Impact Factor:	ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 0.829	РИНЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.716	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2020 **Issue:** 04 **Volume:** 84

Published: 09.04.2020 **http://T-Science.org**

QR – Issue **QR – Article**

Erkin Xolyarov
Termez State University
reseacher

T.D. Makhmudov
Termez State University
reseacher

INVERSE PROBLEMS OF ELASTIC-PLASTIC FILTRATION OF LIQUID IN HOMOGENEOUS LAYERS

***Abstract**: Inverse coefficient problems of the elastic-plastic regime of fluid filtration in a porous medium are considered. To solve problems with an additional condition in the form of a given filtration rate at a certain point in the reservoir (at the point of location of an oil producing well in real conditions) in the mode of lowering pressure and a given pressure in the mode of pressure recovery, methods of descent, identification and deterministic moments were applied. Initial data for inverse problems are prepared from solving the corresponding direct problems with given coefficients. It is shown that descent methods require a large number of iterations, and the use of the ravine method is proposed to reduce them. The most effective methods for solving this class of problems were identification methods and determinate moments.*

***Key words**: methods of descent and identification, models of elastic-plastic fluid filtration.*
***Language**: Russian*
***Citation**: Xolyarov, E., & Makhmudov, T. D. (2020). Inverse problems of elastic-plastic filtration of liquid in homogeneous layers. *ISJ Theoretical & Applied Science, 04 (84),* 242-251.
Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-04-84-43 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.04.84.43
***Scopus ASCC**: 2600.*

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ

***Аннотация**: Рассмотрены обратные коэффициентные задачи упруго-пластического режима фильтрации жидкости в пористой среде. Для решения задач с дополнительным условием в виде заданной скорости фильтрации в определенной точке пласта (в точке расположения нефтедобывающей скважины в реальных условиях) в режиме понижения давления и заданного давления в режиме восстановления давления применены методы спуска, идентификации и детерминированных моментов. Исходные данные для обратных задач подготовлены из решения соответствующих прямых задач с заданными коэффициентами. Показано, что методы спуска требуют выполнения большого количества итераций и для их уменьшения предложено применение овражного метода. Наиболее эффективными для решения данного класса задач оказались методы идентификации и детерминированных моментов.*

***Ключевые слова**: методами спуска и идентификации, модели упруго-пластической фильтрации жидкости.*

Введение

1. Модели упруго-пластической фильтрации жидкости. Проблемы упруго-пластической фильтрации жидкостей приобретают большую актуальность в связи с освоением нефтяных и газовых месторождений на значительных глубинах. В глубоких нефтяных и газовых пластах, особенно с аномально высокими пластовыми давлениями (АВПД), по мере их эксплуатации значительно снижается пластовое давление, что приводит к возникновению больших эффективных напряжений на пласт [1]. Это вызывает значительные деформации скелета пород пласта. Одной из особенностей деформации пласта на больших глубинах является нарушение его упругости, что сопровождается появлением пластических (необратимых) изменений характеристик пласта. На необходимость учета необратимых изменений пористости нефтяных пластов впервые указано в [2, 3], хотя в нефтяной практике такие уменьшения коллекторских свойств пластов по мере их эксплуатации (т.е. снижения пластового давления) были известны давно. Модельная схематизация упруго-пластического режима фильтрации впервые предложена в [4, 5], что легла в основу формирования представлений об упруго-пластической фильтрации в целом и оценки ее характеристик [6]. В [4, 5] зависимость пористости от давления принята в виде линейной функции, хотя в глубоких пластах, особенно с АВПД, наблюдаются значительно большие диапазоны изменения давления, для которых указанная зависимость принимает экспоненциальный вид [7]. Учитывая нелинейные зависимости пористости и проницаемости от давления в режимах его понижения и восстановления уравнения упруго-пластической фильтрации выведены в [1, 8]. В [1] оценено влияние нелинейности деформации пласта на фильтрационные показатели а также оценен характер распространения волн разгрузки в режиме восстановления давления. На больших глубинах нефтяные пласты, приуроченные слабосцементированным терригенным коллекторам, особенно с АВПД, по мере увеличения эффективных напряжений теряют свою устойчивость и целостность. Это приводит к разрушению скелета пород пласта и выносу частиц породы, образованных за счет разрушения, на поверхность вместе с добываемой нефтью. Последнее может быть причиной больших технологических осложнений как в процессе добычи нефти, так и ее промысловой подготовки. Модели упругопластической фильтрации жидкости в неустойчивых коллекторах предложены ранее [9, 10]. Анализ результатов реализации модели показывает, что в неустойчивых коллекторах факторы необратимости деформации и неустойчивости пласта оказывают взаимообратные действия на коллекторские свойства пласта [10].

Уравнения упруго-пластической фильтрации жидкости в пористой среде в одномерном случае имеют вид [4, 5]

$$\downarrow \frac{\partial p}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \qquad (1.1)$$

$$\uparrow \frac{\partial p}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad a_1, a_2 = const > 0 \qquad (1.2)$$

где $\downarrow$ и $\uparrow$ – соответствуют процессам понижения и восстановления давления, t – время, x – линейная координата, p – давление, a_1, a_2 – коэффициенты пьезопроводности, $a_2 \geq a_1$.

