Impact Factor:

ISRA (India)	= **4.971**	**SIS** (USA)	= **0.912**	**ICV** (Poland)	= **6.630**
ISI (Dubai, UAE)	= **0.829**	**РИНЦ** (Russia)	= **0.126**	**PIF** (India)	= **1.940**
GIF (Australia)	= **0.564**	**ESJI** (KZ)	= **8.716**	**IBI** (India)	= **4.260**
JIF	= **1.500**	**SJIF** (Morocco)	= **5.667**	**OAJI** (USA)	= **0.350**

QR – Issue **QR – Article**

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2020 **Issue:** 01 **Volume:** 81

Published: 30.01.2020 **http://T-Science.org**

Bekzod Ortikov
Samarkand State University
Researcher

Akmaljon Abdurashidov
Samarkand State University
Researcher

Ablakul Abdirashidov
Samarkand State University
Corresponding member of International Academy,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor to department of theoretical and applied mechanics,
abdira@mail.ru

APPROXIMATE SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION

Abstract: *In this work, the type of the second-order partial differential equation is first determined, and it is reduced to the canonical form, and then the mixed problem for the wave equation is solved approximately by the method of separation of variables, the method of variational iterations, and the method of Adomian decomposition. All of these methods provide a sequence of functions that converges to an exact solution. In all cases, the same results were obtained, but the Adomian decomposition method was very simple and convenient.*

Key words: *mixed task, wave equation, variable separation method, variational iteration method, Adomian decomposition method, exact solution.*

Language: *Russian*

Citation: Ortikov, B., Abdurashidov, A., & Abdirashidov, A. (2020). Approximate solution of the mixed problem for the wave equation. *ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (81),* 478-484.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-81-86 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.01.81.86

Scopus ASCC*: 2610.*

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация: *В этой работе сначала определена тип дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, и она приведена к каноническому виду, а затем приближенно решена смешанная задача для волнового уравнения методом разделения переменных, методом вариационных итераций и методом разложения Адомиана. Все эти методы обеспечивает последовательность функций, которая сходится к точному решению. Во всех случаях получены одинаковые результаты, но при этом метод разложения Адомиана являлся очень простим и удобным.*

Ключевые слова: *смешанная задача, волновое уравнение, метод разделения переменных, метод вариационных итераций, метод разложения Адомиана, точное решение.*

Введение

Основной задачей строительной механики является разработка методов расчёта и получения данных для надёжного и экономичного проектирования зданий и сооружений. Надёжные методы расчётов таких зданий и сооружений позволяют возводить достаточно лёгкие и надёжные конструкции. Определённые математические модели и расчёты некоторых объектов строительной механики приводятся к решению линейных или нелинейных уравнений математической физики. Известно, что во многих практических случаях моделирование прикладных задач приводятся к решению дифференциальных уравнений, в частности, к решению дифференциальных уравнений с частными производными. При этом важный этап решения таких задач является определить тип полученного уравнения и привести ее к каноническому виду, чтобы далее было удобно применить к решению данной задачи более известную метод [1, 2, 7, 9-11]. В данной работе предложены применения современных более простых и точных методов решения таких уравнений [1-11].

Постановка задачи. В общем случае, сначала требуется определить тип уравнения

$$a_{11}(x,y)u_{xx}+2a_{12}(x,y)u_{xy}+a_{22}(x,y)u_{yy}+$$
$$+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=f(x,y) \quad (*)$$

и привести его к каноническому виду [12], а затем требуется точно решать смешанную задачу для волнового уравнения методом разделения переменных (МРП), методом вариационных итераций (МВИ) и методом разложения Адомиана (МРА).

Алгоритм определения тип уравнения и приведения её к каноническому виду:

1^0. Тип уравнения (*) определяется знаком выражения $a_{12}^2-a_{11}a_{22}$: уравнение (*) в точке $M(x,y)$ называется уравнением: гиперболического типа, если $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$; эллиптического типа, если $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$; параболического типа, если $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$. Уравнение (*) будет являться уравнением гиперболического, эллиптического, параболического типа в области *D*, если оно гиперболично, эллиптично, параболично в каждой точке этой области. Уравнение (*) может менять свой тип при переходе из одной точки (области) в другую. Например, уравнение $yu_{xx}+u_{yy}=0$ является уравнением эллиптического типа в точках $(x,y),\ y>0$; параболического типа в точках $(x,0)$; и гиперболического типа в точках $(x,y),\ \ y<0$.

