SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2020 **Issue:** 04 **Volume:** 84

Published: 21.04.2020 **http://T-Science.org**

QR – Issue QR – Article

K.S. Tattibekov
Taraz State Pedagogical University
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor

E.E. Duisembiev
Taraz State Pedagogical University
Candidate of Technical Sciences
Taraz, Republic of Kazakhstan

COMPUTER SIMULATION OF SOLITON IN A SINGLE QUASI-LINEAR SYSTEM OF EQUATIONS

***Abstract**: The numerical implementation of Cauchy problem for the system of the nonlinear evolutionary equations, which describe magnon-phonon interactions in 1D magnetics, is carried out. The research of stability is conducted in case of the model equations. On the basis of the developed technique the numerical calculations and the analysis of results are carried out.*

***Key words**: evolutionary equations, difference scheme, Cauchy problem, stability, commutator, anticommutator.*
***Language**: Russian*
***Citation**: Tattibekov, K. S., & Duisembiev, E. E. (2020). Computer simulation of soliton in a single quasi-linear system of equations. *ISJ Theoretical & Applied Science, 04 (84)*, 438-441.
Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-04-84-77 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.04.84.77
***Scopus ASCC**: 2610.*

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЛИТОНОВ В ОДНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

***Аннотация**: Проведена численная реализация задачи Коши для системы нелинейных эволюционных уравнений, описывающие магнон-фононные взаимодействия в 1Д магнетиках. Исследование устойчивости проведено в случае модельных уравнений. На основе разработанной методики проведены численные расчеты и анализ результатов.*

***Ключевые слова**: эволюционные уравнения, разностная схема, задача Коши, устойчивость, коммутатор, антикоммутатор.*

Введение

Исследование нелинейных динамических систем - одна из важнейших задач теоретической и математической физики. Прежде всего это вызвано тем, что нелинейные поведения свойственны большинству реальных процессов и уравнения описывающие их используются в самых различных областях естествознания.

Для изучения динамики нелинейных волн и солитонов в магнитоупорядоченных кристаллах часто используют макроскопическое описание магнетиков на основе уравнения Ландау-Лифщица (ЛЛ) [1]:

$$\vec{S}_t = \vec{S} \times \vec{S}_{xx} + \vec{S} \times \overline{J S},$$

где $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$, $|\vec{S}| = 1$, $J = diag\,(j_1, j_2, j_3)$, $\times$ - означает векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Уравнение ЛЛ явно не учитывает деформацию решетки. При температурах отличных от нуля, атомы ферромагнетика не являются неподвижными, а совершают малые колебания около положений равновесия - узлов кристаллической решетки. Из за этого меняется энергия обменного взаимодействия и возникают взаимодействия между спиновыми волнами и колебаниями решетки (фононами). Поэтому актуален вопрос о математическом исследовании моделей соответствующих ферромагнетикам с деформируемой решеткой. В этой работе проведена численная реализация задачи Коши для одной системы нелинейных эволюционных уравнений, описывающей магнон-фононные взаимодействия в 1Д магнетиках.

Интегрируемое обобщение уравнения Ландау - Лифшица с самосогласованным векторным потенциалом исследовано в работе [2]. Различные алгебро-геометрические аспекты таких моделей изучены в работах [3, 4]. Обобщенные урав-нения Ландау-Лифшица с самосогласованным векторным потенциалом получены в работе [5], а также установлены их связи с движением кривых и поверхностей.

Постановка задачи и решение

Рассмотрим задачу Коши для системы нелинейных эволюционных уравнений, предложенной в работах [6]:

$$4iS_t = 2[S, S_{xx}] + (2u + \{S, \sigma_3\})[S, \sigma_3],$$
$$2(u_t + u_x) - \lambda(S_3)_x = 0.$$

где $S = \sum_{i=1}^{3} S_i\sigma_i$, σ_i - матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$S(x,t), u(x,t)$ - неизвестные функции, индексы x, t означают соответствующие частные производные по этим переменным, $\alpha, \beta, \Delta, \lambda$ - посстоянные действительные числа (параметры уравнений), [,] - коммутатор, {,} - антикоммутатор.

