехода от уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, ($a>0, a\neq 1$) к равносильной ему системе

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0 \end{cases}$$

осуществлять переход к одной из двух систем $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)>0 \end{cases}$ также равносильных указанному уравнению. Понятно, что такой переход позволяет упростить решение. Однако на практике ученики все же продолжают переходить к «полной» системе, содержащей все неравенства. На наш взгляд, это логично и во многом связано с особенностями памяти и мышления: ученику гораздо легче представить и запомнить развернутую систему действий, нежели её логическое следствие. К тому же данное правило как алгоритм можно применять в стандартных случаях, которых в дальнейшем обучении решению логарифмическим уравнениям не так уж и много.

Итак, при решении потенцированием мы представили два основных способа размышлений: без использования равносильных преобразований (пример 5, первое решение) и с помощью равносильных преобразований (пример 5, второе решение).

Приведем еще некоторые размышления по поводу решения уравнения первым способом.

Вполне понятно, что нахождение ОДЗ в явном виде, предполагаемое первым этапом, не всегда при решении уравнений целесообразно. Здесь мы имеем в виду отыскание решения системы неравенств $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \end{cases}$ определяемой уравнением $\log_a f(x)=\log_a g(x)$. Дело в том, что чаще всего решением уравнения-следствия $f(x)=g(x)$ является одно или несколько действительных чисел. И тогда отыскание пересечения множеств, определяемых ОДЗ, с одной стороны, и корнями уравнения $f(x)=g(x)$, с другой стороны, равносильно проверке того, будут ли корни уравнения $f(x)=g(x)$ удовлетворять условиям $f(x)>0$ и $g(x)>0$.

Поэтому, как отмечается в учебнике [11] для решения логарифмического уравнения переходят от уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ к уравнению $f(x)=g(x)$, решают уравнение $f(x)=g(x)$, а затем проверяют его корни по условиям $f(x)>0$ и $g(x)>0$, определяющим область допустимых значений (ОДЗ) переменной x. Те корни уравнения $f(x)=g(x)$, которые удовлетворяют этим условиям, являются корнями исходного уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$. Те корни уравнения $f(x)=g(x)$, которые не удовлетворяют хотя бы одному из этих условий, объявляются посторонними корнями для исходного уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$.

Заметим, что описанные выше действия являются проверкой корней по области допустимых значений переменной x. Между тем, некоторые учащиеся подставляют найденные корни в исходное уравнение и непосредственно проверяют, будет ли полученное выражение являться верными числовым равенством или нет, т.е. по сути, выполняют проверку подстановкой. Данный подход возможен, он с успехом может применяться при решении логарифмических уравнений потенцированием.

Для каждого из названных способов можно называть и преимущества, и недостатки. Выбор того или иного способа решения обуславливается субъективными предпочтениями решающего, методическими соображениями учителя, а также самим уравнением, его структурой и данными. Так, для двух уравнений, представленных ниже, в одном случае нахождение ОДЗ затруднительно, поэтому целесообразно сначала выполнить преобразования, а затем осуществить проверку найденных корней подстановкой (пример 6), а в другом случае, наоборот, проверка подстановкой приведет к громоздким вычислениям, гораздо более сложным, нежели нахождение ОДЗ и дальнейшей проверки принадлежности найденных корней области допустимых значений (пример 7).

Пример 6. Решить уравнение $\lg(2x^2-8x+5)=\lg(x^2-3x+1)$.

Решение. Выполним потенцирование и решим полученное уравнение второй степени.

$$\lg(2x^2-8x+5)=\lg(x^2-3x+1),$$

$$2x^2-8x+5=x^2-3x+1,$$

$$x^2-5x+4=0,$$

$$x=1\ \text{или}\ x=4.$$

Остается выполнить проверку, являются ли найденные значения корнями исходного уравнения.

Проверка подстановкой для данного уравнения выполняется достаточно легко:

При $x=1$:

$$\lg(2\cdot1^2-8\cdot1+5)=\lg(1^2-3\cdot1+1),$$

$\lg(-1)=\lg(-1)$ – *выражение не имеет смысла*. Значит $x=1$ не является корнем уравнения.

При $x=4$:

$$\lg(2\cdot4^2-8\cdot4+5)=\lg(4^2-3\cdot4+1),$$

$$\lg(32-32+5)=\lg(16-12+1),$$

$\lg5=\lg5$ – *верно*. Значит $x=4$ – корень исходного уравнения.

Ответ: $x=4$.

Заметим, что проверка подстановкой в данном уравнении более целесообразна, нежели последовательное нахождение ОДЗ, потенцирование и соотнесение полученных корней с ОДЗ.

Для убедительности укажем, что для нахождения ОДЗ уравнения в приведенном примере необходимо сначала решить два квадратных неравенства $2x^2-8x+5>0$ и $x^2-3x+1>0$. Затем найти пересечение полученных решений, которое в нашем случае будет состоять из двух промежутков: $x<\dfrac{3-\sqrt5}{2}$ и $x>\dfrac{4+\sqrt6}{2}$. Потенцирование и дальнейшее решение даст два корня $x=1$ и $x=4$, которые далее нужно проверять на принадлежность ОДЗ. При этом заметим, что если найденные корни – целые числа, то границы ОДЗ – иррациональные числа, а поэтому необходимо обоснованное сравнение целых и иррациональных чисел. И только после этого можно будет записать ответ. Понятно, что такая последовательность действий более сложна, чем потенцирование, решение квадратного уравнения и проверка подстановкой.

Пример 7. Решить уравнение $\lg3x+\lg(x+2)=\lg(x^2+5x+4)$.

Решение. Приведем уравнение к виду, позволяющему потенцировать, а затем выполним потенцирование и дальнейшие очевидные действия по нахождению переменной x.

$$\lg3x+\lg(x+2)=\lg(x^2+5x+4),$$

$$\lg3x(x+2)=\lg(x^2+5x+4),$$

$$3x(x+2)=(x^2+5x+4),$$

$$3x^2+6x=x^2+5x+4,$$

$$2x^2+x-4=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}.$$

Остается выполнить проверку, являются ли найденные значения корнями исходного уравнения.

Для проверки подстановкой необходимо подставить найденные значения в исходное уравнение и установить истинность полученных числовых равенств. Вполне понятно, что это достаточно трудоёмкий вычислительный процесс. Поэтому поступим иначе.

Выполним проверку по ОДЗ. Область допустимых значений для данного уравнения описывается неравенством $x>0$. Это легко устанавливается, т.к. из первого логарифма в левой части следует, что $3x>0$, откуда $x>0$. А при положительных x выражения $(x+2)$ и (x^2+5x+4), стоящие под знаками других логарифмов, будут положительными, что очевидно. На области допустимых значений все выполненные выше преобразования равносильны, поэтому достаточно проверить, принадлежат ли найденные корни ОДЗ.

Поскольку $\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}>0$, то $x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$ принадлежит ОДЗ и соответственно является корнем исходного уравнения.

Поскольку $\dfrac{-1-\sqrt{33}}{4}<0$, то $x=\dfrac{-1-\sqrt{33}}{4}$ не принадлежит ОДЗ и поэтому не является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$.

Дальнейшее расширение и усложнение уравнений этой группы связано с активным применением формул тождественных преобразований логарифмических выражений, а также с применением преобразований, используемых для решения любого вида уравнений (перенос слагаемых, умножение частей уравнения на отличное от нуля число, разложение на множители и др.)

Заметим, что рассматриваемая нами операция потенцирования является одной из немногих школьного курса математики, которые приводят к расширению ОДЗ, а соответственно и возможному появлению посторонних корней (помимо потенцирования таковыми основными еще являются возведение в четную степень и сокращение дробей). Поэтому, на наш взгляд, на первых порах обучения логарифмическим уравнениям следует добиться осознанного и обоснованного их решения, используя для этого достаточно простые для преобразований задачи (пример 8). И только после этого переходить к решению более сложных уравнений и неравенств (примеры 9 и 10).

