

Impact Factor:

ISRA (India)	= 4.971	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
ISI (Dubai, UAE)	= 0.829	PIHHI (Russia)	= 0.126	PIF (India)	= 1.940
GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.716	IBI (India)	= 4.260
JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 5.667	OAJI (USA)	= 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2020 Issue: 02 Volume: 82

Published: 29.02.2020 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



Kamolkhon Karimov

Tashkent State Technical University named after Islam Karimov
Head of department, doctor of technical Sciences, professor, Tashkent, Uzbekistan
kamolxon.karimov@gmail.com

Mukhiddin Khudjaev

Tashkent State Technical University named after Islam Karimov
candidate of technical Sciences, Teacher, Tashkent, Uzbekistan
mukhiddinkhudjaev@gmail.com

Erkin Nematov

Tashkent State Technical University named after Islam Karimov
candidate of technical Sciences, Teacher, Tashkent, Uzbekistan
erkin_nemat@mail.ru

Tohir Hojibekov

Tashkent State Technical University named after Islam Karimov
Assistant, Tashkent, Uzbekistan
tohir_hojibek@mail.ru

ANALYTICAL SOLUTION OF NAVIER STOKES EQUATION REDUCED TO THE EQUATION OF THIRD ORDER TO STUDY THE MOTION OF LIQUID IN A FLAT PIPE

Abstract: The motion of fluid in various canals and pipelines has been sufficiently studied with regard of molecular transport for laminar flows in the framework of the Navier-Stokes equations. When deriving these equations to determine the flow hydrodynamic characteristics, one should assume the shear stress in direct relation to the normal fluid velocity derivative.

In order to take into account the group transfers of molecules in the flow, one should take the voltage in direct proportion to the derivative of the liquid acceleration. A joint consideration of the transport mechanisms of individual molecules and their groups in the Navier-Stokes differential equations, form terms with a third derivative. In the framework of this article, using the provisions of operational calculus, an analytical solution is obtained for the stationary motion of an incompressible fluid in a flat pipe, when constant velocity and hydrostatic pressure are set at the inlet.

Some numerical results obtained using the developed analytical solutions are presented.

Key words: Navier-Stokes equation, fluid motion, velocity, pressure, molecular and group momentum transfer, Poiseuille problem, operational calculus.

Language: Russian

Citation: Karimov, K., Khudjaev, M., Nematov, E., & Hojibekov, T. (2020). Analytical solution of navier stokes equation reduced to the equation of third order to study the motion of liquid in a flat pipe. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 02 (82), 563-569.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-02-82-93> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.02.82.93>

Scopus ASCC: 2600.

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	РИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.716	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА, ПРИВЕДЕННЫХ К УРАВНЕНИЮ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОЙ ТРУБЕ

Аннотация: Движение жидкости в различных каналах и трубопроводах достаточно изучено с учетом молекулярного переноса для слоистых течений в рамках уравнений Навье-Стокса. При выводе этих уравнений для определения гидродинамических характеристик течения касательное напряжение берется прямо пропорциональное производной скорости жидкости по нормали.

С целью учета групповых переносов молекул в течении напряжение берется прямо пропорционально производной от ускорения жидкости. При совместном рассмотрении механизмов переноса отдельных молекул и их групп в дифференциальных уравнениях Навье-Стокса образуются члены с производной третьего порядка. В рамках данной статьи с привлечением положений операционного исчисления получено аналитическое решение стационарного движения несжимаемой жидкости в плоской трубе, когда на входе заданы постоянные скорость и гидростатическое давление.

Приведены некоторые численные результаты, полученные с помощью полученных аналитических решений.

Ключевые слова: уравнение Навье-Стокса, движение жидкости, скорость, давление, молекулярный и групповой перенос импульса, задача Пуазейла, операционное исчисление.

Введение

УДК 532.516

Дифференциальные уравнения движения жидкости при слоистых течениях жидкости построены на основе учета перемещения отдельных молекул из слоя в слой. В работе [1] получено аналитическое решение уравнений Навье-Стокса для плоской трубы. Эти уравнения являются дифференциальными уравнениями второго порядка и получены на основе реологического закона Ньютона, по которому напряжение прямо пропорционально градиенту скорости, что характерно для слоистых течений.