2^0. Чтобы привести уравнение к канонического виду, необходимо: • определить коэффициенты $a_{11}(x,y), a_{12}(x,y), a_{22}(x,y)$; • вычислить выражение $a_{12}^2-a_{11}a_{22}$; • сделать вывод о типе уравнения (*) (см. п. 1^0.); • записать уравнение характеристик: $a_{11}(x,y)dy^2-2a_{12}(x,y)dxdy+a_{22}(x,y)dx^2=0$; • решить данное характеристическое уравнение. как квадратное уравнение относительно *dy:* $dy=[(a_{12}(x,y)\pm\sqrt{a_{12}{}^2-a_{11}a_{22}})/a_{11}]dx$; найти общие интегралы характеристическое уравнение (характеристики уравнения (1)): $\varphi_1(x,y)=C_1,\ \ \psi_1(x,y)=C_2,$ - в случае уравнения гиперболического типа; $\varphi_2(x,y)=C$ - в случае уравнения параболического типа; $\varphi_3(x,y)\pm i\psi_3(x,y)=C$ - в случае уравнения эллиптического типа; • ввести новые (характеристические) переменные ξ и η: в случае уравнения гиперболического типа в качестве ξ и η берут общие интегралы $\xi=\varphi_1(x,y),\ \ \eta=\psi_1(x,y)$; в случае уравнения параболического типа в качестве ξ берут общий интеграл $\xi=\varphi_2(x,y)$, а в качестве η берут произвольную, дважды дифференцируемую функцию ψ_2, не выражающуюся через $\varphi_2(x,y)$, т.е. $\eta=\psi_2(x,y)$; в случае уравнения эллиптического типа в качестве ξ и η берут вещественную и мнимую часть любого из общих интегралов; • пересчитать все производные, входящие в уравнение (*), используя правило дифференцирования сложной функции; • подставить найденные производные в исходное уравнение (*) и привести подобные слагаемые. В результате уравнение (*) примет один из следующих видов: в случае уравнения гиперболического типа: $u_{\xi\eta}+F_1(u_\xi,u_\eta,u,\xi,\eta)=0$; в случае уравнения параболического типа: $u_{\eta\eta}+F_1(u_\xi,u_\eta,u,\xi,\eta)=0$; в случае уравнения эллиптического типа: $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+F_1(u_\xi,u_\eta,u,\xi,\eta)=0$.

Пример 1. Определить тип уравнения

$$u_{xx}-2u_{xy}\sin x-u_{yy}\cos^2 x-u_y\cos x+xy=0$$

и привести его к каноническому виду.

Решение: Решение данного примера выполним с помощью Maple 17 [5, 12].

```
> restart : with(linalg) : with(PDETools) : with(ODETools) :
> with(PDEtools, casesplit, declare) : declare(u(x, y)) :
u(x, y) will now be displayed as u
> a := 1, -2·sin(x), -cos(x)^2, 0, -cos(x), 0, x·y :
     # Задание коэффициентов и составление уравнение
> equ := a[1]·diff(u(x, y), x, x) + a[2]·diff(u(x, y), x, y) + a[3]·diff(u(x, y), y, y) + a[4]
     ·diff(u(x, y), x) + a[5]·diff(u(x, y), y) + a[6]·u(x, y) + a[7] = 0; eq := lhs(equ) :
```

$$equ := u_{x,x} - 2\sin(x)\,u_{x,y} - \cos(x)^2\,u_{y,y} - \cos(x)\,u_y + x\,y = 0$$

```
> # Определение тип уравнение
  A := linalg[matrix](2, 2, [coeff(eq, diff(u(x, y), x, x)), coeff(eq, diff(u(x, y), x, y))/2,
     coeff(eq, diff(u(x, y), x, y))/2, coeff(eq, diff(u(x, y), y, y))]) : Delta :=
     -simplify(linalg[det](A));
```