Неизвестная матрица-функция $S(x,t)$ должна удовлетворят условию

$$S^2 = I,$$

где I - единичная 2x2 матрица, или в "компонентах"

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1.$$

Вектор $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ описывает классический спин атомов магнетика, скалярная функция $u(x,t)$ характеризирует деформацию решетки – смещение атома.

Для численного решения системы уравнений удобно перейти от спинового вектора $\vec{S}$ к функциям p, q с помощью формул:

$$S_1 = \frac{2p}{1+p^2+q^2}, \quad S_2 = \frac{2p}{1+p^2+q^2}, \quad S_3 = \frac{1-p^2-q^2}{1+p^2+q^2},$$

которые согласуются с условием [7]

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1.$$

Тогда, система перепишется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 2\frac{2pp_xq_x - q(p_x^2 - q_x^2)}{1+p^2+q^2}(\Delta S_3 + u)q, \qquad (1а)$$
$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -2\frac{2qp_xq_x + p(p_x^2 - q_x^2)}{1+p^2+q^2}(\Delta S_3 + u)p, \qquad (1б)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2}(S_3)_x = 0. \qquad (1в)$$

В дальнейшем нас будут интересовать эволюция движения волн на оси x, имеющие локальные изменения в начальный момент времени, т.е. для уравнений (1) рассмотрена задача Коши с начальными условиями

$$p(x,0) = p_0(x), q(x,0) = q_0(x),$$
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad (2)$$

для $|x| < \infty$, где $p_0, q_0 u_0$ - известные функции.

Система уравнений (1) является квазилинейной. Указать точные решения соответствующей задачи Коши вида (1)-(2) представляется невозможным. При некоторых упрощениях точные решения рассматриваемой задачи получены в работе [8].

Следовательно, для детального изучения решений задачи (1)-(2) необходимо использовать приближенные методы.

На практике для численного решения нелинейных уравнений математической физики широко применяется конечно - разностные методы. Суть данного метода заключается в том, что область непрерывного изменения аргумента x заменяется конечно-разностной сеткой, а дифференциальные операторы, определяющие уравнения - разностными соотношениями. При этом решение дифференциальной задачи сводится к решению системы разностных равнений [9, 10].

В данной работе рассматривается численное решение задачи Коши для системы (1)-(2) конечно-разностными методами. С помощью Фурье - анализа проводится выбор алгоритма расчета, который является надежным по устойчивости и эффективным по соображениям численной реализации решений.

Исследование устойчивости проведено в случае модельных уравнений. На основе разработанной методики проведены численные расчеты и анализ результатов.

Выяснения вопросов устойчивости решения используемых в дальнейшем разностных схем для нелинейных уравнений (1) в общем случае является затруднительным. Поэтому для получения практических рекомендации выбора шагов сетки τ и h ограничимся исследованием устойчивости разностных схем для следующих уравнений, соответствующие линейной части системы (1а), (1б)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0. \qquad (3)$$

Для системы (3) рассмотрим разностные схемы вида

$$p_{\bar{t}}^{n+1} + \Lambda_h\,[\sigma q^{n+1} + (1-\sigma)\,q^n] = 0, \qquad (4)$$
$$q_{\bar{t}}^{n+1} - \Lambda_h[\sigma p^{n+1} + (1-\sigma)p^n] = 0,$$

где Λ_h - разностный оператор второй производной

$$p_{\bar{t}}^{n+1} = (p^{n+1} - p^n)/\tau,$$

σ - некоторый вещественный параметр.

Легко показать, что разностная схема (4) аппроксимирует систему уравнений (3) с порядком

$O(\tau(\sigma - 0.5) + \tau^2 + h^2)$, т.е. для $\sigma \neq 0.5$

имеет первый порядок аппроксимации по τ, а при $\sigma = 0.5$ - второй.