В режиме уменьшения пластового давления от начального p_0 до текущего p в устойчивых пластах в условиях нелинейной деформации уравнение фильтрации имеет вид [7]

$$\downarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = D^2 \Delta \varphi^{\gamma} \qquad (1.3)$$

где

$$\varphi = \exp(-\beta(p_0 - p)), \; D^2 = \frac{k_0}{\mu_0 m_0 \alpha},$$

$\beta = \beta_{ж} + \beta_{m0}$, $\alpha = \beta_{ж} - a_{\mu} + a_{k0}$, $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$, β_f и β_m – коэффициенты сжимаемости жидкости и пор, a_k, a_{μ} –коэффициенты изменения проницаемости и вязкости от давления, k_0 – первоначальное (при давлении $p = p_0 = \mathrm{const}$) значение проницаемости, μ_0 – первоначальное (при давлении $p = p_0 = \mathrm{const}$) значение вязкости жидкости.

При восстановлении давления уравнение фильтрации жидкости в упруго-пластическом режиме, где одновременно происходит частичное или полное необратимое изменение пористости и пластичности, имеет вид [8]

$$\uparrow \frac{\partial}{\partial t}\{\exp[-\varphi_2(x)]\exp[-\psi_2(x)(p_0 - p)]\} = = \frac{k_0}{m_0 \mu_0} \frac{\partial}{\partial x}\left\{\exp[-\varphi_1(x)]\exp[-\psi_1(x)(p_0 - p)]\frac{\partial p}{\partial x}\right\} \qquad (1.4)$$

где

$$\varphi_1(x) = a_{k0}\left[1 - \psi(x)^{\eta_k/\beta}\right] \cdot \left[-\ln|\psi(x)|/\beta\right],$$

$$\psi_1(x) = \beta_f - a_{\mu} + a_{k0}\psi(x)^{\eta_k/\beta},$$

$$\varphi_2(x) = \beta_{m0}\left[1 - \psi(x)^{\eta_m/\beta}\right] \cdot \left[-\ln|\psi(x)|/\beta\right],$$

$$\psi_2(x) = \beta_f + \beta_{m0}\psi(x)^{\eta_m/\beta},$$

$\psi = \exp(-\beta(p_0 - p))$ – решение (1.3) в последний момент понижения давления, η_k и η_m – коэффициенты необратимого изменения проницаемости и пористости.

Уравнения упруго-пластической фильтрации жидкости в неустойчивых пластах в соответствии с [9, 10] имеют вид

$$\downarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi + \frac{m_{s0}\theta(\sigma(\varphi))}{m_0}\left(1-\delta_1\varphi^{\beta_{ms}/\beta}\right)\varphi^{\beta_f/\beta}\right] =$$

$$= \chi_1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\varphi^{\gamma-1} + \frac{k_{s0}\theta(\sigma(\varphi))}{k_0}\left[1-\delta_2\varphi^{a_{ks}/\beta}\right]\varphi^{-\frac{a_\mu+\beta_{m0}}{\beta}}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\} \tag{1.5}$$

$$\uparrow \frac{\partial}{\partial t}\left\{\exp[-\varphi_2(x)]\exp[-\psi_2(x)(p_0-p)] + \xi_2(x)\exp\left(-\beta_f(p_0-p)\right)\right\} =$$

$$= \chi_2 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\exp[-\varphi_1(x)]\exp[-\psi_1(x)(p_0-p)] + \xi_1(x)\exp\left(-\left(\beta_f - a_\mu\right)(p_0-p)\right)\right]\frac{\partial p}{\partial x}\right\} \tag{1.6}$$

где $\delta_1 = \exp[\beta_{ms}(p_0 - p_s)]$, $\delta_2 = \exp[a_{ks}(p_0 - p_s)]$, $\sigma(\varphi) = p_s - p_0 - (1/\beta)\ln\varphi$, $\chi_1 = k_0/(\mu_0 m_0 \beta)$, a_{ks} – коэффициент изменения проницаемости за счет выноса частиц, β_{ms} – коэффициент изменения пористости за счет выноса частиц, p_s – давление, при котором происходит нарушение целостности пласта, $\theta(x)$ – единичная функция Хевисайда, $\chi_2 = \frac{k_0}{m_0\mu_0}$, p_1 – распределение давления в конце фазы понижения давления,

$$\xi_1(x) = \frac{k_{s0}}{k_0}\left[1-\delta_2(\psi(x))^{a_{ks}/\beta}\right]\theta(p_s - p_1),$$

$$\xi_2(x) = \frac{m_{s0}}{m_0}\left[1-\delta_1(\psi(x))^{\beta_{ms}/\beta}\right]\theta(p_s - p_1)$$

Решения уравнения (1.5), (1.6) для наиболее простых условий дренирования пласта получены в [10], на основе которых оценена роль неустойчивости пласта и пластичности деформации на фильтрационные характеристики.

2. Обратные задачи упруго-пластической фильтрации. При формулировке общих постановок и выделении основных классов обратных задач предполагаются известными постановки прямых задач [11]. Каждая прямая задача в рамках принятой математической модели может быть сопоставлена некоторым множеством обратных задач. Все обратные задачи, вне зависимости от рассматриваемого физичекого процесса или технической системы, можно разделить на три класса [12]: 1) обратные задачи, возникающие при диагностике и идентификации физических процессов; 2) обратные задачи, возникающие при проектировании технических объектов; 3) обратные задачи, возникающие при управлении процессами и объектами. Математические модели разных процессов обычно описываются дифференциальными уравнениями с частными производными. Для этих моделей в общем случае вводится четыре вида обратных задач – граничные, коэффициентные, ретроспективные и геометрические [11]. Граничные задачи заключаются в нахождении функций и параметров, входящих в граничные условия; коэффициентные – функций и параметров, входящих в коэффициенты уравнений; ретроспективные, т.е. обращенные назад по времени – в нахождении начальных условий; геометрические – в реконструировании геометрических характеристик области или каких-либо характерных точек, линий, поверхностей внутри ее (например, в определении координат границы фазового перехода или контакта сред с различными физическими свойствами). В [11] исследован широкий класс обратных задач, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными параболического типа.