Пример 8. Решить уравнение $\log_2 x + \log_2(x+2) = 3 + \log_2(x-1)$.

Решение. Оформим в виде цепочки преобразований с указанием на их равносильность:

$$\log_2 x + \log_2(x+2) = 3 + \log_2(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\log_2 x + \log_2(x+2) = \log_2 8 + \log_2(x-1)$$

$\Rightarrow$

$$\log_2 x(x+2) = \log_2 8(x-1) \Rightarrow$$

$$x(x+2) = 8(x-1) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x = 8x - 8 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \text{ или } x = 4.$$

Проверка найденных значений x является логически необходимой, поскольку при решении было выполнено, по крайней мере, одно неравносильное преобразование.

При двух найденных нами значениях переменной $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$ выражения x, $x+2$, $x-1$, стоящие под знаком логарифмов в исходном уравнении, положительны. Значит, уравнение имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Пример 9. Решить уравнение $\log_2(x^2-4) - 3\log_2\dfrac{x+2}{x-2} = 2$.

Решение. Как и в предыдущем случае, попробуем «объединить» логарифмы, стоящие в левой части уравнения. Для этого внесём 3 под знак логарифма и используем формулу разности логарифмов. Запись решения также будем вести в виде цепочки преобразований с указанием на их равносильность:

$$\log_2(x^2-4) - 3\log_2\frac{x+2}{x-2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x^2-4) - \log_2\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^3 = 2 \Rightarrow$$

$$\log_2\frac{(x^2-4)(x-2)^3}{(x+2)^3} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\log_2\frac{(x-2)^4}{(x+2)^2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-2)^4}{(x+2)^2} = 4 \Rightarrow$$

$$(x-2)^4 = 4(x+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^4 - 4(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left((x-2)^2 - 2(x+2)\right)\left((x-2)^2 + 2(x+2)\right) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(x^2-6x)(x^2-2x+8) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ или } x = 6.$$

Проверка найденных значений x является логически необходимой, поскольку при решении было выполнено, по крайней мере, одно неравносильное преобразование.

Значение $x = 0$ не удовлетворяет исходному уравнению (т.к. выражения, стоящие под знаком логарифмов, при этом значении будут отрицательны, соответственно сами логарифмы будут не определены), т.е. $x = 0$ – посторонний корень.

Значение $x = 6$ обращает исходное уравнение в верное числовое равенство: $\log_2(6^2-4) - 3\log_2\dfrac{6+2}{6-2} = 2 \Leftrightarrow$ $\log_2 32 - 3\log_2 2 = 2 \Leftrightarrow 5 - 3\cdot 1 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$. Поэтому $x = 6$ – корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 6$.

На наш взгляд, на этапе анализа решения задачи (в данном случае уравнения) полезно обсудить с учащимися причину появления постороннего корня. Понятно, что его появление обуславливается выполнением неравносильного преобразования. Но какого?

Для ответа на этот вопрос можно пойти двояко. Так, с наиболее подготовленными учащимися выяснить, какие преобразования в решении примера были неравносильны. Далее на теоретическом уровне определить причину их неравносильности и последствия применения (в примере 10 мы как раз и будем вести подобный разговор, но только до осуществления решения уравнения).

С менее подготовленными учащимися можно организовать выяснение причины появления постороннего корня эмпирическим путем. Так, полученный в решении корень $x=0$ является посторонним для исходного уравнения, но в тоже время является истинным корнем для уравнения в последней строчке решения. Подставляя $x=0$ в каждое уравнение решения, но только двигаясь в обратном направлении (с последней строчки к началу решения), мы определим, для какого уравнения равенство выполняться не будет или не будет иметь смысл, тем самым определим и преобразование, приведшее к появлению постороннего корня.

В нашем случае причиной появления постороннего корня $x=0$ будет использование равенства $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, $(a>0,\, a\neq 1)$, правая часть которого соответствует исходному уравнению и определена только для $b>0$ и $c>0$, а левая часть соответствует уже преобразованному уравнению и определяется на большем числовом множестве, на котором и появляется посторонний корень. В самом деле, $\log_a \frac{b}{c}$, $(a>0,\, a\neq 1)$ определяется и для $b<0$ и $c<0$, но в случае одновременного выполнения этих условий. А при $x=0$ как раз и получим, что выражения (x^2-4) и $\frac{x+2}{x-2}$, стоящие каждое под знаком логарифма в исходном уравнении, будут оба отрицательны, но в тоже время их частное, используемое в преобразованном уравнении, положительно. Соответственно преобразованное уравнение решается на большей по сравнению с исходной ОДЗ, в которой, как мы уже сказали, и появляется посторонний корень.

В решении примера 9 можно пойти иначе, чем мы это сделали выше. В частности, воспользоваться формулой $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, $(a>0,\, a\neq 1,\, b>0,\, c>0)$, но не «справа налево» как это было сделано ранее, а «слева направо». Тем более, целесообразность такого действия определяется и тем, что выражения, стоящие под знаком логарифмов, представляют собой комбинации только двух выражений $(x+2)$ и $(x-2)$.

Однако заметим (и это важно!), что преобразование логарифма частного $\log_a \frac{b}{c}$ в разность логарифмов $\log_a b - \log_a c$ сопряжено с сужением ОДЗ уравнения, а, следовательно, и возможной потерей корней. Поэтому в решении уравнения необходимо либо использовать тождество $\log_a \left|\frac{b}{c}\right| = \log_a |b| - \log_a |c|$, $(a>0,\, a\neq 1,\, b\neq 0,\, c\neq 0)$, либо при использовании формулы $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ при $a>0,\, a\neq 1$ рассмотреть два случая: 1) одновременно $b>0$ и $c>0$, 2) одновременно $b<0$ и $c<0$.

Покажем сказанное на конкретном уравнении, используя для этого

пример 9. Решить уравнение $\log_2(x^2-4) - 3\log_2 \frac{x+2}{x-2} = 2$.

Решение.

Область допустимых значений переменной определяется системой неравенств $\begin{cases} x^2-4>0, \\ \frac{x+2}{x-2}>0 \end{cases}$ и состоит из двух промежутков: $x>2$ или $x<-2$.

1) Если $x>2$, то:

$$\log_2(x^2-4) - 3\log_2 \frac{x+2}{x-2} = 2,$$

$$\log_2(x-2)(x+2) - 3\log_2 \frac{x+2}{x-2} = 2,$$

$$\log_2(x-2) + \log_2(x+2) - 3\log_2(x+2) + 3\log_2(x-2) = 2,$$

$$4\log_2(x-2) = 2 + 2\log_2(x+2),$$

$$2\log_2(x-2) = 1 + \log_2(x+2),$$

$$2\log_2(x-2) = \log_2 2 + \log_2(x+2),$$

$$\log_2(x-2)^2=\log_2 2(x+2),$$
$$(x-2)^2=2(x+2),$$
$$x^2-6x=0,$$
$$x=0 \text{ или } x=6.$$

Значение $x=0$ не удовлетворяет условию $x>2$, поэтому $x=0$ – посторонний корень.

Значение $x=6$ удовлетворяет условию $x>2$, при этом при условии $x>2$ все выполненные преобразования равносильны, поэтому $x=6$ – корень исходного уравнения.