Движение жидкости в этом случае описывается уравнениями Навье-Стокса. Аналитическому решению этого уравнения посвящено огромное количество работ.

Получение параболического уравнения из исходных уравнений, которое решено методом Фурье [2], существование автомодельных решений [3], использование метода остаточных степенных рядов [4], существование единственного решения [5], а также использование экспоненциального оператора [6] относительно уравнениям Навье-Стокса показывают, что эти уравнения являются аналитически решаемыми. Эту цель можно достичь приведением уравнений Навье-Стокса к примитивным уравнениям [7] или после подходящего изменения масштаба, заданного параметром аспекта физической области [8], а также с помощью метода пространственного усреднения [9] или доказательством распада до нуля слабых решений трехмерных уравнений когда время стремится к бесконечности [10].

Решение двумерных уравнений методом Тейлором-Меша без сетки, основанных на ряда Тейлора [11], итерационные вариационные методы конечных элементов мультимасштаба

[12], математические особенности, которые приводят к свойствам сходимости для семейства численных схем, применяемых для дискретизации стационарных и переходных уравнений [13] и многие другие работы по численным методам относятся к решению уравнений движения жидкости Навье-Стокса, которые выведены на основе закона пропорциональности напряжения на производную от скорости течения по нормали. В рассматриваемой ниже работе учитывается и этот аспект, и еще напряжение для групповых переносов молекул, которое считается пропорциональным ускорению течения.

Задача относится к определению гидродинамических параметров течения несжимаемой жидкости в плоской трубе с учетом молекулярных и групповых переносов молекул в течении и решена методами операционных исчислений. Представлены некоторые результаты расчетов, проведенных по полученному аналитическому решению.

Постановка задачи.

Итак, рассматривается задача Пуазейла в плоскопараллельной постановке.

При совместном рассмотрении механизмов переноса отдельных молекул и их групп напряжение берется в виде

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n} + m_l \frac{\partial w}{\partial n}. \quad (1)$$

Здесь u – скорость потока; μ – коэффициент динамической вязкости жидкости; m_l – коэффициент молярного переноса; w – ускорение потока, в двухмерном случае который имеет вид:

$$w_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2},$$
$$w_2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2}.$$

В компонентной форме в декартовых координатах (1) имеет вид:

$$\tau_{i,j} = \begin{cases} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + m_l \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) & \text{при } j \neq i, \\ -p + 2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + m_l \frac{\partial w_i}{\partial x_i} & \text{при } j = i \end{cases} \quad (2)$$

(i, j = 1, 2, 3).

Для составления уравнений движения несжимаемой жидкости используем общее уравнение динамики в напряжениях [14].

$$\begin{cases} \rho \frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3}, \\ \rho \frac{dv_2}{dt} = \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3}, \\ \rho \frac{dv_3}{dt} = \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3}, \end{cases} \quad (3)$$

и пренебрегаем членами, порядок которых значительно ниже порядка удерживаемых в полученных уравнениях членов.

Переходим к новым переменным $v_x = \frac{v_1 - u_0}{u_0}, v_y = \frac{v_2}{u_0}, P = \frac{p - p_0}{\rho u_0^2}, x = \frac{x_1}{h}, y = \frac{x_2}{h},$ (4)

где u_0 – значение однородной скорости потока на входе канала; p_0 – входное давление; $2h$ – расстояние между двумя неограниченными в одном направлении горизонтальными плоскостями; ρ – плотность жидкости.

Для решения задачи используем метод малых возмущений. Считаем, что v_x, v_y, P – малые величины, которые в начальном сечении обращаются в нуль.

Тогда задача стационарного движения вязкой несжимаемой жидкости с учетом уравнения неразрывности сводится к интегрированию системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - Re \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{dP}{dx} \right) + a \frac{\partial v_x^3}{\partial y^2 \partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $Re = \frac{hu_0}{\nu}$ – число Рейнольдса, $a = \frac{m_l Re}{\rho h^2}$ – безразмерный параметр.

Граничными условиями рассматриваемой задачи являются

$$\begin{cases} v_x = 0, P = 0 \text{ при } x = 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, v_y = 0, |v_x| < \infty \text{ при } y = 0, \\ v_x = -1, v_y = 0 \text{ при } x > 0 \text{ и } y = \pm 1. \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, для выбранной модели сформулирована задача о стационарном течении жидкости в полубесконечной жесткой плоской трубе.