$$\Delta := 1$$

```
> # Составление уравнение характеристик и её решение
  A[1, 1]·z^2 - 2·A[1, 2]·z + A[2, 2] = 0; res := solve(A[1, 1]·z^2 - 2·A[1, 2]·z + A[2, 2], z);
```

$$z^2 + 2\,z\sin(x) - \cos(x)^2 = 0$$

$$res := -\sin(x) - 1,\ -\sin(x) + 1$$

```
> # Введение характеристические переменные
  subs(y = y(x), res[1]) : res1 := dsolve(diff(y(x), x) = %, y(x)) : res1 := subs(y(x) = y,
     res1) : eq1 := xi = solve(res1, _C1) : subs(y = y(x), res[2]) : res2 := dsolve(diff(y(x),
     x) = %, y(x)) : res2 := subs(y(x) = y, res2) : eq2 := eta = solve(res2, _C1) :
> itr := {eq1, eq2}; tr := solve(itr, {x, y});
```

$$itr := \{\eta = -\cos(x) - x + y,\ \xi = -\cos(x) + x + y\}$$

$$tr := \left\{x = \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta,\ y = \frac{1}{2}\eta + \cos\left(-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta\right) + \frac{1}{2}\xi\right\}$$

```
> # Составление канонический вид заданного уравнения и её упрощения
  PDE1 := PDEtools[dchange](tr, eq, itr, [eta, xi], simplify) = 0;
```

$$PDE1 := -4\,u_{\eta,\xi} - \frac{1}{2}\eta\cos\left(-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta\right) + \frac{1}{2}\xi\cos\left(-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta\right) - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{4}\xi^2 = 0$$

```
> newvar := {ξ = x + t, η = x - t} : PDE2 := dchange(newvar, PDE1);
```

$$PDE2 := u_{t,t} - u_{x,x} - \frac{1}{2}(x-t)\cos(t) + \frac{1}{2}(x+t)\cos(t) - \frac{1}{4}(x-t)^2 + \frac{1}{4}(x+t)^2 = 0$$

```
> PDE3 := expand(subs(u(t, x) = v(t, x) + t·cos(t) - 2·sin(t), lhs(PDE2))) = 0;
```

$$PDE3 := v_{t,t} - v_{x,x} + x\,t = 0$$

Таким образом, заданное уравнение является гиперболического типа во всей плоскости xOy, а её канонический вид $v_{tt} - v_{xx} + xt = 0$.

Алгоритм метода разделения переменных (МРП), метода вариационных итераций (МВИ) и метода разложения Адомиана (МРА) приведены в работах [1, 2, 6, 7, 9-11].

Пример 2. Считаем, что заданное дифференциальное уравнение в частных производных приведен к каноническому виду. Требуется точно решать следующую смешанную задачу для волнового уравнения методом разделения переменных (МРП), методом вариационных итераций (МВИ) и методом разложения Адомиана (МРА) [2, 6]:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + x\sin t, \qquad 0 \le x \le l,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = -l\sin t, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{l},\ u_t(x,0) = -x. \tag{3}$$

Для решения задачи примем обозначение $u(x,t) = v(x,t) - x\sin t$. Из задачи (1)-(3) получим следующую задачу:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \quad 0 \le x \le l,\ t > 0, \tag{4}$$

$$v(0,t)=0,\ v(l,t)=0, \qquad (5)$$

$$v(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l},\ v_t(x,0)=0. \qquad (6)$$

1) По идею МРП имеем: $v(x,t)=X(x)\cdot T(t)$. Подставляя это выражение к уравнению (4) имеем две уравнения вида [6]

$$T''\cdot X=a^2X''\cdot T\Rightarrow$$

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=\lambda-const.$$

Отсюда получим спектральную задачу: $X''-\lambda X=0$, $X(0)=X(l)=0$.