2) Если $x<-2$, то:

$$\log_2(x^2-4)-3\log_2\frac{x+2}{x-2}=2,$$
$$\log_2(x-2)(x+2)-3\log_2\frac{x+2}{x-2}=2,$$
$$\log_2(-x+2)+\log_2(-x-2)-$$
$$-3\log_2(-x-2)+3\log_2(-x+2)=2$$
$$4\log_2(-x+2)=2+2\log_2(-x-2),$$
$$2\log_2(-x+2)=1+\log_2(-x-2),$$
$$2\log_2(-x+2)=\log_2 2+\log_2(-x-2),$$
$$\log_2(-x+2)^2=\log_2 2(-x-2),$$
$$(-x+2)^2=2(-x-2),$$
$$x^2-2x+8=0,$$
$$x\in\varnothing.$$

То есть при $x<-2$ исходное уравнение решений не имеет. Заметим, при условии, что $x<-2$, все выполненные преобразования равносильны, хотя, в данном случае при полученном ответе $x\in\varnothing$ это замечание в оформлении решения не требуется.

Ответ к исходному уравнению есть объединение ответов, полученных при рассмотрении различных (двух) случаев.

Ответ: $x=6$

Пример 10. Решить уравнение $\log_5(x-8)^2=2+2\log_5(x-2)$.

Решение. Воспользуемся свойством $\log_a b^p=p\log_a b$, $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$. Это равенство при указанных ограничениях является тождеством. Однако заметим, что при четных значениях p левая часть равенства будет определена и при отрицательных значениях b. Данное обстоятельство следует учитывать при решении уравнения. Так, при обратном переходе $p\log_a b\Rightarrow\log_a b^p$ для четных p будет происходить расширение ОДЗ, соответственно могут появляться посторонние корни. А при прямом переходе $\log_a b^p\Rightarrow p\log_a b$ для четных p будет происходить сужение ОДЗ, соответственно может происходить потеря корней. Поэтому при прямом переходе в решении уравнения для четных p следует использовать тождество $\log_a b^p=p\log_a|b|$, либо рассматривать два случая, когда $b>0$ и когда $b<0$. Покажем сказанное на рассматриваемом примере:

Первый способ решения (используется импликация $p\log_a b\Rightarrow\log_a b^p$).

В этом случае от уравнения $\log_5(x-8)^2=2+2\log_5(x-2)$ переходим к уравнению-следствию $\log_5(x-8)^2=2+\log_5(x-2)^2$. Оформим решение в привычном для школьников виде:

$$\log_5(x-8)^2=2+2\log_5(x-2),$$
$$\log_5(x-8)^2=2+\log_5(x-2)^2,$$
$$\log_5(x-8)^2=\log_2 25+\log_5(x-2)^2,$$
$$\log_5(x-8)^2=\log_5 25(x-2)^2,$$
$$(x-8)^2=25(x-2)^2,$$
$$x^2-16x+64=25x^2-100x+100,$$
$$24x^2-84x+36=0,$$
$$2x^2-7x+3=0,$$
$$x=0{,}5 \text{ или } x=3.$$

Значение $x=0{,}5$ не удовлетворяет исходному уравнению (т.к. логарифм, стоящий в правой части уравнения, при этом значении не определен), т.е. $x=0{,}5$ – посторонний корень. Значение $x=3$, как несложно заметить, обращает исходное уравнение в верное числовое равенство, поэтому $x=3$ – корень исходного уравнения.

Второй способ решения (используется тождество $\log_a b^p=p\log_a|b|$).

В этом случае от уравнения $\log_5(x-8)^2=2+2\log_5(x-2)$ переходим к равносильному уравнению

$2\log_5|x-8| = 2+2\log_5(x-2)$. Оформим решение в привычном для школьников виде:

$$\log_5(x-8)^2 = 2+2\log_5(x-2),$$
$$2\log_5|x-8| = 2+2\log_5(x-2),$$
$$\log_5|x-8| = 1+\log_5(x-2),$$
$$\log_5|x-8| = \log_5 5+\log_5(x-2),$$
$$\log_5|x-8| = \log_5 5(x-2),$$
$$|x-8| = 5(x-2).$$

Последнее уравнение является алгебраическим, содержащим знак модуля, его единственным корнем будет $x=3$ (подробно решать его не стали, поскольку решение таких уравнений не является предметом рассмотрения данной статьи).

Найденное значение $x=3$ подлежит обязательной проверке, поскольку в процессе решения было совершено одно неравносильное преобразование – потенцирование. При проверке подстановкой рекомендуют найденные значения подставлять в исходное уравнение – в этом случае отпадает необходимость в установлении того, какие преобразования были равносильны, а какие – нет, и соответственно того, какие преобразования могли дать посторонние корни. Заметим, в нашем случае достаточно проверки того, что выражение $5(x-2)$ (или $|x-8|$) не обращается в ноль при $x=3$. Поскольку это так, то $x=3$ – корень заданного уравнения. Проверку же подстановкой $x=3$ в исходное уравнение мы выполняли в первом способе решения, которую можно было бы выполнить и здесь без дополнительных размышлений.

Ответ: $x=3$.

Таким образом, уравнения данной группы являются благодатным материалом не только для обучения школьников решению логарифмических уравнений методом потенцирования, но и формирования у школьников знаний о равносильных и неравносильных преобразованиях и умений обоснованно применять их.

III. Замена переменной

Рассматриваемый в этой группе метод относится к общим методам решения уравнений. Метод замены применяют при решении разных видов уравнений. Не являются исключением здесь и логарифмические уравнения.

Поскольку учащиеся ранее неоднократно сталкивались с решением уравнений методом замены, то представляется, что и здесь в стандартных случаях (пример 11) у них не возникнет особых затруднений.

Пример 11. Решить уравнение $\log_7^2 x - 4\log_7 x + 3 = 0$.

Решение. Обозначим $\log_7 x = t$, тогда исходное уравнение запишется в виде $t^2-4t+3=0$, откуда $t=1$ или $t=3$. Возвращаясь к переменной x, получим $\log_7 x = 1$ или $\log_7 x = 3$. Откуда $x_1 = 7$ или $x_2 = 343$. В процессе решения все преобразования были равносильны, поэтому найденные значения переменной x являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 7$, $x_2 = 343$.

Покажем на примерах интересные с точки зрения математики или методики математики несколько случаев. Представим их анонс:

В примере 12 практически все учащихся допускает ошибку в тождественных преобразованиях, связанных с заменой переменной. Причина ошибки обуславливается общепринятой сокращенной формой записи степени логарифма. Так, вместо $(\log_a x)^p$ принято записывать $\log_a^p x$.

В примере 13 используется свойство логарифма, которое среди «стандартных» свойств обычно не выделяют. Так, $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$, где $a>0, a\neq 1, b>0, c>0$. Примечательно, что каждое свойство логарифмов имеет, как правило, свою пару – схожее по смыслу, структуре свойство. Так, для логарифмов выделяют еще одно свойство «обмена основаниями»: $\log_a b \cdot \log_d c = \log_d b \cdot \log_a c$, где $a>0, a\neq 0$, $d>0, d\neq 0$, $b>0, c>0$.

В примере 14 рассматривается решение однородного уравнения второй степени. С формализованным понятием однородного уравнения учащиеся, как правило, встречаются в школьном курсе математики лишь при изучении тригонометрических уравнений в старших классах. А на содержательном уровне решают гораздо раньше – при изучении дробных рациональных уравнений.

Пример 12. Решить уравнение $\lg^2 x^3 - 10\lg x + 1 = 0$.

Решение. Обозначим $\lg x = t$, тогда исходное уравнение запишется в виде $9t^2 - 10t + 1 = 0$ (часто учащиеся полагают, что после указанной замены уравнение примет вид $3t^2 - 10t + 1 = 0$, что неверно). Уравнение $9t^2 - 10t + 1 = 0$ имеет два различных корня $t = 1$ или $t = 1/9$. Возвращаясь к переменной x, получим $\lg x = 1$ или $\lg x = 1/9$. Откуда $x_1 = 10$ или $x_2 = 10^{\frac{1}{9}}$. В процессе решения все преобразования были равносильны, поэтому найденные значения переменной x являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{\frac{1}{9}}$.