Решение задачи. Решение системы уравнений (5) при условиях (6) будем строить, используя методы операционного исчисления. Для этого перейдем в (5) от оригинала к их изображениям по переменной x . Тогда, принимая во внимание условия при $x = 0$, получим

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{v}_x}{dy^2} - \omega^2(s) \bar{v}_x = \omega^2(s) \bar{P}, \\ s \bar{v}_x + \frac{d \bar{v}_y}{dy} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $\omega^2(s) = \frac{sRe}{1+as},$ s – параметр преобразования Лапласа. $\bar{P}, \bar{v}_x, \bar{v}_y$ – соответственно изображения оригиналов P, v_x, v_y

При этом граничные условия для \bar{v}_x и \bar{v}_y примут вид:

$$\begin{cases} \bar{v}_x = -\frac{1}{s} \text{ при } y = \pm 1, \\ \bar{v}_y = 0, |\bar{v}_x| < \infty \text{ при } y = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Так как \bar{P} не зависит от y , то общее решение первого уравнения системы (7) запишется в виде

$$\bar{v}_x = c_1 sh\omega y + c_2 ch\omega y - \bar{P}.$$

Неизвестные постоянные c_1 и c_2 определяются из условий (8). В результате в области изображения будем иметь следующее решение:

$$\bar{v}_x = \frac{\bar{P} - 1/s}{ch\omega} ch\omega y - \bar{P}. \quad (9)$$

Для нахождения \bar{P} умножим обе части второго уравнения (7) на dy и проинтегрируем по y от -1 до 1 . Полученное таким образом значение составляет

$$\bar{P} = \frac{sh\omega}{s(sh\omega - \omega ch\omega)}. \quad (10)$$

В частном случае, когда $m_l = 0$, оригиналы (9) и (10) представляются формулами, которые получены в [1]. В этих формулах из предельного соотношения

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \bar{P} = P(0) = 0$$

следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^2} = \frac{1}{10}, \quad (11)$$

где ξ_n ($n=1, 2, \dots$) – положительные корни уравнения $\text{tg} \xi = \xi$ ($\xi \neq 0$).

Пусть теперь $m_l \neq 0$. Введем к рассмотрению функцию

$$f(x) = -3 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-x \xi_m^2} \quad (12)$$

и воспользуемся теоремой Эфроса [15]:

Если известно изображение $F(s) = f(x)$ и аналитические функции $G(s)$ и $q(s)$ такие, что

$$G(s) e^{-\tau q(s)} = g(x, \tau),$$

тогда уместно отношение

$$F[q(s)] G(s) = \int_0^{\infty} f(\sigma) g(x, \sigma) d\sigma.$$

Для нахождения оригинала (12) (при $m_l \neq 0$) достаточно положить,

$$G(s) = \frac{1}{s}, \quad q(s) = \omega^2 = \frac{sRe}{1+as},$$

тогда в этом случае из [16] следует

$$\begin{aligned} G(s) e^{-\tau q(s)} &= e^{-\tau Re} \eta e^{\frac{\Delta^* \tau}{s+\eta}}, \\ g(x, \tau) &= e^{-\tau \eta Re} [e^{-\eta x I_0(2\sqrt{\tau \Delta^* x})} + \\ &+ \eta \int_0^{\infty} e^{-\eta x} I_0(2\sqrt{\tau \Delta^* x}) dx]. \end{aligned} \quad (13)$$

где $\eta = 1/a; \Delta^* = \eta^2 Re;$ $I_0(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого порядка.

Теперь, учитывая соотношения (10), (12), (13), получим

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 PIHHC (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.716
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$$P(x) = -3e^{-\eta x} \int_0^{\infty} e^{-\sigma \eta Re_0(2\sqrt{\sigma \Delta^* x})} - 3\eta \int_0^{\infty} \left[e^{-\sigma \eta Re \int_0^x e^{-\eta x} I_0(2\sqrt{\sigma \Delta^* x}) dx} \right] - 2e^{-\eta x} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\xi_n^2 + \eta Re)\sigma} I_0(2\sqrt{\sigma \Delta^* x}) d\sigma - 2\eta \int_0^x e^{-\eta x} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x e^{-(\xi_n^2 + \eta Re)\sigma} I_0(2\sqrt{\sigma \Delta^* x}) d\sigma \right] dx. \quad (14)$$