В этой статье рассматриваем некоторые обратные коэффициентные задачи упруго-пластической фильтрации жидкости. Обратные коэффи-циентные задачи фильтрации при упругом режиме для пластов с пористыми и трещиновато-пористыми коллекторами рассматривались с той или иной успешностью и на их основе были созданы инженерные методики определения параметров пласта. Обратные задачи в упруго-пластическом режиме изучены мало. В [13] решена обратная коэффициентная задача для уравнений (1.1), (1.2) для наиболее простого случая, когда в качестве дополнительного условия задается давление в одной (или нескольких) точке пласта как в режиме понижения, так и восстановления давления. Здесь дополнительное условие задается в точке $x = 0$ в виде скорости фильтрации (потока жидкости) в режиме понижения, и в виде давления в этой точке в режиме восстановления давления. Этот случай может быть интерпретирован как получение исходных данных для решения обратной задачи в нефтедобывающей скважине, что является широкораспространенной практикой гидродинамических исследований скважин [14].

Рассмотрим обратную задачу упруго-пластической фильтрации жидкости, заключающуюся в определении коэффициентов уравнений (1.1), (1.2) и других параметров, входящих в задачу, по дополнительной информации о решении прямой задачи.

Пусть для уравнений (1.1), (1.2) соответственно заданы начальные и граничные условия в виде:

$$\downarrow p(x,\,0)=p_0,\ \ \downarrow p(0,\,t)=p_c,\qquad\qquad (2.1)$$
$$\downarrow p(L,\,t)=p_0,\quad p_0,p_c=const,$$

$$\uparrow p(x,\,0)=p_1(x),\ \uparrow \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\qquad\qquad (2.2)$$
$$\uparrow p(L,\,t)=p_0$$

где $p_1(x)$ – распределение давления в конце фазы понижения. В (2.2) (вообще для режима восстановления давления) в качестве начала отсчета времени принимается $t=0$, что в реальном масштабе соответствует концу фазы понижения давления.

Как уже сказано, кроме обычного начального и граничных условий для уравнения (1.1) рассматривается еще и дополнительное условие

$$v(0,t)=-\frac{k}{\mu}\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=0}=z_1(t)\qquad\qquad (2.3)$$

где k - проницаемость пласта, μ - вязкость жидкости, $v(0,t)$ - скорость фильтрации в точке $x=0$, а для уравнения (1.2) кроме обычных условий задается дополнительное условие

$$p(0,t)=z_2(t)\qquad\qquad (2.4)$$

где $z_1(t)$, $z_2(t)$ – заданные функции.

3. Решение задачи. Для решения поставленной задачи применяем методы спуска, идентификации и детерминированных моментов.

3.1. Решение задачи методами спуска и идентификации. Сначала рассмотрим задачу определения a_1 и k. Пусть $x=0$ характерная точка пласта, в которой производится измерение скорости фильтрации жидкости, что является известной функцией времени $z_1(t)$.

Параметры a_1 и k будем искать из условия минимума функционала

$$J_1\left(a_1^m,k^m\right)=\int_0^T\left[-\frac{k^m}{\mu}\frac{\partial p^m(0,\xi)}{\partial x}-z_1(\xi)\right]^2d\xi;\qquad\qquad (3.1)$$
$$p^m(0,\xi)=p(0,\xi)\big|_{a=a_1^m,\ k=k^m}$$

Уравнение (1.1) при $a_1=a_1^m$ имеет вид

$$\frac{\partial p^m}{\partial t}=a_1^m\frac{\partial^2 p^m}{\partial x^2}\qquad\qquad (3.2)$$

Для того чтобы была возможность оценки решения, исходные данные для обратных задач были подготовлены путем решения соответствующих прямых задач с заданными коэффициентами, которые для обратных задач являются неизвестными. В связи с этим сначала численно решим уравнение (1.1) в конечном пласте $[0,L]$ с начальными и граничными условиями (2.1) при известном значении $a_1=0.008$ м²/с, затем вычисляем величину $v(0,t)$ (2.3) при известном значении $k=0.5\cdot10^{-12}$ м² в моменты времени t_k. Таким образом подготавливаются «данные измерения» $z_1(t_k)$.

Численный алгоритм определения a_1, k можно построить следующим образом: а) задаются некоторые начальные приближения a_1^0, k^0 (полагаем $m=0$), б) решаем (3.2) с условиями (2.1) и определяем функцию p^m, в) находим a_1^{m+1}, k^{m+1} из минимума функционала (3.1) по методу спуска (координатного спуска, градиентного спуска и т.д.), г) полагая $a_1=a_1^{m+1}$ и $k=k^{m+1}$, повторяем этапы б, в до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность.

Для завершения итерационного процесса можно выбрать следующие критерии:

$$\left|a_1^{m+1}-a_1^m\right|<\varepsilon_1,\quad \left|k^{m+1}-k^m\right|<\varepsilon_2\qquad\qquad (3.3)$$

где ε_1 и ε_2 – допустимые погрешности.