Пример 13. Решить уравнение $5^{\log_2 x} + 2x^{\log_2 5} = 15$ [14, с. 50].

Решение. Предварительно заметим, что при $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0, c > 0$ верно равенство $c^{\log_a b} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\log_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_a c} = b^{\log_a c}$. В нашем случае $x > 0$, поэтому исходное уравнение равносильно следующему $5^{\log_2 x} + 2 \cdot 5^{\log_2 x} = 15$. Можно ввести замену переменной $5^{\log_2 x} = t$, однако можно обойтись и без данной замены. Тогда:

$$5^{\log_2 x} + 2 \cdot 5^{\log_2 x} = 15,$$
$$3 \cdot 5^{\log_2 x} = 15,$$
$$5^{\log_2 x} = 5,$$
$$\log_2 x = 1,$$
$$x = 2.$$

Все преобразования были равносильны, поэтому $x = 2$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 2$.

Пример 14. Решить уравнение $\lg^2(x+1) = \lg(x+1) \cdot \lg(x-1) + 2\lg^2(x-1)$ [9, с. 109].

Решение. Данное уравнение есть однородное уравнение второй степени относительно переменных $\lg(x+1)$ и $\lg(x-1)$. Метод решения таких уравнений – деление на одно из слагаемых.

Заметим, что $\lg(x-1) \neq 0$. В самом деле, если $\lg(x-1) = 0$, то из исходного уравнения следует что и $\lg(x+1)$ должен быть равен нулю. Но таких значений переменной x, при которых одновременно $\lg(x-1) = 0$ и $\lg(x+1) = 0$ нет, поскольку первое равенство возможно лишь при $x = 2$, а второе – только при $x = 0$. Получается, что предположение $\lg(x-1) = 0$ неверно.

Поскольку $\lg(x-1) \neq 0$ то обе части уравнение можно (без потери корней) разделить на $\lg^2(x-1)$:

$$\frac{\lg^2(x+1)}{\lg^2(x-1)} = \frac{\lg(x+1)\cdot\lg(x-1)}{\lg^2(x-1)} + \frac{2\lg^2(x-1)}{\lg^2(x-1)}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\lg^2(x+1)}{\lg^2(x-1)} = \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} + 2.$$

Пусть $\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} = t$, тогда уравнение можно переписать в виде:

$$t^2 = t + 2,$$
$$t^2 - t - 2 = 0,$$
$$t = -1 \text{ или } t = 2.$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} = -1 \quad \text{или} \quad \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} = 2.$$

Первое уравнение имеет единственный корень $x = \sqrt{2}$, второе уравнение имеет единственный корень $x = 3$.

Ответ: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = 3$.

IV. Переход к логарифму по новому основанию

Во всех уравнениях, представленных ними ранее, логарифмы рассматривались по основанию от одного и того же числа. Вполне понятно, что могут существовать и существуют уравнения, в которых основания есть не только различные числа, но и выражения с переменной. Метод решения большинства таких примеров – переход к логарифму по новому основанию.

Рассмотрим наиболее распространенные случаи. Представим их анонс:

В примерах 15-17 рассматриваются уравнения с логарифмами по разным числовым основаниям, однако легко подмечается, что при решении каждого уравнения можно перейти к логарифму по одному и тому же основанию. Преобразованное уравнение решается: в примере 15 по определению логарифма (I выделенная нами группа), в примере 16 потенцированием (II выделенная нами группа), в примере 17 заменой переменной (III выделенная нами группа). На наш взгляд, это три стандартных уравнения данной группы базового уровня сложности.

В примере 18 рассматривается уравнение с логарифмами по разным числовым основаниям (3 и 5), причем числами таким, которые нельзя представить виде степени с одинаковым основанием и рациональным показателем. Решение основано на переходе к логарифму по произвольному числовому основанию.

В примере 19 рассматривается уравнение с различными основаниями логарифма, в том числе содержащими искомую переменную. На наш взгляд, это стандартное уравнение данной группы повышенного уровня сложности.

В примерах 20-21 рассматриваются уравнения двух видов, содержащие искомую переменную как в основании логарифма, так и в подлогарифмическом выражении. Это уравнения видов $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$ и $\log_{a(x)} f(x) = \log_{b(x)} f(x)$.

В заключительном примере 22 этой группы рассматривается решение двумя способами уравнения, содержащего переменную и в основании логарифма, и в подлогарифмическом выражении. На наш взгляд, это уравнение данной группы высокого уровня сложности.

Пример 15. Решить уравнение $\log_{25} x + \log_5 x = 3$.

Решение. Перейдем в уравнении к логарифмам по основанию 5:

$$\log_{25} x + \log_5 x = 3,$$

$$\log_{5^2} x + \log_5 x = 3,$$

$$\frac{1}{2}\log_5 x + \log_5 x = 3,$$

$$\frac{3}{2}\log_5 x = 3,$$

$$\log_5 x = 2.$$

Откуда по определению логарифма $5^2 = x$, значит $x = 25$.

Проверка подстановкой показывает, что $x = 25$ – корень исходного уравнения. Заметим, что проверку можно не делать, достаточно сослаться на равносильность всех преобразований.

Ответ: $x = 25$.

Пример 16. Решить уравнение $\log_{25} x = \log_{\frac{1}{5}} 0{,}5 + \log_5 x$.

Решение. Область допустимых значений переменной x определяется неравенством $x > 0$.

Перейдем в уравнении к логарифмам по основанию 5:

$$\log_{25} x = \log_{\frac{1}{5}} 0{,}5 + \log_5 x,$$

$$\frac{1}{2}\log_5 x = \log_5 2 + \log_5 x,$$

$$\log_5 x^{\frac{1}{2}} = \log_5 2x.$$

Потенцируя, получаем:

$$x^{\frac{1}{2}} = 2x.$$

Откуда следует, что $x = 0$ или $x = 0{,}25$.

Значение $x = 0$ не удовлетворяет ОДЗ, поэтому $x = 0$ – посторонний корень. Значение $x = 0{,}25$ принадлежит ОДЗ и является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 0{,}25$.

Пример 17. Решить уравнение $\log_5 x + \log_x 5 = \frac{5}{2}$.

Решение. В ОДЗ данного уравнения входят все положительные числа за исключением числа 1.

Перейдем в уравнении к логарифмам по основанию 5:

$$\log_5 x + \log_x 5 = \frac{5}{2},$$

$$\log_5 x + \frac{1}{\log_5 x} = \frac{5}{2}.$$

Обозначим $\log_5 x = t$, тогда уравнение запишется в виде $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, откуда $2t^2 - 5t + 2 = 0$. Полученное квадратное уравнение имеет два различных корня $t = 2$ или $t = \frac{1}{2}$. Возвращаясь к переменной x, получим $\log_5 x = 2$ или $\log_5 x = \frac{1}{2}$. Откуда $x_1 = 25$ или $x_2 = \sqrt{5}$. В процессе решения все преобразования были равносильны, поэтому найденные значения переменной x являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 25$, $x_2 = \sqrt{5}$.

Пример 18. Решить уравнение $\log_3 x + \log_5 x = 1$.