Вспользуемся значением интеграла, приведенном в [17],

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} I_{2\nu}(2\sqrt{\beta x}) dx = \frac{\beta}{a^{2\nu}} \Gamma(\nu + 1) \frac{M_{-\frac{1}{2}, \nu}}{\Gamma(2\nu + 1)}. \quad (15)$$

Здесь $\Gamma(\dots)$ – гамма-функция Эйлера, а функция Уиттекера определяется в виде

$$M_{\lambda, \mu}(z) = z^{\mu + \frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} \Phi(\mu - \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; z). \quad (16)$$

Учитывая, что

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = F_1(\alpha, \gamma; z) = 1 + \frac{az}{\gamma!} + \frac{a(\alpha+1)z^2}{\gamma(\gamma+1)2} + \dots, \quad (17)$$

$$M_{-\frac{1}{2}, 0}(z) = \sqrt{ze}^{-\frac{z}{2}} \Phi(1, 1; z) = \sqrt{ze}^{\frac{z}{2}}, \quad (18)$$

определим

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} I_0(2\sqrt{\beta x}) dx = \frac{e\beta/a}{a}. \quad (19)$$

Произведя вычисления в соотношении (14) с учетом (19) получим

$$P(x) = - \frac{3}{Re \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{a\xi_n^2 + Re}}{\xi_n^2 (\alpha \xi_n^2 + Re)}} \quad (20)$$

Найдем теперь оригинал v_x (при $m_l \neq 0$). Согласно (9) имеем

$$\tilde{v}_x = \tilde{p} \frac{ch\omega y}{ch\omega} - \frac{1}{s} \frac{ch\omega y}{ch\omega} - \tilde{p}. \quad (21)$$

Используя теорему Эфроса, формулы (13) и (19), можно найти следующие оригиналы

$$\frac{\tilde{p} ch\omega y}{ch\omega} \doteq - \frac{3}{Re} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_n y) e^{\frac{x\xi_n^2}{a\xi_n^2 + Re}}}{(\xi_n^2 + \eta Re) \cos \xi_n} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_n y)}{\xi_n^2 \cos \xi_n} \left(1 - e^{\frac{x\xi_n^2}{a\xi_n^2 + Re}} \right) + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) \cos(\pi/2(2n+1)y)}{[\pi/2(2n+1)]^2 + \eta Re} \frac{x[\pi/2(2n+1)]^2}{e^{a[\pi/2(2n+1)]^2 + Re}} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos[\pi/2(2n+1)y]}{2n+1} \times \left\{ 1 - \frac{x[\pi/2(2n+1)]^2}{e^{a[\pi/2(2n+1)]^2 + Re}} \right\} \quad (22)$$

$$\frac{1}{s} \frac{ch\omega y}{ch\omega} \doteq$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) \cos(\pi/2(2n+1)y)}{[\pi/2(2n+1)]^2 + \eta Re} \frac{x[\pi/2(2n+1)]^2}{e^{a[\pi/2(2n+1)]^2 + Re}} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos[\pi/2(2n+1)y]}{2n+1} \times \left\{ 1 - \frac{x[\pi/2(2n+1)]^2}{e^{a[\pi/2(2n+1)]^2 + Re}} \right\} \quad (23)$$

На основании соотношений (20), (22), (23) и (21) следует

$$v_x = -1 + \frac{3}{2}(1 - y^2) + 2 Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_n y) - \cos \xi_n}{\xi_n^2 (\alpha \xi_n^2 + Re) \cos \xi_n} e^{-\frac{x\xi_n^2}{a\xi_n^2 + Re}} \quad (24)$$

При получении формулы (24) были использованы суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos[\pi/2(2n+1)y]}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

(при $0 \leq y \leq 1$),

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_n y)}{\xi_n^2 \cos \xi_n} = \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{5} + y^2 \right).$$

Значение первой суммы заимствовано из [12], второе найдено из предельного соотношения

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[s \tilde{p} \frac{ch(\sqrt{s Re} \omega)}{ch \sqrt{s Re}} \right] = 0.$$

При $m_l \rightarrow 0$ значения $P(x)$ и $v_x(x, y)$ совпадают с их значениями в частном случае, полученными ранее в [14].