Здесь функционал (3.1) имеет разрешимый овраг, напоминающий сильно вытянутую котловину. Трудности поиска минимумов многомерных функций при усложнении их рельефов рассмотрены в [15, 16]. Численные расчеты показывают, что при попадании траектории спуска в такой овраг сходимость метода (координатного спуска, градиентного спуска) становится очень медленной. Здесь для определения a_1 и k из минимума функционала (3.1) сначала применяем метод координатного спуска (МКС). Предположим, что нам известна прямоугольная область $[a_{10},a_{1n}]\times[k_0,k_n]$ на плоскости (a_1,k), где находится минимум функционала $J_1(a_1,k)$. В этой области зафиксируем координату $k=k^0$, тогда функционал $J_1(a_1,k^0)$ будет зависеть только от одной переменной a_1. Найдем минимум функционала $J_1(a_1,k^0)$, изменяя координату a_1 по методу золотого сечения и обозначим эту точку как $A(a_1^0,k^0)$. Затем зафиксируем первый аргумент $a_1=a_1^0$ и найдем минимум функции $J_1(a_1^0,k)$ относительно второго аргумента k, т.е. точку $B(a_1^0,\,k^1)$. Аналогичным способом перейдем последовательно к точкам $C(a_1^1,k^1)$, $D(a_1^1,k^2)$ и т.д. В сходящемся процессе с приближением к минимуму функционала $J_1(a_1,k)$ расстояния между последовательными точками $A, B, C, D, \ldots$ однокоординатных минимумов будут стремиться к нулю.

Теперь для определения a_1 и k из минимума функционала (3.1) рассмотрим процедуру применения метода градиентного спуска (МГС). Если минимизируемый функционал дифференцируемый и ограничен снизу, а его градиент удовлетворяет условию Липшица, то итерационный процесс

$$\begin{aligned} a_1^{m+1} &= a_1^m \text{-} h_{a_1}\ grad_{a_1} J_1\left(a_1^m, k^m\right), \\ k^{m+1} &= k^m \text{-} h_k\ grad_k J_1\left(a_1^m, k^m\right) \end{aligned} \qquad (3.4)$$

будет сходиться к минимуму функции из произвольной начальной точки с координатами a_1^0, k^0. Здесь длину шагов h_{a_1}, h_k выбираем методом дробления. Метод дробления [16] по формуле (3.4) проводится с начальными шагами h_{a_1}, h_k до тех пор, пока функционал J_1 убывает, т.е. выполняется условие

$$J_1\left(a_1^{m+1}, k^{m+1}\right) < J_1\left(a_1^m, k^m\right) \qquad (3.5)$$

При невыполнении этого условия шаги h_{a_1}, h_k уменьшаются вдвое, вычисляются координаты a_1^{m+1}, k^{m+1} с новыми шагами и вновь проверяется условие (3.5). Дробление шага продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие (3.5). Градиент функционала (3.1) вычисляется с использованием формул численного дифференцирования:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1\left(a_1^m, k^m\right)}{\partial a_1^m} &\approx \frac{1}{2h_1}\left[J_1\left(a_1^m + h_1, k^m\right) - J_1\left(a_1^m - h_1, k^m\right)\right], \\ \frac{\partial J_1\left(a_1^m, k^m\right)}{\partial k^m} &\approx \frac{1}{2h_2}\left[J_1\left(a_1^m, k^m + h_2\right) - J_1\left(a_1^m, k^m - h_2\right)\right] \end{aligned} \qquad (3.6)$$

где h_1, h_2 – шаги для численного определения производных.

В численных расчетах использованы следующие исходные данные: p_0 =50 МПа, p_c =30 МПа, a_{10}=0.005 м^2/с, a_{1n}=0.01 м^2/с, k_0 = 0,3·10^{-12} м^2, $k_n = 0.7 \cdot 10^{-12}$ м^2, $L = 30$ м. Результаты расчетов по МКС и по МГС приведены в табл. 1. Видно, что сходимость МКС и МГС медленная. Здесь число итераций МКС меньше, чем МГС, но МКС требует большего машинного времени. Расчетные значения a_1 и k почти совпадают с заданными, с использованием которых подготовлены исходные данные. Таким образом установлено, что при применении МКС и МГС параметры a_1 и k восстанавливаются с достаточной точностью, но эти методы дают медленную сходимость. Далее применим овражный метод [15, 16]. Рассмотрим задачу минимизации $J_1(r)$, $r = (a_1, k)$. Произвольно выбираем точки $r_0 = \left(a_1^0, k^0\right)$, $r_1 = \left(a_1^1, k^1\right)$ – два начальных приближения, и спустимся из них по градиентам, делая не очень много шагов, т.е. не требуя высокой точности сходимости. Конечные точки спуска обозначим соответственно $r_2 = \left(a_1^2, k^2\right)$ и $r_3 = \left(a_1^3, k^3\right)$. Эти точки лежат вблизи дна оврага, через которые проведем прямую линию, по которой передвинемся в сторону убывания функционала (3.1) и выберем новую точку

$$r_4 = r_3 \pm (r_3 - r_2)h, \quad h = const > 0 \qquad (3.7)$$

где h – овражный шаг. В формуле (3.7) выбирается плюс, если $J_1(r_3) < J_1(r_2)$, и минус в обратном случае, так что движение направлено в сторону углубления дна оврага.