Решение. Заметим, здесь в основании логарифмов стоят числа 3 и 5, которые нельзя представить виде степени с одинаковым основанием и рациональным показателем. Поэтому перейдем к логарифмам по одному и тому же основанию, например 10 (можно перейти к логарифмам по любому основанию, в том числе и по основанию 3 или 5, – ответ от этого не изменится, будут лишь несколько иные тождественные преобразования).

$$\log_3 x + \log_5 x = 1,$$

$$\frac{\lg x}{\lg 3} + \frac{\lg x}{\lg 5} = 1,$$

$$\left(\frac{1}{\lg 3} + \frac{1}{\lg 5}\right)\lg x = 1,$$

$$\left(\frac{\lg 5 + \lg 3}{\lg 3 \cdot \lg 5}\right)\lg x = 1,$$

$$\lg x = \frac{\lg 3 \cdot \lg 5}{\lg 5 + \lg 3},$$

$$\lg x = \frac{\lg 3 \cdot \lg 5}{\lg 15},$$

$$x = 10^{\frac{\lg 3 \cdot \lg 5}{\lg 15}},$$

$$x = \left(10^{\lg 3}\right)^{\frac{\lg 5}{\lg 15}},$$

$$x = 3^{\log_{15} 5}.$$

Для осуществления проверки заметим, что для найденного значения x выполняется равенство $3^{\log_{15} 5} = 5^{\log_{15} 3}$ (см. свойство в примере 13). Тогда при подстановке $x = 3^{\log_{15} 5} = 5^{\log_{15} 3}$ в исходное уравнение получим: $\log_3 3^{\log_{15} 5} + \log_5 5^{\log_{15} 3} = 1 \Leftrightarrow$ $\log_{15} 5 + \log_{15} 3 = 1 \Leftrightarrow \log_{15} 15 = 1$. Очевидно, что последнее верно, поэтому $x = 3^{\log_{15} 5}$.

Проверку можно было не выполнять, достаточно сослаться на равносильность всех преобразований.

Ответ: $x = 3^{\log_{15} 5}$.

Пример 19. Решить уравнение $\log_2 16x = \log_{0,5x} 2 \cdot \log_4 16x^4$.

Решение. В ОДЗ данного уравнения входят все положительные числа за исключением числа 2.

Перейдем в уравнении к логарифмам по основанию 2 (при $x > 0,\ x \neq 2$):

$$\log_2 16x = \log_{0,5x} 2 \cdot \log_4 16x^4,$$

$$\log_2 16 + \log_2 x = \frac{\log_2 2}{\log_2 0,5x} \cdot \left(\log_4 16 + \log_4 x^4\right),$$

$$4 + \log_2 x = \frac{1}{\log_2 x - 1} \cdot \left(2 + 2\log_2 x\right),$$

Обозначим $\log_2 x = t$, тогда уравнение запишется в виде $4 + t = \frac{2 + 2t}{t - 1}$, корнями которого являются два числа $t = -3$ или $t = 2$. Возвращаясь к переменной x, получим $\log_2 x = -3$ или $\log_2 x = 2$. Откуда $x_1 = 1/8$ или $x_2 = 4$, эти числа принадлежат ОДЗ. В процессе решения все преобразования на ОДЗ были равносильны, поэтому два найденных значения являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 1/8$, $x_2 = 4$.

Пример 20. Решить уравнение $\log_{11-x}\left(2x^2 - 9x + 10\right) = \log_{11-x}\left(x^2 + 2x\right)$.

Решение. Область допустимых значений переменной x определяется системой:

$$\begin{cases} 2x^2 - 9x + 10 > 0, \\ x^2 + 2x > 0, \\ 11 - x > 0, \\ 11 - x \neq 1. \end{cases}$$

Математическая интуиция подсказывает нам, что находить решение этой системы пока не следует, т.к. значительно проще будет проверить найденные корни (если они, конечно, найдутся и будут иметь простой вид). Хотя для читателя сообщим, что решением данной системы будет объединение четырёх промежутков: $x < -2$, $0 < x < 2$, $2,5 < x < 10$, $x > 10$.

Заметим, что в основаниях логарифмов стоят одинаковые выражения с переменной. Для того чтобы корректно воспользоваться теоремой, обосновывающей потенцирование, перейдем в уравнении к логарифмам по числовому основанию, например 10:

$$\log_{11-x}\left(2x^2 - 9x + 10\right) = \log_{11-x}\left(x^2 + 2x\right),$$

$$\frac{\lg\left(2x^2 - 9x + 10\right)}{\lg(11 - x)} = \frac{\lg\left(x^2 + 2x\right)}{\lg(11 - x)}.$$

Равенство будет выполняться, если равны друг другу числители дробей, а знаменатели при этом существуют и не обращаются в нуль. Замечание о знаменателях учитывается областью допустимых значений исходного уравнения, поэтому приравняем числители дробей:

$$\lg(2x^2-9x+10)=\lg(x^2+2x),$$

$$2x^2-9x+10=x^2+2x,$$

$$x^2-11x+10=0,$$

$$x=1 \text{ или } x=10.$$

Значение $x=10$ не удовлетворяет ОДЗ исходного уравнения (т.к. обращает в единицу основания логарифмов), т.е. $x=10$ – посторонний корень.

Значение $x=1$ удовлетворяет всем условиям ОДЗ, поэтому $x=1$ – корень исходного уравнения.

Ответ: $x=1$.

Пример 21. Решить уравнение $\log_{3x^2-9x}(8-x)=\log_{x^2-4}(8-x)$.

Решение. Область допустимых значений переменной x определяется системой:

$$\begin{cases} 8-x>0, \\ 3x^2-9x>0, \\ 3x^2-9x\neq 1, \\ x^2-4>0, \\ x^2-4\neq 1. \end{cases}$$

Как и в предыдущем примере находить решение этой системы пока не будем, поскольку предполагаем выполнить проверку найденных корней (если они, конечно, найдутся и будут иметь простой вид). Между тем, для настойчивого читателя сообщим, что решением данной системы будет объединение четырёх промежутков: $x<-\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}<x<-2$, $3<x<(9+\sqrt{93})/6$, $(9+\sqrt{93})/6<x<8$.

Заметим, что выражения, стоящие под знаком логарифмов, одинаковы и содержат искомую переменную. А также выражения с переменной находятся и в основаниях логарифмов. Перейдем в уравнении к логарифмам по числовому основанию, например 10:

$$\log_{3x^2-9x}(8-x)=\log_{x^2-4}(8-x),$$

$$\frac{\lg(8-x)}{\lg(3x^2-9x)}=\frac{\lg(8-x)}{\lg(x^2-4)}.$$

Равенство будет выполняться в двух случаях: 1) числители дробей равны нулю, а знаменатели при этом существуют и не обращаются в нуль; 2) знаменатели дробей равны друг другу, а числители при этом существуют. Рассмотрим эти два случая:

1) На ОДЗ исходного уравнения следует решить уравнение $\lg(8-x)=0$. Это возможно только в случае $x=7$. Найденное значение принадлежит ОДЗ, и, соответственно, $x=7$ – корень исходного уравнения.

2) На ОДЗ исходного уравнения следует решить уравнение:

$$\lg(3x^2-9x)=\lg(x^2-4),$$

$$3x^2-9x=x^2-4,$$

$$2x^2-9x+4=0,$$

$$x=0{,}5 \text{ или } x=4.$$

Значение $x=0{,}5$ не удовлетворяет ОДЗ исходного уравнения (т.к. основания логарифмов при этом значении отрицательны), т.е. $x=0{,}5$ – посторонний корень.

Значение $x=4$ удовлетворяет всем условиям ОДЗ, поэтому $x=4$ – корень исходного уравнения.

Ответ: $x_1=4$, $x_2=7$.

Пример 22. Решить уравнение $\log_{0,5x}x^2-14\log_{16x}x^3+40\log_{4x}\sqrt{x}=0$ [4, с. 79].

Решение. Авторы учебника [4] предлагают решать данное уравнение переходом к логарифмам по основанию x. Однако такой переход накладывает ограничения на x: $x>0$ и $x\neq 1$. В нашем случае первое условие выполнено в силу ОДЗ, т.к. для нашего уравнения ОДЗ как раз определяется условием $x>0$ и тремя дополнительными ограничениями $x\neq 2,\ x\neq 0{,}0625,\ x\neq 0{,}25$. А вот второе условие $x\neq 1$ не выполнено, так как $x=1$ принадлежит ОДЗ. И тогда безусловный переход к логарифмам по основанию x может привести к потере корней. Поэтому при указанном методе решения следует рассмотреть два случая: 1) $x=1$, 2) $x\neq 1$.