Переходя к размерным величинам, находим

$$\frac{p_0 - p(x_1)}{\rho u_0^2} = \frac{3}{\rho h^2} \left(m_l + \frac{x_1 \mu}{u_0} \right) + \frac{1}{5} - 2\rho h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{u_0(m_l \xi_n^2 + \rho h^2)}}{\xi_n^2 (m_l \xi_n^2 + \rho h^2)}, \quad (25)$$

$$\frac{v_1(x_1, x_2)}{u_0} = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{x_2}{h} \right)^2 \right] + 2\rho h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_n y) - \cos \xi_n}{\xi_n^2 (\alpha \xi_n^2 + Re) \cos \xi_n} e^{-\frac{x_1 \xi_n^2}{a\xi_n^2 + Re}} \quad (26)$$

Обсуждение полученного решения (25) и (26). Формулы (25) и (26) при $m_l = 0$ совпадают с результатами, приведенными в [14] при рассмотрении вопроса развития линейного профиля скоростей в плоской трубе.

При $x_1 \rightarrow \infty$ из (25) следует, что это решение дает параболический режим течения, а из (28) следует

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} \right)_{x_1=\infty} = \frac{3u_0 \mu}{h^2}.$$

Таким образом, получено аналитическое решение уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в плоской трубе при совместном учете молекулярного и группового переноса импульса, а решение С.М. Тагга [1]

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	РИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.716	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

получается как частные случаи решения (25) и (26).

Результаты вычислительного эксперимента. На основе представленного аналитического решения задачи проведен вычислительный эксперимент.

На рис. 1 приведены максимальные скорости в сечениях по длине трубопровода при $Re = 500, a = 0, 5, 25$. На расстоянии $x_1 = 40h$ от

входа во всех случаях они принимают практически одинаковые значения. До этого расстояния большему значению числа a соответствует большее значение максимальной скорости. После достижения расстояния $x_1 = 40h$ порядок расположения максимумов меняется. Далее разница между ними постепенно стремится к нулю.

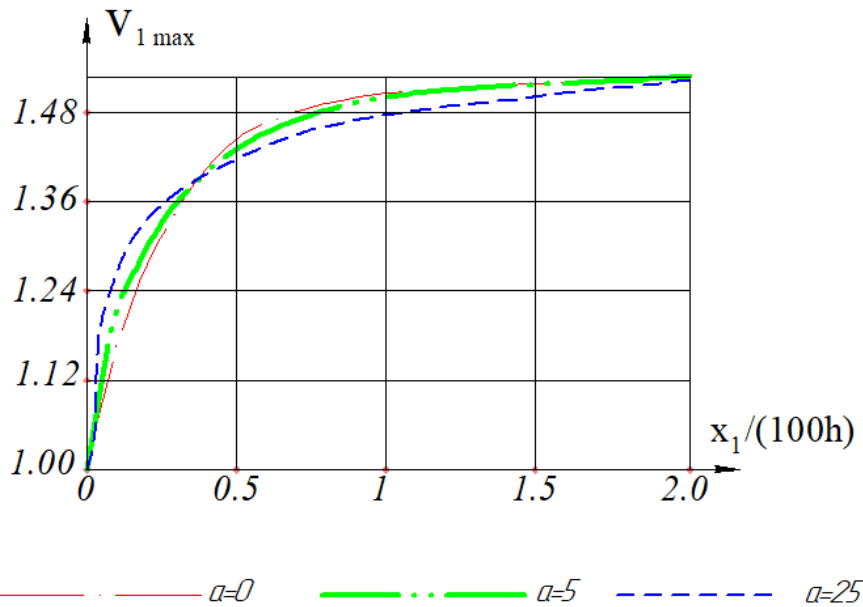


Рис. 1. Максимальные скорости в сечениях по длине трубопровода при $Re = 500, a = 0, 5, 25$

На рис. 2 изображены профили скоростей разных значений чисел Re и a на расстоянии $x_1 = 20h$ от входа: $Re = 500, a = 0.5(1)$ и

$Re = 2500, a = 100(2)$. Из рисунка видно, что при малых числах Re и a размер ядра потока меньше, чем при их больших значениях.