При $\lambda<0$ имеем

$$X(x)=a\cos\sqrt{-\lambda}x+b\sin\sqrt{-\lambda}x,$$

$X(0)=0$ и $X(l)=0\Rightarrow$

$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x,\ n\in N$; а вторая

$$T_n''+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2T_n=0\Rightarrow$$

$$T_n=a_n\cos\frac{an\pi}{l}t+b_n\sin\frac{an\pi}{l}t.$$

Общее решение уравнение (4) и (5):

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{an\pi}{l}t+b_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

а из условия (6) имеем

$$v(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\Rightarrow$$

$a_1=1,\ a_k=0$ $k=2,3,4,\ldots$;

$$v_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{l}\cdot b_n\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\Rightarrow$$

$$b_n=0.$$

Точное решение задачи (4)-(6):

$$v(x,t)=\cos\frac{a\pi}{l}t\cdot\sin\frac{\pi x}{l}.$$

2) Теперь уравнение (4) будем решать сначала по начальным условиям (6), а затем с граничными условиями (5) методом разложения Адомиана (МРА).

Для МРА имеем формулу приближенного решения задачи (4) и (6) [2]:

$$\int_0^t d\xi\int_0^t v_{\xi\xi}(x,\xi)d\xi=\int_0^t d\xi\int_0^t a^2v_{xx}(x,\xi)d\xi\Rightarrow v(x,t)=\sin\frac{\pi x}{l}+\int_0^t d\xi\int_0^t a^2v_{xx}(x,\xi)d\xi.$$

По идею МРА: $v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(x,t)\Rightarrow\ v_0(x,t)+v_1(x,t)+v_2(x,t)+\ldots=$

$$=\sin\frac{\pi x}{l}+\int_0^t d\xi\int_0^t a^2\left[v_0(x,\xi)+v_1(x,\xi)+v_2(x,\xi)+\ldots\right]_{xx}d\xi;\quad v_0(x,t)=\sin\frac{\pi x}{l};$$

$$v_1(x,t)=\int_0^t d\xi\int_0^t a^2\left[v_0(x,\xi)\right]_{xx}d\xi=-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2\cdot\frac{t^2}{2!}\cdot\sin\frac{\pi x}{l};$$

$$v_2(x,t)=\int_0^t d\xi\int_0^t a^2\left[v_1(x,\xi)\right]_{xx}d\xi=\left(\frac{a\pi}{l}\right)^4\cdot\frac{t^4}{4!}\cdot\sin\frac{\pi x}{l};\ldots;$$

$$v_n(x,t)=\int_0^t d\xi\int_0^t a^2\left[v_{n-1}(x,\xi)\right]_{xx}d\xi=(-1)^n\cdot\left(\frac{a\pi}{l}\right)^{2n}\cdot\frac{t^{2n}}{(2n)!}\cdot\sin\frac{\pi x}{l}\quad \text{и т.д.}$$

Точное решение задачи (4) и (6): $v(x,t)=v_0(x,t)+v_1(x,t)+\ldots=\cos\frac{a\pi}{l}t\cdot\sin\frac{\pi x}{l}$.

Для МРА имеем формулу приближенного решения задачи (4) и (5):

$$\int_0^x d\xi\int_0^x v_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi=\int_0^x d\xi\int_0^x \frac{1}{a^2}v_{tt}(\xi,t)d\xi\Rightarrow v(x,t)=x\cdot\varphi(t)+\int_0^x d\xi\int_0^x \frac{1}{a^2}v_{tt}(\xi,t)d\xi.$$

Здесь $\varphi(t)=v_x(0,t)$, (7)