1) Пусть $x=1$. Вполне понятно, что решать (выполнять преобразования) уравнение на множестве, состоящем из одного числа, нецелесообразно. Гораздо проще проверить, будет ли это число корнем уравнения или нет. Так, подставляя $x=1$ в исходное уравнение, получим

$$\log_{0,5\cdot 1}1^2-14\log_{16\cdot 1}1^3+40\log_{4\cdot 1}\sqrt{1}=0.$$

Вполне очевидно, что все слагаемы в левой части этого равенства равны нулю, т.е. данное равенство верно. Поэтому $x=1$ – корень исходного уравнения.

2) Пусть $x \neq 1$. Тогда исходное уравнение можно заменить равносильным ему с логарифмами по основанию x:

$$\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0,$$

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x 0{,}5x} - \frac{14\log_x x^3}{\log_x 16x} + \frac{40\log_x \sqrt{x}}{\log_x 4x} = 0,$$

$$\frac{2}{1-\log_x 2} - \frac{42}{1+4\log_x 2} + \frac{20}{1+2\log_x 2} = 0.$$

Обозначим $\log_x 2 = t$, тогда уравнение запишется в виде $\frac{2}{1-t} - \frac{42}{1+4t} + \frac{20}{1+2t} = 0$, корнями которого являются два числа $t = -2$ или $t = \frac{1}{2}$.

Если $\log_x 2 = -2$, то $\log_2 x = -\frac{1}{2}$ и $x = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Если $\log_x 2 = \frac{1}{2}$, то $\log_2 x = 2$ и $x = 2^2 = 4$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что найденные значения x являются его корнями.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3 = 4$.

Заметим, что при переходе к логарифмам с переменной в основании необходимость рассмотрения двух случаев для восприятия учащихся довольно сложна. Даже школьники с хорошей математической подготовкой отмечают, что в этом случае возможно допустили бы ошибки без помощи учителя. Однако выход есть. Это переход к логарифмам с числовым основанием. Такой переход накладывает меньшие ограничения на его применение.

В рассматриваемом нами уравнении (в примере 22) можно заметить, что все приведенные в нём числа являются степенями двойки. Поэтому для решения целесообразно выполнить переход к логарифмам с числовым основанием, а в качестве основания выбрать число 2. Покажем сказанное, используя для этого

пример 22. Решить уравнение $\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0$.

Решение. Область допустимых значений переменной x есть все положительные числа за исключением тех чисел, при которых основания логарифмов обращаются в единицу, это 2, 1/16, 1/4.

Перейдем в уравнении к логарифмам по основанию 2:

$$\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0,$$

$$\frac{\log_2 x^2}{\log_2 0{,}5x} - \frac{14\log_2 x^3}{\log_2 16x} + \frac{40\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 4x} = 0,$$

$$\frac{2\log_2 x}{\log_2 x - 1} - \frac{42\log_2 x}{4+\log_2 x} + \frac{20\log_2 x}{2+\log_2 x} = 0.$$

Обозначим $\log_2 x = t$, тогда уравнение запишется в виде $\frac{2t}{t-1} - \frac{42t}{4+t} + \frac{20t}{2+t} = 0$, корнями которого являются три числа $t = 0$, $t = -0{,}5$ и $t = 2$. Возвращаясь к переменной x, получим три уравнения $\log_2 x = 0$, $\log_2 x = -0{,}5$ и $\log_2 x = 2$. Корнями которых будут соответственно числа $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_3 = 4$ которые и являются корнями исходного уравнения, поскольку принадлежат ОДЗ, а все преобразования на ОДЗ были равносильны.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3 = 4$.

V. Логарифмирование

Метод логарифмирования состоит в логарифмировании обеих частей уравнения по одному и тому же основанию. Это объясняет название метода.

Его применяют для уравнений, в одной или обеих частях которых находятся степени с переменной в показателях, произведение или частное таких степеней. Суть метода логарифмирования определяется тем, что логарифмирование обеих частей уравнения позволяет избавиться от переменной в показателях степеней. Покажем сказанное на примерах.

Пример 23. Решить уравнение $x^{\lg x} = 100x$.

Решение. ОДЗ данного уравнения задаётся неравенством $x > 0$. В этой области выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения, положительны, а значит и существуют логарифмы этих выражений. Поэтому для решения уравнения прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10.

$$x^{\lg x} = 100x,$$

$\lg x^{\lg x} = \lg 100x$,

$\lg x \cdot \lg x = \lg 100 + \lg x$,

$\lg^2 x - \lg x - 2 = 0$.

Решая последнее уравнение как квадратное относительно $\lg x$, получим, что $\lg x = -1$ или $\lg x = 2$. Откуда $x_1 = 0{,}1$ и $x_2 = 100$. Поскольку все преобразования на ОДЗ были равносильны, то найденные значения, принадлежащие ОДЗ, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 100$.

Пример 24. Решить уравнение $x^{\log_5^2 x} = 25x^3$.

Решение. ОДЗ данного уравнения задаётся неравенством $x > 0$. В этой области выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения, положительны, а значит и существуют логарифмы этих выражений. Поэтому для решения уравнения прологарифмируем обе части уравнения по основанию 5.

$x^{\log_5^2 x} = 25x^3$,

$\log_5 x^{\log_5^2 x} = \log_5 25x^3$,

$\log_5^2 x \cdot \log_5 x = \log_5 25 + \log_5 x^3$,

$\log_5^3 x - 3\log_5 x - 2 = 0$

Обозначим $\log_5 x = t$, тогда уравнение запишется в виде $t^3 - 3t - 2 = 0$ или $(t+1)^2(t-2) = 0$, откуда $t = -1$ или $t = 2$. Возвращаясь к переменной x, получим $\log_5 x = -1$ или $\log_5 x = 2$. Значит $x_1 = 0{,}2$ и $x_2 = 25$. Поскольку все преобразования на ОДЗ были равносильны, то найденные значения, принадлежащие ОДЗ, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 25$.

Сделаем два замечания.

Первое. В решении мы логарифмировали обе части уравнения по основанию 5. В принципе, основанием можно взять любое положительное и отличное от единицы число. Это даст такой же результат, просто решение будет немного сложнее. Так, в нашем примере для $a > 0, a \neq 1$, получили бы:

$x^{\log_5^2 x} = 25x^3$,

$\log_a x^{\log_5^2 x} = \log_a 25x^3$,

$\log_5^2 x \cdot \log_a x = \log_a 25 + \log_a x^3$,

$\log_5^2 x \cdot \dfrac{\log_5 x}{\log_5 a} = 2\log_a 5 + \dfrac{\log_5 x^3}{\log_5 a}$,

$\log_5^2 x \cdot \log_5 x = 2\log_a 5 \cdot \log_5 a + \log_5 x^3$,

$\log_5^2 x \cdot \log_5 x = 2 + \log_5 x^3$,

$\log_5^3 x - 3\log_5 x - 2 = 0$.

Как видно, на данном шаге мы пришли к уравнению, которое уже получали в исходном решении.

Второе. Для решения данного и подобных ему примеров иногда используют другой метод решения – применение основного логарифмического тождества. Об этом в следующей рассматриваемой нами группе.

V. Применение основного логарифмического тождества

Под основным логарифмическим тождеством понимают равенство $a^{\log_a b} = b$, где $a > 0, a \neq 1, b > 0$, выполняющееся на всём множестве значений входящих в него переменных.

Пример 25. Решить уравнение $x^{\log_3 3x} = 9$.

Применяя основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$, где $a > 0, a \neq 1, b > 0$, получим:

$x^{\log_3 3x} = 9$,

$x^{\log_3 3x} = x^{\log_x 9}$,

$\log_3 3x = \log_x 9$,

$\log_3 3 + \log_3 x = \dfrac{1}{\log_9 x}$,

$1 + \log_3 x = \dfrac{2}{\log_3 x}$.