Исследование устойчивости разностной схемы (4) проведем методом Фурье согласно критерию фон-Неймана [11]. В этом случае для множителей перехода гармоник получим следующее дисперсионное соотношение

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & d\cdot[\sigma\lambda + (1-\sigma)] \\ -d\cdot[\sigma\lambda + (1-\sigma) & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

где $d = 4k\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)$, $k = \frac{\tau}{h^2}$, $\xi = kh$, k - соответствующий номер гармоники. Отсюда имеем, что

$$(\lambda - 1)^2 + d^2[\sigma\lambda + (1-\sigma)]^2 = 0.$$

Следовательно, множители перехода гармоник от одного временного слоя к другому временному слою удовлетворяют соотношению

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \mp id(1-\sigma)}{1 \pm id\sigma}.$$

Итак,

$$|\lambda_{1,2}|^2 = \frac{1 + d^2(1 - 2\sigma + \sigma^2)}{1 + d^2\sigma^2}.$$

Отсюда видим, что, если $\sigma \geq 1/2$, то $|\lambda_{1,2}| \leq 1$, т.е.согласно критерия фон-Неймана разностная схема устойчива в норме пространства $L_{2,h}(\infty,\infty)$ по начальным данным. Заметим, что явная разностная схема, соответствующая при $\sigma = 0$ является абсолютно неустойчивой.

Для линейной системы (3) теперь рассмотрим разностные схемы более общего вида

$$p_{\bar{t}}^{n+1} + \Lambda_n[\sigma\, q^{n+1} + (1-\sigma)q^n] + \tau(0.5-\sigma)\cdot \Lambda_h\Lambda_h[\alpha p^{n+1} + (1-\alpha)p^n] = 0, \quad (5)$$
$$q_{\bar{t}}^{n+1} + \Lambda_n\,[\sigma\, p^{n+1} + (1-\sigma)p^n] + \tau(0.5-\sigma)\cdot \Lambda_h\Lambda_h[\alpha q^{n+1} + (1-\alpha)q^n] = 0,$$

Можно показать, что последние разностные соотношения аппроксимирует дифференциальные уравнения на решении с порядком $O(\tau^2 + h^2)$ при малых значениях параметров σ и α. При этом используются следующие соотношения, являющиеся следствием уравнений (3)

$$p_{t\,t} = -p_{xxxx}, \qquad q_{t\,t} = -q_{xxxx},$$
$$q_{xx\,t} = p_{xxxx}, \qquad p_{xx\,t} = -q_{xxxx}.$$

Множитель перехода простейших гармоник для разностных соотношении апроксимируется выражением

$$Q = \frac{1 - (1-\alpha)d^2(0.5-\sigma) + id(1-\sigma)}{1 + \alpha d^2(0.5-\sigma) + id\sigma}$$

После несложных выкладок можно показать, что критерий фон-Неймана будет выполнен, если

$$(1 - 2\alpha)d^4(\sigma - 0.5)^2 \leq 0.$$

Т.е. если $\alpha \geq 1/2$, то разностная схема также устойчива по начальным данным в норме пространства $L_{2,h}$ при малых σ.

Заметим, что среди семейства разностных схем вида (4), (5) наиболее привлекательны случаи, когда $\sigma = \alpha = 0$ и $\alpha = 0$. В первом случае расчеты ведутся по явным формулам, а во втором случае для нахождения параметров задачи на верхнем временном слое можно ограничиваться использованием формул трехточечной матричной прогонки. Однако в обоих случаях, как показывает вышеприведенный анализ, соответствующие разностные схемы являются абсолютно неустойчивыми.

Руководствуясь вышеуказанными соображениями, будем рассматривать схему вида (4) с $\sigma = 1$. Тогда соответствующие разностные выражения для уравнений (1а), (1б) будут иметь вид

$$p_{\bar{t}}^{n+1} + q_{x\bar{x}}^{n+1} = f(t_n, x),$$
$$q_{\bar{t}}^{n+1} + p_{x\bar{x}}^{n+1} = g(t_n, x), \qquad (5)$$

где функции f и g соответствуют правым частям выражений (1а), (1б) соответственно, вычисленные в узлах сетки в момент времени $t_n = n\tau$.

Для аппроксимации уравнения смещения (1в) использовано соотношение

$$u_{\bar{t}}^{n+1} + u_{x^0}^n = -(S_3)_{x^0}^n + \frac{\tau\delta}{2}u_{x\bar{x}}^n, \qquad (6)$$

где δ - некоторый вещественный параметр.