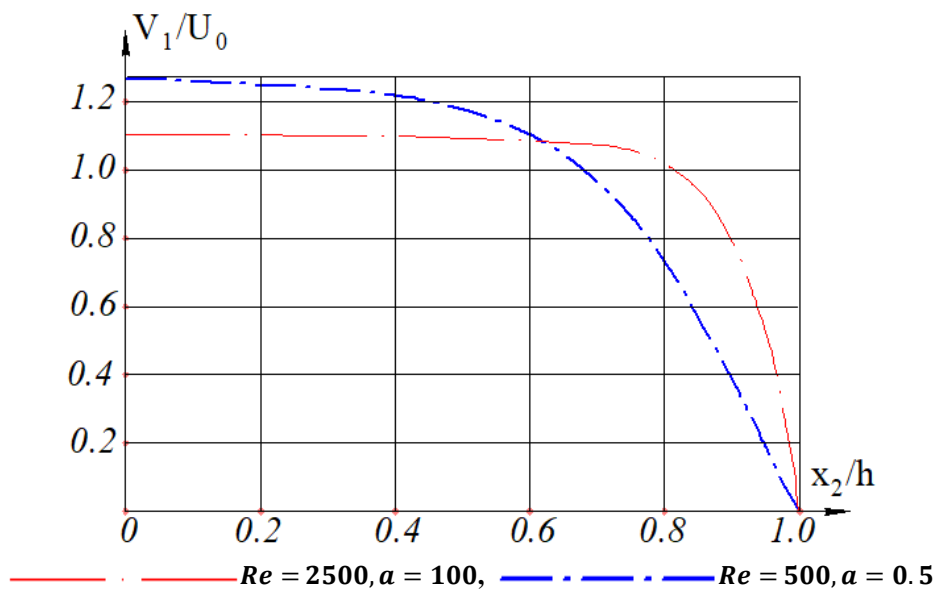


Рис. 2. Профили скоростей на расстоянии $20h$

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 0.126
ESJI (KZ) = 8.716
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

На рис. 3 приведено сравнение $v_1(x_2)/v_1(0)$ с опытными данными Никурадзе и теоретическими данными В.В. Струминского [18] при $Re = 12500, a = 500$. Как видно из рисунка, теоретические данные по распределению

скоростей в ядре потока удовлетворительно согласуются с опытными данными и теоретическими результатами В.В. Струминского.

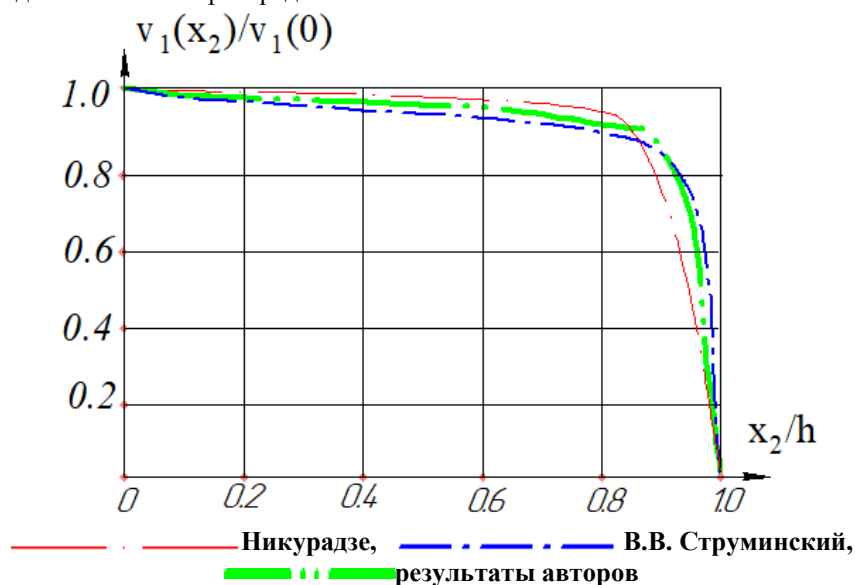


Рис. 3. Изменение $v_1(x_2)/v_1(0)$ при $Re = 12500, a = 500$

Количественная оценка силы трения на стенке показывает, что ее большие значения наблюдаются во входной части трубопровода, а при $x_1/h > 1$ остается практически без изменения. При одинаковых условиях во входе резкий спад трения на стенке имел место при $a = 25$: до расстояния $2h$ суммарное напряжение уменьшилось почти в 2,5 раза. С уменьшением a (до нуля) спад касательного напряжения на начальном участке отстает от результатов

предыдущих значений a , т.е. до $x_1/h = 22$ меньшему значению a соответствует большое значение касательного напряжения. От $x_1/h = 22$ большему значению a соответствует большое значение $\tau_{x_1x_2}$. В расстоянии $x_1/h = 160..200$ и далее, когда течение принимает равновесное состояние, касательное напряжение принимает известное ранее из литературы постоянное значение.