Обозначим $\log_3 x = t$, тогда уравнение запишется в виде $1 + t = \dfrac{2}{t}$ или $t^2 + t - 2$, откуда $t = -2$ или $t = 1$. Возвращаясь к переменной x, получим $\log_3 x = -2$ или $\log_3 x = 1$. Откуда $x_1 = 1/9$ и $x_2 = 3$. Непосредственная проверка найденных значений x показывает, что они являются корнями исходного уравнения.

В процессе решения мы выполняли замену $9 = x^{\log_x 9}$, однако такая замена сужает ОДЗ уравнения: если ОДЗ исходного уравнения определяется неравенством $x > 0$, то после выполненной замены ОДЗ преобразованного уравнения $x>0$, $x\neq 1$. Поэтому возможна потеря корня $x=1$. И поэтому следует обязательно выполнить решение для $x=1$, осуществив проверку подстановкой. Так, при $x=1$ исходное уравнение не обращается в верное числовое равенство, поэтому $x=1$ не является его корнем.

Ответ: $x_1=1/9$, $x_2=3$.

Приведенное в примере выше уравнение можно было бы решить и логарифмированием – методом, рассматриваемым в предыдущей группе. Изначально мы так и задумывали: не выделять отдельно метод, связанный с применением основного логарифмического тождества. Этому способствовало представление о том, что, применяя данное тождество, мы осуществляем тождественные преобразования и в конечном итоге приходим к уравнению, решаемому либо заменой переменной, либо потенцированием – методами уже известными нам. Однако, переход от степеней к сравнению их показателей (который как раз и стал возможным посредством применения основного логарифмического тождества) имеет свою математическую основу, отличную от уже рассмотренных нами ранее. А это есть характерная черта того, что мы используем новый метод решения.

Приведем пример решения ещё одного уравнения с применением основного логарифмического тождества. Однако в нём данное тождество используется лишь для преобразований левой части уравнения и не является определяющим для характеристики метода решения.

Пример 26. Решить уравнение $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-4$.

Решение. ОДЗ данного уравнения определяется неравенством $1-2x>0$. При этих значениях можно вычислить значения в левой и правой частях уравнения. Однако заметим, что левая часть уравнения не может принимать значения меньшие или равные нулю, поэтому при осуществлении решения с помощью равносильных преобразований следует накладывать аналогичные ограничения и на правую часть. Вероятно, в данном случае удобнее не отслеживать равносильность выполняемых преобразований, а выполнить проверку найденных значений переменной, если, конечно, таковые найдутся.

Преобразования при решении данного уравнения несложные:

$$9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-4,$$

$$3^{2\log_3(1-2x)}=5x^2-4,$$

$$3^{\log_3(1-2x)^2}=5x^2-4,$$

$$(1-2x)^2=5x^2-4,$$

$$1-4x+4x^2=5x^2-4,$$

$$x^2+4x-5=0,$$

$$x=-5 \text{ или } x=1.$$

Выполним проверку подстановкой.

При $x=-5$:

$$9^{\log_3(1-2\cdot(-5))}=5\cdot(-5)^2-4,$$

$$9^{\log_3 11}=5\cdot 25-4,$$

$$3^{2\log_3 11}=125-4,$$

$$3^{\log_3 11^2}=121,$$

$11^2=121$ – *верно*. Значит $x=-5$ – корень исходного уравнения.

При $x=1$:

$$9^{\log_3(1-2\cdot 1)}=5\cdot 1^2-4$$

$9^{\log_3(-1)}=1$ – *выражение не имеет смысла*. Значит $x=1$ не является корнем уравнения.

Ответ: $x=-5$.

Отметим, что уравнения, приведенные в примерах 25 и 26, можно было бы решить и логарифмированием – методом, рассматриваемым в предыдущей группе. При этом, на наш взгляд, в примере 25 решение посредством логарифмирования было бы менее сложным, чем с применением основного логарифмического тождества, а в примере 26 уровень сложности решения остался бы прежним.

VI. Функционально-графический метод

Функционально-графический метод предполагает использование при решении уравнений графиков функций или различных свойств функций.

Графический метод решения уравнений $f(x)=g(x)$ заключается в «отыскании значений переменной x, соответствующей равным значениям функций $f(x)$ и $g(x)$ с помощью точки пересечения их графиков» [6, с. 11]. «Этот метод позволяет определить число корней уравнения и найти точные значения корней (хотя и редко, но это все-таки удается), либо угадать их, что совсем неплохо» [10, с. 180]. Нередко при графическом решении требуется обоснование количества решений – здесь на помощь часто приходит свойство монотонности функций. Известно, что при решении уравнений применяются, помимо монотонности, и другие свойства функций, поэтому совокупность соответствующих приёмов «охватывается термином „функционально-графический метод“, а не „графический метод“» [10, с. 181].

Вполне понятно, что функционально-графический метод применяется там, где методы, рассмотренные выше, вызывают большие сложности в их применении или же просто не работают. Зачастую функционально-графическим методом решаются задачи нестандартные, поэтому, на первый взгляд, кажется, что перечислить всевозможные случаи невозможно. Однако большинство таких задач в конечном итоге сводится к нескольким достаточно понятным школьникам случаям. Покажем на примерах 27 и 28 два основных из них. А на примере 29 покажем менее распространенный случай применения функционально-графического метода, который в более простом его варианте мы постоянно используем, решая логарифмические уравнения потенцированием.

Пример 27. Решить уравнение $\log_2 x = 6 - x$.

Решение. В одной и той же системе координат построим схематично графики функций $y = \log_2 x$ и $y = 6 - x$ (в статье этот рисунок приводить не будем, поскольку он иллюстрирует элементарные графические представления). Замечаем, что графики этих функций будут пересекаться в точке, абсцисса которой примерно равна 4. Аналитическая проверка показывает, что, действительно, графики указанных функций будут пересекаться в точке с координатами $(4; 2)$. Заметим, что $x = 4$ можно было бы искать подбором, без непосредственного построения графиков функций.

Поскольку $y = \log_2 x$ – возрастающая функция, $y = 6 - x$ – убывающая функция, а графики возрастающей и убывающей функций имеют не более одной точки пересечения, абсциссу которой мы уже нашли, то исходное уравнение имеет единственный корень $x = 4$.

Ответ: $x = 4$.

Пример 28. Решить уравнение $\log_2\left(4 - x^2\right) = x^4 + 2$.

Решение. Оценим левую и правую части уравнения.

Значения левой части уравнения не превышают 2. В самом деле, множество значений выражения $4 - x^2$ с учетом ОДЗ уравнения есть промежуток $(0; 4]$. Функция $y = \log_2 t$ возрастающая, то есть большему значению аргумента, соответствует большее значение функции. В нашем случае наибольшее значение аргумента (подлогарифмического выражения, стоящего в скобках) равно 4, поэтому наибольшее значение логарифма (левой части уравнения) будет равно 2 (т.к. $\log_2 4 = 2$).

Значения правой части уравнения не меньше 2. Это вполне очевидно. Для любых x выполняется неравенство $x^4 \geq 0$. Поэтому, прибавляя к обеим частям этого неравенства число 2, получаем $x^4 + 2 \geq 2$.

Таким образом, левая часть уравнения всегда меньше или равна двум, правая часть больше или равна двум. Поэтом равенство возможно только в случае, если каждая из частей уравнения равна 2. То есть уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \log_2\left(4 - x^2\right) = 2, \\ x^4 + 2 = 2. \end{cases}$$

Решением данной системы является $x = 0$. Найденное значение является и корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 0$.