По идею МРА: $v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) \Rightarrow\ v_0(x,t)+v_1(x,t)+v_2(x,t)+...=$

$$=x\cdot\varphi(t)+\int_0^x d\xi\int_0^x \frac{1}{a^2}\left[v_0(\xi,t)+v_1(\xi,t)+v_2(\xi,t)+...\right]_{tt}d\xi;$$

$$v_0(x,t)=x\cdot\varphi(t);\quad v_1(x,t)=\int_0^x d\xi\int_0^x \frac{1}{a^2}\left[v_0(\xi,t)\right]_{tt}d\xi=\left(\frac{1}{a}\right)^2\cdot\frac{x^3}{3!}\cdot\varphi''(t);$$

$$v_2(x,t)=\int_0^x d\xi\int_0^x \frac{1}{a^2}\left[v_1(\xi,t)\right]_{tt}d\xi=\left(\frac{1}{a}\right)^4\cdot\frac{x^5}{5!}\cdot\varphi^{IV}(t);\ldots;$$

$$v_n(x,t)=\int_0^x d\xi\int_0^x \frac{1}{a^2}\left[v_{n-1}(\xi,t)\right]_{tt}d\xi=\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\varphi^{(2n)}(t)\quad \text{и т.д.}$$

Общее решение уравнение (4), (5) и (7):

$$v(x,t)=x\varphi(t)+\left(\frac{1}{a}\right)^2\frac{x^3}{3!}\varphi''(t)+\left(\frac{1}{a}\right)^4\frac{x^5}{5!}\varphi^{IV}(t)+...+\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\varphi^{(2n)}(t)+...$$

а из условия (6) имеем

$$v(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l}=x\varphi(0)+\left(\frac{1}{a}\right)^2\frac{x^3}{3!}\varphi''(0)+\left(\frac{1}{a}\right)^4\frac{x^5}{5!}\varphi^{IV}(0)+...+\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\varphi^{(2n)}(0)+...$$

$$v_t(x,0)=0=x\varphi'(0)+\left(\frac{1}{a}\right)^2\frac{x^3}{3!}\varphi'''(0)+\left(\frac{1}{a}\right)^4\frac{x^5}{5!}\varphi^{V}(0)+...+\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\varphi^{(2n+1)}(0)+...\ \Rightarrow$$

$$\varphi(0)=\frac{\pi}{l};\ \varphi'(0)=0;\ \varphi''(0)=-\frac{\pi}{l}\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2;\ \varphi'''(0)=0;...;\ \varphi^{(2n)}(0)=(-1)^n\frac{\pi}{l}\left(\frac{a\pi}{l}\right)^{2n};$$

$$\varphi^{(2n+1)}(0)=0\ \text{и.т.д.}\ \Rightarrow\ \varphi(t)=\frac{\pi}{l}\cos\frac{a\pi}{l}t.$$

Точное решение задачи (4)-(6): $v(x,t)=\cos\frac{a\pi}{l}t\cdot\sin\frac{\pi x}{l}$.

3) Уравнение (4) будем решать сначала по начальным условиям (6), а затем с граничными условиями (5) методом вариационных итераций (МВИ).

Для решения задачи (4)-(6) МВИ примем обозначение

$$v(x,t)=\int_0^t w(x,\xi)d\xi+\sin\frac{\pi x}{l}\qquad(8)$$

Из уравнения (4) получим следующую интегро-дифференциальное уравнение:

$$w_t(x,t)=a^2\int_0^t w_{xx}(x,\xi)d\xi-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2\sin\frac{\pi x}{l},\ \ w(x,0)=0,\qquad(9)$$

По идею МВИ имеем формулу приближенного решения задачи (9):

$$w_{n+1}(x,t)=w_n(x,t)+\int_0^t\lambda(\xi)\left[\frac{\partial w_n(x,\xi)}{\partial\xi}-a^2\int_0^{\xi}\frac{\partial^2\tilde{w}_n(x,\eta)}{\partial x^2}d\eta+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2\sin\frac{\pi x}{l}\right]d\xi.$$

Здесь $\lambda(\xi)$ - множитель Лагранжа, а для стационарного случая $\lambda'(\xi)\big|_{\xi=t}=0$, $1+\lambda(\xi)\big|_{\xi=t}=0$ и отсюда имеем $\lambda(\xi)=-1$. Тогда имеем приближенную формулу

$$w_{n+1}(x,t)=w_n(x,t)-\int_0^t\left[\frac{\partial w_n(x,\xi)}{\partial\xi}-a^2\int_0^{\xi}\frac{\partial^2\tilde{w}_n(x,\eta)}{\partial x^2}d\eta+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2\sin\frac{\pi x}{l}\right]d\xi.$$