Дно оврага не является отрезком прямой, поэтому точка r_4 на самом деле лежит не на дне оврага, а на склоне. Из этой точки снова спустимся на дно и попадаем в некоторую точку r_5. Затем соединим точки r_3 и r_5 прямой, наметим новую линию дна оврага и сделаем новый шаг по оврагу. Процесс продолжим до тех пор, пока значения $J_1(r)$ убывают. Когда $J_1(r_{m+1}) > J_1(r_m)$ процесс прекращается и r_m принимается как решение.

Результаты расчетов с применением овражного метода приведены в табл. 2. Последние значения табл. 2, т.е. r_{14}, уточнив по МГС получим $a_1 = 0.0080059$ м^2/с, $k = 0.50015 \cdot 10^{-12}$ м^2.

Теперь используя метод идентификации [17] рассмотрим задачу определения a_2. Заметим, что для этого случая, в принципе, могут быть применены методы спуска, примененные здесь при решении задачи в режиме понижения давления. Однако, при восстановлении одного параметра, как это мы увидим далее, методы идентификации позволяют получить решение при небольших количествах итераций. Пусть $x = 0$ характерная точка пласта, в которой производится измерение восстановления давления жидкости, что является известной функцией времени $z_2(t)$.

Параметр a_2 будем искать из условия минимума функционала

$$J_2(a_2) = \int_0^T \left[p(0,\xi) - z_2(\xi)\right]^2 d\xi \qquad (3.8)$$

Условие стационарности функционала (3.8) будет иметь вид

$$\frac{1}{2}\frac{dJ_2(a_2)}{da_2} = \int_0^T \left[p(0,\xi) - z_2(\xi)\right] w(0,\xi) d\xi = 0 \qquad (3.9)$$

где w является производной от функции p по параметру a_2, т.е. $\partial p/\partial a_2$.

Разложим в ряд функцию p в окрестности a_2^m с точностью до членов первого порядка

$$p^{m+1}(x,t)\approx p^m(x,t)+\left(a_2^{m+1}-a_2^m\right)w^m(x,t) \qquad (3.10)$$

Подставляя разложение (3.10) в (3.9) линеаризуем это соотношение относительно параметра a_2^{m+1} следующим образом

$$\int_0^T\left[p^m(0,\xi)+\left(a_2^{m+1}-a_2^m\right)w^m(0,\xi)-z_j(\xi)\right]w^m(0,\xi)d\xi=0 \qquad (3.11)$$

откуда легко можно вычислить следующее приближение a_2^{m+1}, если функции $p^m(0,t)$ и $w^m(0,t)$ известны

$$a_2^{m+1}=\left\{\int_0^T\left[a_2^m w^m(0,\xi)-p^m(0,\xi)+z_2(\xi)\right]w^m(0,\xi)d\xi\right\}\left\{\int_0^T\left[w^m(0,\xi)\right]^2d\xi\right\}^{-1} \qquad (3.12)$$

Чтобы получить уравнение для функции $w^m(x,t)$ проведем линеаризацию уравнения (1.2) относительно решения на нижнем итерационном слое

$$\frac{\partial p^{m+1}}{\partial t}=a_1^m\frac{\partial^2 p^m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p^m}{\partial x^2}\delta a_1+a_1^m\left(\frac{\partial^2 p^{m+1}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 p^m}{\partial x^2}\right),$$

$$\delta a_1=a_1^{m+1}-a_1^m \qquad (3.13)$$

Подставляя в (3.13) разложение (3.10) и приравнивая коэффициенты при δa_2 нулю, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial p^m}{\partial t}=a_2^m\frac{\partial^2 p^m}{\partial x^2};\qquad \frac{\partial w^m}{\partial t}=a_2^m\frac{\partial^2 w^m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p^m}{\partial x^2} \qquad (3.14)$$

Уравнения (3.14) при заданном значении a_2^m могут быть решены последовательно одним из известных методов. Граничные и начальные условия для функции w могут быть получены из соответствующих условий для функции p путем дифференцирования их по параметру a_2.

Сначала численно решим уравнение (1.2) в конечном пласте $[0,\ L]$ с начальными и граничными условиями

$$p(x,0)=p_1(x),\quad \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad p(L,t)=p_0 \qquad (25)$$

где $p_1(x)$ - решения уравнения (1.1) в последний момент понижения давления. Первое уравнение (3.14) тоже решается с условиями (3.15), а второе со следующими условиями

$$w(x,0)=p_1(x),\quad (\partial w/\partial x)|_{x=0}=0,\quad w(L,t)=0 \qquad (3.16)$$

Численный алгоритм нахождения a_2 можно построить следующим образом: а) задается некоторое начальное приближение a_2^0 (полагаем $m=0$), б) решаем систему (3.14) с условиями (3.15), (3.16), вычисляем функции p^m и w^m, в) вычисляем (3.8) и (3.12), г) полагая $a_2=a_2^{m+1}$, повторяем этапы б), в) до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность;

В качестве критерия окончания итерационного процесса может быть использовано одно из неравенств

$$\left|p^{m+1}-p^m\right|<\varepsilon_1,\quad \left|a_2^{m+1}-a_2^m\right|<\varepsilon_2,$$

$$\left|J_2\left(a_2^{m+1}\right)-J_2\left(a_2^m\right)\right|<\varepsilon_3,$$

где $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ - заданные малые величины, или их совокупность.

Сетка разбивала отрезок [0; 30] на 300 интервалов, временный отрезок [0; 1000] - на 1000 интервалов. В расчетах использованы следующие исходные данные: p_0 =50 МПа, a_2^0 =0.01 м²/с; L = 30 м. Численные расчеты показывают, что в режиме восстановления давления параметр a_2 подходит к точке равновесия с одной стороны за три итерации (фиг. 1).