Пример 29. Решить уравнение $\log_3^3 x + \log_3 x^3 = \dfrac{27}{x^3} + \dfrac{9}{x}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(t) = t^3 + 3t$. Данная функция монотонно возрастает, так как $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$ для всех значений аргумента t. Тогда исходное уравнение можно записать в виде $f(\log_3 x) = f(3/x)$, откуда, в силу возрастания $f(t)$, получим $\log_3 x = \dfrac{3}{x}$. В полученном уравнении слева стоит возрастающая функция, справа – убывающая, следовательно, решение единственно, оно легко находится подбором: $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

Заключение

Итак, изложение материала подошло к своему логическому завершению.

Могут возникнуть логичные вопросы. Как же все сказанное теперь реализовать в обучении школьников? Смогут ли они понять все тонкости и нюансы? Смогут ли обучающиеся запомнить такой объем?

Наш ответ здесь таков. Изложенное в статье предназначено для подготовленного читателя и, в первую очередь, для учителя. Цель, которую мы преследовали – это обоснованно представить содержательный компонент методики обучения учащихся теме «Логарифмические уравнения», а также возможные направления работы на заключительном этапе решения задачи (уравнения) – этапе исследования найденного решения.

И здесь хотим предостеречь учителя от желания охватить с учениками весь материал, стремясь к чересчур подробной его детализации. Следует обучать общим идеям, формировать общий прием решения уравнений. Учителю следует помнить, что развитие содержательно-методической линии уравнений и неравенств идет линейно-концентрически: методы и приёмы решения уравнений и неравенств, рассмотренные в одной теме, используются и в последующих темах, появление новых типов уравнений и неравенств влечет лишь обогащение знаний школьников о специальных преобразованиях, а общие методы и приемы остаются те же. Поэтому стоит подчеркивать и выделять как общее в процессе решения алгебраических уравнений и неравенств в основной школе, так и новое, специальное, связанное с особенностями решения трансцендентных уравнений и неравенств в старшей школе.

Так, при решении логарифмических уравнений:

1) Сохраняются три общие идеи, метода решения уравнений (разложение на множители, замена переменной и функционально-графический метод).

2) Появляется новые специальные методы решения уравнений:

а) на основе определения логарифма и потенцирование;

б) переход к логарифму по новому основанию, логарифмирование, применение основного логарифмического тождества.

Представленные специальные методы решения логарифмических уравнений мы сгруппировали. Это связано с тем, что в п. 2*а* указаны методы, обладающие свойством общности (на основе соответствующих определений решаются и другие виды уравнений, а потенцирование есть не что иное, как переход от сравнения функций к сравнению их аргументов). Но в тоже время эти методы конкретизированы по отношению к логарифмам и логарифмической функции. В п. 2*б* указаны специальные методы, основанные на свойствах логарифмов и применяемые лишь для решения логарифмических уравнений или уравнений, содержащих неизвестное под знаком логарифмической функции.

Желаем удачи учителю в его нелегком труде и ученику, осваивающему эту одновременно и легкую, и сложную, но интересную тему математики – логарифмические уравнения.

References:

1. (2009). Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10 klass: uchebnik dlya obshheobrazovatel`ny`x uchrezhdenij: bazovy`j i profil`ny`j urovni / [S.M. Nikol`skij, M.K. Potapov, N.N. Reshetnikov, A.V. Shevkin], 8-e izd. (p.430). Moscow: Prosveshhenie.
2. (2011). Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10 klass: uchebnik dlya obshheobrazovatel`ny`x uchrezhdenij: bazovy`j i profil`ny`j urovni / [Yu.M. Kolyagin, M.V. Tkacheva, N.E. Fedorova, M.I. Shabunin]; pod red. A.B. Zhizhchenko, 4-e izd. (p.368). Moscow: Prosveshhenie.
3. (2018). Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10-11 klassy`: uchebnoe posobie dlya obshheobrazovatel`ny`x organizacij / [A.N. Kolmogorov, A.M. Abramov, Yu.P. Dudnicyn i dr.]; pod red. A.N. Kolmogorova, 26-e izd. (p.384). Moscow: Prosveshhenie.
4. Vilenkin, N.Ya. (2014). Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass. Uchebnik dlya uchashhixsya obshheobrazovatel`ny`x organizacij (uglublyonny`j uroven`) / N.Ya. Vilenkin, O.S. Ivashev-Musatov, S.I. Shvarczburd, 18-e izd., ster. (p.312). Moscow: Mnemozina.
5. Dalinger, V.A. (2020). Matematika: logarifmicheskie uravneniya i neravenstva: uchebnoe posobie dlya srednego professional`nogo obrazovaniya / V.A. Dalinger, 2-e izd., ispr. i dop. (p.176). Moscow: Yurajt.
6. Episheva, O.B. (2000). Special`naya metodika obucheniya arifmetike, algebre i nachalam

analiza v srednej shkole: Kurs lekcij: Uchebnoe posobie dlya studentov fiziko-matematicheskix special`nostej pedagogicheskix vuzov. (p.126). Tobol`sk: Izd. TGPI im. D.I.Mendeleeva.

7. Kostyuchenko, R.Yu. (2020). Algoritmicheskij podxod k obucheniyu shkol`nikov resheniyu trigonometricheskix uravnenij. *Theoretical & Applied Science*, № 8 (28), pp.80-85. http://www.t-science.org/arxivDOI/2015/08-28/PDF/08-28-13.pdf
8. Kostyuchenko R.Yu. (2020). Pokazatel`ny`e uravneniya i ix osnovny`e vidy` kak e`lement soderzhaniya obucheniya matematike v starshix klassax. *Theoretical & Applied Science*, № 3 (83), pp. 164-174. http://www.t-science.org/arxivDOI/2020/03-83/PDF/03-83-35.pdf
9. (2016). Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10-11 klassy`: uchebnik dlya obshheobrazovatel`ny`x organizacij: bazovy`j i uglublenny`j urovni / [Sh.A. Alimov, Yu.M. Kolyagin, M.V. Tkacheva i dr.], 3-e izd, (p.463). Moscow: Prosveshhenie.
10. Mordkovich, A.G. (2005). Besedy` s uchitelyami matematiki: Uchebno-metodicheskoe posobie / A.G. Mordkovich, 2-e izd., dop. i pererab, (p.336). Moscow: OOO «Izdatel`skij dom «ONIKS 21 vek»: OOO «Izdatel`stvo «Mir i Obrazovanie».
11. Mordkovich, A.G. (2014). Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass. V 2 ch. Ch. 1. Uchebnik dlya uchashhixsya obshheobrazovatel`ny`x organizacij (bazovy`j i uglublyonny`j urovni) / A.G. Mordkovich, P.V. Semenov, 2-e izd., ster, (p.311). Moscow: Mnemozina.
12. (2020). Primernaya osnovnaya obrazovatel`naya programma srednego obshhego obrazovaniya (Odobrena resheniem federal`nogo uchebno-metodicheskogo ob``edineniya po obshhemu obrazovaniyu, protokol ot 28 iyunya g. № 2/16-z) / [E`lektronny`j resurs] Rezhim dostupa. URL: (data obrashheniya: 04.04.). Retrieved from https://mosmetod.ru/files/dokumenty/Primernaya-osnovnaya-obrazovatelnaya-programma-srednego-obshhego-obrazovaniya.pdf
13. (2020). Federal`ny`j gosudarstvenny`j obrazovatel`ny`j standart srednego obshhego obrazovaniya (Prikaz Minobrnauki Rossii ot 17.05. N 413) / [E`lektronny`j resurs] Rezhim dostupa. URL: (data obrashheniya: 04.04.). Retrieved from https://fgos.ru
14. Shary`gin, I.F., & Golubev, V.I. (1991). Fakul`tativny`j kurs po matematike: Reshenie zadach: Uchebnoe posobie dlya 11 klassov srednej shkoly`, (p.384). Moscow: Prosveshhenie.