Применяя МВИ, получим следующие результаты:

$$w_0(x,t)=0; \quad w_1(x,t)=-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2\cdot t\cdot\sin\frac{\pi x}{l}; \; w_2(x,t)=\left[-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 t+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^4\frac{t^3}{3!}\right]\cdot\sin\frac{\pi x}{l} \quad \text{и т.д.}$$

Точное решение задачи (9):

$$w(x,t)=\lim_{n\to\infty}w_n(x,t)=\lim_{n\to\infty}\left[-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 t+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^4\frac{t^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\left(\frac{a\pi}{l}\right)^{2n}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right]\cdot\sin\frac{\pi x}{l}$$

а из обозначения (8) имеем $v(x,t)=\int_0^t w(x,\xi)d\xi+\sin\frac{\pi x}{l}=$

$$=\left[1-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2\frac{t^2}{2!}+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^4\frac{t^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\left(\frac{a\pi}{l}\right)^{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right]\sin\frac{\pi x}{l}=\cos\frac{a\pi}{l}t\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Для решения задачи (4) и (5) МВИ примем обозначение $v(x,t)=\int_0^x w(\xi,t)d\xi$ (10).

Из уравнения (4) получим следующую интегро-дифференциальное уравнение:

$$w_x(x,t)=\frac{1}{a^2}\int_0^x w_{tt}(\xi,t)d\xi, \quad w(0,t)=\varphi(t), \quad (11)$$

По идею МВИ имеем формулу приближенного решения задачи (11):

$$w_{n+1}(x,t)=w_n(x,t)+\int_0^x\lambda(\xi)\left[\frac{\partial w_n(\xi,t)}{\partial\xi}-\frac{1}{a^2}\int_0^\xi\frac{\partial^2\tilde{w}_n(\eta,t)}{\partial t^2}d\eta\right]d\xi.$$

Здесь также $\lambda(\xi)=-1$. Тогда имеем приближенную формулу

$$w_{n+1}(x,t)=w_n(x,t)-\int_0^x\left[\frac{\partial w_n(\xi,t)}{\partial\xi}-\frac{1}{a^2}\int_0^\xi\frac{\partial^2\tilde{w}_n(\eta,t)}{\partial t^2}d\eta\right]d\xi.$$

Применяя МВИ, получим следующие результаты:

$$w_0(x,t)=\varphi(t); \quad w_1(x,t)=\varphi(t)+\varphi''(t)\left(\frac{1}{a}\right)^2\cdot\frac{x^2}{2!};$$

$$w_2(x,t)=\varphi(t)+\varphi''(t)\left(\frac{1}{a}\right)^2\cdot\frac{x^2}{2!}+\varphi^{IV}(t)\left(\frac{1}{a}\right)^4\cdot\frac{x^4}{4!}$$

и т.д.

Точное решение задачи (11):

$$w(x,t)=\lim_{n\to\infty}\left[\varphi(t)+\varphi''(t)\left(\frac{1}{a}\right)^2\cdot\frac{x^2}{2!}+\varphi^{IV}(t)\left(\frac{1}{a}\right)^4\cdot\frac{x^4}{4!}+\ldots+\varphi^{(2n)}(t)\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right]$$

а из обозначения (10) имеем

$$v(x,t)=\int_0^x w(\xi,t)=x\varphi(t)+\varphi''(t)\left(\frac{1}{a}\right)^2\frac{x^3}{3!}+\varphi^{IV}(t)\left(\frac{1}{a}\right)^4\frac{x^5}{5!}+\ldots+\varphi^{(2n)}(t)\left(\frac{1}{a}\right)^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