3.2. Решение задачи методом детерминированных моментов. Здесь предыдущая задача решается методом детерминированных моментов [18].

В конечном пласте $[0,\ L]$ рассмотрим уравнения (1.1), (1.2) соответственно в режиме понижения и восстановления давления с начальными и граничными условиями (2.1), (2.2) и еще дополнительными условиями (2.3), (2.4). Задача заключаются в определении параметров a_1, k и a_2.

Сначала рассмотрим уравнение (1.2) с условиями (2.1), (2.3) и определим параметры a_1, k.

В (1.1), (2.1), (2.3) переходим к изображению по Лапласу

$$\frac{d^2\bar{p}}{dx^2}-\frac{s}{a_1}\bar{p}=-\frac{p_0}{a_1} \qquad (3.17)$$

$$\bar{p}(0,s)=\frac{p_c}{s},\quad \bar{p}(L,s)=\frac{p_0}{s} \qquad (3.18)$$

$$\bar{v}(0,s)=-\frac{k}{\mu}\frac{d\bar{p}}{dx}\bigg|_{x=0}=\bar{z}_1(s) \qquad (3.19)$$

где s – параметр преобразования Лапласа, $\bar{p}$, $\bar{v}$, $\bar{z}_1$ – преобразования функций p, v, z_1, соответственно.

Решение уравнения (3.17) с условиями (3.18), имеет вид:

$$\bar{p}(x,s)=\frac{(p_c-p_0)sh[(L-x)b_1]+p_0\,sh(b_1L)}{s\;sh(b_1L)},$$

$$b_1=\sqrt{\frac{s}{a_1}} \qquad (3.20)$$

Подставляя (3.20) в (3.19), получим

$$\bar{v}(0,s)=\bar{z}_1(s)=\frac{k}{\mu}\frac{(p_0-p_c)b_1\,ch(Lb_1)}{s\;sh(Lb_1)} \qquad (3.21)$$

Введем обозначение $\Delta\bar{z}_1(t)=\bar{z}_1(t)-v_{st}$, что для изображений дает

$$\Delta\bar{z}_1(s)=\bar{z}_1(s)-\frac{v_{st}}{s} \qquad (3.22)$$

где v_{st} – стационарное значение v.

Подставляя (3.21) в (3.22), получим

$$\frac{v_{st}}{s}+\Delta\bar{z}_1(s)=\frac{k}{\mu}\frac{(p_0-p_c)b_1\,ch(Lb_1)}{s\;sh(Lb_1)} \qquad (3.23)$$

Каждый член (3.23) разложим в ряд по степеням s. Воспользуясь разложениями в ряд функций $sh\ x$, $ch\ x$, а также

$$\Delta\bar{z}_1(s)=\Delta z_{10}-s\Delta z_{11}+\frac{s^2}{2}\Delta z_{12}-\ldots,$$

$$\Delta z_{1i}=\int_0^\infty t^i\Delta z_1(t)dt,\quad i=0,1,\ldots$$

получим

$$\mu\left(L+\frac{L^3}{3!}b_1^2+\frac{L^5}{5!}b_1^4+\ldots\right)\left(v_{st}+s\Delta z_{10}-s^2\Delta z_{11}+\ldots\right)=$$
$$=k(p_0-p_c)\left(1+\frac{L^2b_1^2}{2!}+\frac{L^4b_1^4}{4!}+\ldots\right) \qquad (3.24)$$

Приравнивая коэффициенты при 1, s, s^2 в (3.24) получим

$$s^0:\quad \mu Lv_{st}=k(p_0-p_c) \qquad (3.25)$$

$$s^1:\quad \mu L\Delta z_{10}+\frac{L^3\mu}{6a_1}v_{st}=k(p_0-p_c)\frac{L^2}{2a_1} \qquad (3.26)$$

$$s^2:\quad \frac{\mu L^5}{120a_1^2}\frac{k}{\mu}\frac{p_0-p_c}{L}+\frac{L^3\mu\Delta z_{10}}{6a_1}-\mu L\Delta z_{11}=$$
$$=k(p_0-p_c)\frac{L^4}{24a_1^2} \qquad (3.27)$$

Из (3.25), (3.26) и (3.27) получаем формулы для определения v_{st}, a_1, k.

$$v_{st}=\frac{k}{\mu}\frac{p_0-p_c}{L},\quad k=\frac{\mu L(\Delta z_{10})^2}{5(p_0-p_c)\Delta z_{11}},$$
$$a_1=\frac{L^2}{15}\frac{\Delta z_{10}}{\Delta z_{11}} \qquad (3.28)$$

Первая из формул (3.28) представляет собой известный результат, получаемый из закона Дарси. Для определения численных значений k, a_1 по (3.29) сначала численно решаем уравнение (1.1) с условиями (2.1) при известных значениях $a_1=0.008$ м²/с, $k=0.5\cdot10^{-12}$ м² и вычисляем $z_1(t)$ в (2.3). График функции $z_1(t)$ показан на фиг. 2. В расчетах использованы следующие исходные данные: p_0 =50 МПа, p_c =30 МПа, L = 10 м. Результаты вычислений по (3.28) приведены в табл. 3, из которой видно, что расчетные значения a_1 и k практически совпадают с заданными.

Теперь рассмотрим уравнение (1.2) с условиями (2.2), (2.4) и определим параметр a_2.