Разностная схема (6) при $\lambda = 0$, $\delta = 1$ соответствует схеме Лакса-Вендроффа, аппроксимирующая уравнение смещения с порядком $o(\tau^2 + h^2)$.

Заключение

Проведена численная реализация конечно-разностными методами задачи Коши для систем нелинейных эволюционных уравнений описывающих магнон-фононные взаимодействия. Исследование устойчивости построенных разностных схем проводилось методом Фурье-анализа.

Основные расчеты были проведены по разностной схеме (5), (6) при сравнительно малых значенииτ $(\tau = 0.001 - 0.005)$. Сходимость численного решения проверялась по последовательности сеток с числом узлов $N = 1001, 2001$ при различных τ. Сходимость в норме пространства $L_{2,h}$ удовлетворительная. В худщем случае, когда $\Delta = 50$, $\lambda = 1$ относительная погрешность оставляла $\approx 2\%$.

Полученные графики результатов численных расчетов показывают процесс распространения гармонических волн. Расчеты проведены для N = 2001 на промежутке $[-20,20]$, т.е. с шагом $h = 0{,}02$.

Функции $S_1(x,t), S_2(x,t)$ имеющие в начальный момент времени форму уединенных волн, по истечении времени продолжают распадаться на волн меньшей амплитуды. Причем с увеличением количества волн, уменьшаются их амплитуды, и при больших значениях времени $(t \approx 5)$ $S_1(x,t), S_2(x,t) \to 0$.

Функция $S_3(x,t)$ имеющая в начальный момент форму уединенной волны с течением времени продолжает уменьшат свою амплитуду и при больших t $(t \approx 5)$ $S_3(x,t) \to 1$. Функция $u(x,t)$ не меняя свою профиль, двигается в положительном направлении оси x.

References:

1. Kosevich A.M., Ivanov B.A., & Kovalev A.S. (1983). *Nelineinye volny namagnichennosti. Dinamicheskie i topologicheskie solitony*. (p.192). Kiev: Naukova dumka.
2. Nugmanova G.N., & Sagidullaeva J.M. (2017). Obobshennaya spinovaya model s vectornym potencialom I ee reshenie. *Vestnic KarSU*, ser. Mathematica, №2(86), pp.91-96.
3. Myrzakulov, R., Nugmanova, G., & Syzdykova, R. (1998). Gauge equivalence between 2+1)-dimensional continuous Heisenberg ferromagnetic models and nonlinear Schrodinger-type equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Vol. 31, 147.
4. Chen, Ch., & Zhou, Zi-X. (2009). Darboux Transformation and Exact Solutions of the Myrzakulov I Equation. *Chinese Physics Letters*, Vol. 26, 080504.
5. Myrzakulov, R., Mamyrbekova, G., Nugmanova, G., & Lakshmanan, M. (2015). Integrable (2 + 1)-Dimensional Spin Models with Self-Consistent Potentials. *Symmetry*, Vol. 7, 1352.
6. Myrzakulov, R. (1989). Novye solitonnye modeli 1D magnetikov s deformiruemoi reshetkoi. *Izv.ANKaz SSR*, ser. fiz.-мат., №6, pp. 7-10.
7. Baker, G.A, Jr., & Gammel, J.L. (1973). *The Pade Approximant in Theoretical Physics*. New-York: Academic Press.
8. Tattibekov, K.S. (2014) *Solitony v odnoi magnitouprugoi modeli.* Materialy X mezhdunarodnoi nauchno-practicheskoi conferencie “Kliuchevye voprosy sovremennoi nauki”. Tom 31. Mathematica. Sovia. pp.11-15.
9. Samarski, A.A. (1983). *Teoriya raznostnych schem*. (p.616). Moscow: Nauka.
10. Mahankov, V.G. (1983). Solitony and chislennyi ecsperiment. *FEChAYa*, т.14, vyp.1. pp.123-180
11. Kovenia, V.M., & Yanenko, N.N. (1981). *Metod rassheplenia v zadachah gazovoi dinamici*. (p.304). Novosibirsk: Nauka.