а из условия (6) имеем

$$v(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l}=x\varphi(0)+\left(\frac{1}{a}\right)^2\frac{x^3}{3!}\varphi''(0)+\left(\frac{1}{a}\right)^4\frac{x^5}{5!}\varphi^{IV}(0)+\ldots+\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\varphi^{(2n)}(0)+\ldots$$

$$v_t(x,0)=0=x\varphi'(0)+\left(\frac{1}{a}\right)^2\frac{x^3}{3!}\varphi'''(0)+\left(\frac{1}{a}\right)^4\frac{x^5}{5!}\varphi^V(0)+...+\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\varphi^{(2n+1)}(0)+...\Rightarrow$$

$$\varphi(0)=\frac{\pi}{l};\ \varphi'(0)=0;\ \varphi''(0)=-\frac{\pi}{l}\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2;\ \varphi'''(0)=0;...;\ \varphi^{(2n)}(0)=(-1)^n\frac{\pi}{l}\left(\frac{a\pi}{l}\right)^{2n};$$

$$\varphi^{(2n+1)}(0)=0 \text{ и.т.д. } \Rightarrow \varphi(t)=\frac{\pi}{l}\cos\frac{a\pi}{l}t.$$

Точное решение задачи (4)-(6):

$$v(x,t)=\cos\frac{a\pi}{l}t\cdot\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Точное решение задачи (1)-(3):

$$u(x,t)=v(x,t)-x\sin t=\cos\frac{a\pi}{l}t\cdot\sin\frac{\pi x}{l}-x\sin t$$

.

Эти результаты проверены с помощью математического пакета Maple 17 [5].

Выводы.

Таким образом, МРП, МВИ и МРА дают одинаковые результаты, но МРА является более простим, точным и быстро приближающим к точному решению задачи. Поэтому в дальнейшем рекомендуется использование МРА при решении линейных и нелинейных задач математической физики [1, 2, 8-12].

References:

1. Adomian, G. (1994). *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. Boston, MA: Kluwer.
2. Wazwaz, A. M. (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. (p.761). Higher Education Press, Berlin Heidelberg.
3. Abdurashidov, A. A. (2017). Resheniya nelineynix volnovix uravneniy metodom variasionnix iterasiy. *Mejdunarodniy nauchniy jurnal: Molodoy ucheniy*, 6. pp. 4-8.
4. Abdurashidov, A. A., Kasimova, F.U., Raximova, X. A. (2017). Priblijennoye resheniye volnovix uravneniy boleye visokogo poryadka metodom variasionnix iterasiy. *Mejdunarodniy nauchniy jurnal: Razvitiye i aktualniye voprosi sovremennoy nauki*, 4(4), pp. 4-9.
5. Alekseyev, Ye. R., & Chesnokova, O. V. (2006). *Resheniye zadach vichislitelnoy matematiki v paketax Mathcad, Matlab, Maple* (Samouchitel). (p. 496). Moscow: NT Press.
6. Bisadze, A. V., & Kalinichenko, D. F. (1985). *Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki*. Ucheb. posobiye dlya mexaniko-matemat. i fiz. spes. vuzov. 2-ye izd., dop. (p. 310). Moscow: Nauka.
7. Kudryashov, N. A. (2010). *Metodi nelineynoy matematicheskoy fiziki*. Uchebnoye posobiye. 2-ye izd. (p. 368). Dolgoprudniy: Intellekt.
8. Polyanin, A. D., Zaysev, V. F., & Jurov, A. I. (2005). *Metodi resheniya nelineynix uravneniy matematicheskoy fiziki i mexaniki*. (p.256). Moscow: FIZMATLIT.
9. He, J. H., & Wu, X. H. (2007). Variational iteration method: New development and applications, *Computers and Mathematics with Applications*. 54 (7-8), pp. 881-894.
10. He, J. H. (2007). Variational iteration method- Some recent results and new interpretations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207, pp. 3-17.
11. Abdou, M. A., & Soliman, A. A. (2005). New applications of variational iteration method. *Phys*. D, 211 (1-2), pp. 1-8.
12. Suyunov, S., & Tangirov, J. (2020). *Reduction to the canonical form of linear equations with partial derivatives of the second order with two independent variables using Maple*. European Scientific Conference**:** Collection of articles of the XVIII International scientific-practical conference. Part 1. (pp.14-18). Penza: ICSN “Science and Enlightenment”.