Применяя преобразование к (1.2), (2.2), (2.4) получим

$$\frac{d^2\bar{p}}{dx^2}-\frac{s}{a_2}\bar{p}=-\frac{p_1(x)}{a_2} \qquad (3.29)$$

$$\frac{d\bar{p}}{dx}\bigg|_{x=0}=0,\quad \bar{p}(L,s)=\frac{p_0}{s} \qquad (3.30)$$

$$\bar{p}(0,s)=\bar{z}_2(s) \qquad (3.31)$$

Решение уравнения (3.29) с условиями (3.30) имеет вид:

$$\bar{p}(x,s) = -\frac{1}{2b_3}\left[e^{b_2 x}\int_0^x e^{-b_2 u} p_1(u)du - e^{-b_2 x}\int_0^x e^{b_2 u} p_1(u)du\right] +$$
$$+\frac{ch(b_2 x)}{ch(b_2 L)}\left\{\frac{1}{2b_3}\left[e^{b_2 L}\int_0^L e^{-b_2 u} p_1(u)du - e^{-b_2 L}\int_0^L e^{b_2 u} p_1(u)du\right] + \frac{p_0}{s}\right\} \tag{3.32}$$

где $b_2 = \sqrt{s/a_2}$, $b_3 = \sqrt{a_2 s}$

Подставляя решение (3.32) в точке $x = 0$ в (3.31), преобразованное в виде

$$\frac{p_0}{s} - \Delta\bar{z}_2(s) = \bar{z}_2(s)$$

имеем

$$\frac{p_0}{s} - \Delta\bar{z}_2(s) = \frac{1}{ch(b_2 L)}\left\{\frac{1}{2b_3}\left[e^{b_2 L}\int_0^L e^{-b_2 u} p_1(u)du - e^{-b_2 L}\int_0^L e^{b_2 u} p_1(u)du\right] + \frac{p_0}{s}\right\} \tag{3.33}$$

Как и выше каждый член (3.33) разлагая в ряд по степеням s получим

$$a_2\left(1 + \frac{b_2^2 L^2}{2} + \ldots\right)(p_0 - s\Delta z_{20} + \ldots) =$$
$$= s\left(L\int_0^L p_1(u)du - \int_0^L u p_1(u)du + \ldots\right) + a_2 p_0 \tag{3.34}$$

где $\Delta z_{2i} = \int_0^\infty t^i \Delta z_2(t)dt, \quad i = 0,1,\ldots$.

Приравнивая коэффициенты при s в (3.34) получаем формулу для определения a_2:

$$a_2 = \frac{1}{\Delta z_{20}}\left[\frac{L^2 p_0}{2} - \int_0^L (L-u)p_1(u)du\right] \tag{3.35}$$

где $\Delta z_{20} = \int_0^\infty \Delta z_2(t)dt = \int_0^\infty (p_0 - z_2(t))dt$.

Для расчетов значения a_2 по (3.35) сначала численно решим уравнение (1.2) с условиями (2.2) при известном значении $a_2 = 0{,}015$ м²/с и вычисляем $z_2(t)$ в (2.4), что приведено на фиг. 3. Результаты расчетов по формуле (3.35) приведены в таблице 4. Анализ результатов показывает, что значение a_2 близко к заданному.

Таблица 1. Определение параметров a_1 , k по МКС и МГС при различных их начальных значениях

Метод	Число итераций m	Начальное значение $a_1^0 \times 10^3$, м²/с	Начальное значение $k^0 \times 10^{14}$, м²	Расчетное значение $a_1 \times 10^7$, м²/с	Расчетное значение $k \times 10^{17}$, м²
МКС	34	5	30	79964	49990
	34	5	70	79960	49991
	32	6	35	79953	49989
МГС	189	5	35	80157	50028
	209	5.5	35	79984	49995
	247	5	70	80038	50009
	164	10	30	80034	50008

Таблица 2. Определение параметров a_1, k овражным методом, $h = 0{,}9$

r	$a_1 \times 10^7$, м²/с	$k \times 10^{17}$, м²
r_0	50000	35000
r_1	55000	40000
r_2	49247	40862
r_3	54813	42768
r_4	59822	44483

r_5	60058	44432
r_6	64779	45930
r_7	64936	45894
r_8	69326	47210
r_9	69427	47179
r_{10}	73469	48336
r_{11}	73529	48307
r_{12}	77221	49322
r_{13}	77248	49297
r_{14}	80595	50188

Таблица 3

$\Delta z_{10}\times 10^8$, м/с	$\Delta z_{11}\times 10^8$, м	Заданное значение $k\times 10^{13}$, м^2	Заданное значение $a_1\times 10^3$, м^2/с	Расчетное значение $k\times 10^{16}$, м^2	Расчетное значение $a_1\times 10^6$, м^2/с
4066904	3359267915	5	8	4924	8071

Таблица 4

L, м	p_0, МПа	p_c, МПа	$\Delta z_{20}\times 10^5$, МПа·с	Заданное значение $a_2\times 10^3$, м^2/с	Расчетное значение $a_2\times 10^8$, м^2/с
10	50	30	3730668696	15	1793079

Таким образом, полученные формулы дают достаточно корректные результаты по оценке параметров пласта при упруго-пластическом режиме фильтрации однородных жидкостей.

Заключение.