References:

1. Targ, S.M. (1951). *The main tasks of the theory of laminar flows*. (p.420). M.-L.: Gostekhizdat.
2. Khujaev, I., Ahmadjanov, S., Khujaev, M., Ismailov A. (2019). Investigation of the gas-dynamic state of an elementary section of the pipeline based on N.E.Zhukovsky equation // *International Scientific Journal ISJ Theoretical & Applied Science*, "Clarivate Analytics". Vol.78, pp. 32-40. <http://t-science.org/арxivDOI/2019/10-78.html>
3. Zuoshunhua, Shi. (2018). Self-similar solutions of stationery Navier-Stokes equations. *Journal of Differential Equations*, Vol. 264, pp. 1550-1580. <https://doi.org/10.1016/j.jdl.2017.10.002>
4. Khaled, K.J., & Rami, S.A. (2018). Analytical solution of the time fractional Navier-Stokes equation. *Journal of Differential Equations*, Vol. 9, pp. 1917-1927. <https://doi.org/10.1016/j.asej.2016.08.021>
5. Shifang, W. (2020). Global solution of inhomogeneous incompressible Navier-Stokes equations on thin domain. *Journal of Differential Equations*, Vol. 482, 123556. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123556>
6. Hantaek, B. (2018). Analyticity of the inhomogeneous incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Differential Equations*, Vol. 83, pp. 200-206. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.04.001>
7. Yong, L., & Schwarzacher, S. (2018). Homogenization of the compressible Navier-Stokes equations in domains with very tiny

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
PIHHI (Russia) = 0.126
ESJI (KZ) = 8.716
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

- holes. *Journal of Differential Equations*, Vol. 264, pp. 1371-1406. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.04.007>
8. Jinkai, L., & Edriss, S. T. (2019). The primitive equations as the small aspect ratio limit of the Navier-Stokes equations: Rigorous justification of the hydrostatic approximation. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, Vol. 124, pp. 30-58. <https://doi.org/10.1016/j.matpur.2018.04.006>
 9. Ciprian, G. G., & Yanqiu, G. (2018). Inertial manifolds for the hyperviscous Navier-Stokes equations. *Journal of Differential Equations*, Vol. 265, pp. 4335-4374. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.06.011>
 10. Huan, Y., & Xiaoxin, Z. (2019). Asymptotic behavior of weak solutions to the damped Navier-Stokes equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 477, pp. 1009-1018. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.068>
 11. Jie, Y., & Heng, H. (2019). Solving the stationary Navier-Stokes equations by using Taylor mesh less method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 98, pp. 8-16. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.09.014>
 12. Yamiao, Z., & Lianning, Z. (2018). Iterative finite element variational multiscale method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 340, pp. 53-70. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.02.024>
 13. Eymard, R., & Guichard, C. (2018). Family of convergent numerical schemes for the incompressible Navier-Stokes equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 144, pp. 196-218. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2017.08.003>
 14. Loitsyansky, L.G. (1978). *Mechanics of fluid and gas*. (p.736). Moscow: Nauka.
 15. Lavrentiev, M.A., & Shabat, B.V. (1987). *Methods of the theory of functions of a complex variable*. (p.688). Moscow: Nauka.
 16. Ditkin, V.A., & Prudnikov, A.P. (1965). *Reference book on operating calculus*. (p.465). Moscow: Fizmatgiz.
 17. Gradshteyn, I. S. (1962). *Tables of integrals, sums, series and products*. (p.1100). Moscow: Fizmatgiz.
 18. Struminsky, V.V. (1987). *Kinetic theory of turbulent flows*. - In book: *Problems of turbulent flows*. (pp.14-57). Moscow: Nauka.