Обратные задачи фильтрации в упруго-пластическом режиме исследовались очень мало. Даже для наиболее простого случая, когда упруго-пластическая деформация скелета пород учитывается в линейном виде только как изменение пористости (необратимое изменение проницаемости не рассматривается) [4, 5], пьезопроводности пласта раздельно в режимах понижения и восстановления давления не оценивались. В тоже самое время следует отметить, что обратные задачи для упругого режима решались много и, в целом, на их основе разработаны методики гидродинамического исследования нефтяных и газовых пластов. Анализ коэффициентных обратных задач для модели упруго-пластической фильтрации [4, 5] в данной работе показал существенную трудность решения задачи по сравнению с традиционным упругом режимом фильтрации. Это в первую очередь касается того факта, что фильтрационно-емкостные характеристики пласта в режимах понижения и восстановления давления разные, и следовательно, их необходимо определять раздельно. В качестве дополнительного условия в обратных задачах здесь принимается заданная скорость фильтрации в точке $x=0$ (место расположения нефтедобывающей скважины) в режиме понижения давления, а в режиме восстановления давления – заданная динамика давления в этой точке. Для решения задачи в режиме понижения давления применены методы спуска и определены параметры a_1, k. Результаты расчетов показывают, что при применении данных методов требуется большое количество итераций – шагов спуска. Показано, что путем применения овражного метода количество итераций может быть существенно уменьшено. В режиме восстановления давления более предпочтительным является применение методов идентификации, что за небольшое количество итераций позволяет восстановить значение пьезопроводности пласта. Путем применения метода детерминированных моментов выведены простые формулы для определения k, a_1, a_2, расчет по которым показывает их высокую эффективность и точность. Специальные численные эксперименты показывают также их устойчивость по отношению к изменениям исходных данных – функций $z_1(t)$ и $z_2(t)$. Учитывая ограниченность возможности применения метода детерминированных моментов только для линейных задач, заметим, что в качестве основного инструмента решения обратных нелинейных задач выступают методы спуска и идентификации. Решение представленных задач могут быть положены в основу методики по определению параметров пласта при упруго-пластическом режиме. В качестве дальнейшего развития рассмотренных здесь задач можно указать постановку обратных коэффициентных задач для уравнений (3)-(6).

References:

1. Gorbunov, A. T. (1981). *Razrabotka anomal`nyh neftjanyh mestorozhdenij*. Moscow: Nedra.
2. Strizhov, I. N., & Hodanovich, I. E. (1946). *Dobycha gaza*. Moscow: Gostoptehizdat.
3. Isakov, G. V. (1946). O deformacii neftjanyh kollektorov. *Neftjanoe hozjajstvo*, № 11, pp. 17 - 24.
4. Barenblatt, G. I., & Krylov, A. P. (1955). Ob uprugoplasticheskom rezhime fil`tracii. *Izv. AN SSSR*. OTN. № 2, pp. 5 - 13.
5. Barenblatt, G. I. (1955). O nekotoryh zadachah vosstanovlenija davlenija i rasprostranenija voln razgruzki pri uprugo-plasticheskom rezhime fil`tracii. *Izv. AN SSSR*. OTN. № 2, pp. 14 - 26.
6. Barenblatt, G. I., Entov, V. M., & Ryzhik, V. M. (1990). *Theory of fluid flows through natural rocks*. (p.395). Kluwer Academic Publishers.
7. Nikolaevskij, V. N., Basniev, K. S., Gorbunov, A. T., & Zotov, G. A. (1970). *Mehanika nasyshhennyh gornyh porod*. Moscow: Nedra.
8. Gorbunov, A. T. (1973). Uprugo-plasticheskij rezhim fil`tracii zhidkosti v poristyh sredah. *Izv. AN SSSR*. MZhG. № 5, pp. 84-90.
9. Huzhajorov, B. H. (1997). Ob uravnenijah fil`tracii v uprugoplasticheskom rezhime s vynosom peska. *Dokl. AN RUz*. № 4, pp. 22 - 24.
10. Huzhajorov, B. H., Shodmonov, I. Je., Holijarov, Je. Ch., & Zokirov, A. A. (2003). Uprugoplasticheskaja fil`tracija zhidkosti v neustojchivyh plastah. *IFZh*. T. 76, № 6, pp. 123 - 128.
11. Alifanov, O. M. (1988). *Obratnye zadachi teploobmena*. Moscow: Mashinostroenie.
12. Mishin, V. P., & Alifanov, O. M. (1986). Povyshenie kachestva obrabotki teplonagruzhennyh konstrukcij i obratnye zadachi teploobmena. Ch. II. *Prakticheskie prilozhenija. Mashinovedenie*, №6, pp. 11-21.
13. Huzhajorov, B. H., & Holijarov, Je. Ch. (2007). Obratnye zadachi uprugoplasticheskoj fil`tracii zhidkosti v poristoj srede. *IFZh*. T. 80, № 3, pp. 86 - 93.
14. Zheltov, Jy.P. (1986). *Razrabotka neftjanyh mestorozhdenij*. (p.332). Moscow: Nedra.
15. Kalitkin, N. N. (1978). *Chislennye metody*. (p.512). Moscow: Nauka.
16. Suharev, A. G., Timohov, A. V., & Fedorov, V. V. (1986). *Kurs metodov optimizacii*. (p.328). Moscow: Nauka.
17. Babe, G. D., Bondarev, Je. A., Voevodin, A. F., & Kanibolotskij M. A. (1980). *Identifikacija modelej gidravliki*. Novosibirsk: Nauka.
18. Himmel`blau, D. (1973). *Analiz processov statisticheskimi metodami*. Moscow: Mir.