SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2020 **Issue:** 01 **Volume:** 81

Published: 15.01.2020 http://T-Science.org

QR – Issue QR – Article

Gennady Evgenievich Markelov
Bauman Moscow State Technical University
Candidate of Engineering Sciences, associate professor,
corresponding member of International
Academy of Theoretical and Applied Sciences,
Moscow, Russia
markelov@bmstu.ru

THE GROUP OF SERIALLY CONNECTED THERMISTORS

Abstract*: A mathematical model of a technical system was obtained using a unified approach to building a working mathematical model. The technical system consists of a group of serially connected NTC thermistors. The constructed mathematical model is sufficiently full, accurate, adequate, productive, and economical. Applying such a model reduces the costs and time spent on research and makes efficient use of the mathematical modeling capabilities.*

Key words*: working mathematical model, properties of mathematical models, principles of mathematical modeling.*

Language*: Russian*

Citation: Markelov, G. E. (2020). The Group of Serially Connected Thermistors. *ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (81)*, 108-111.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-81-20 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.01.81.20

Scopus ASCC*: 2604.*

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ТЕРМОРЕЗИСТОРОВ

Аннотация*: В рамках единого подхода к построению рабочей математической модели получена математическая модель технической системы. Техническая система включает последовательное соединение терморезисторов с отрицательным температурным коэффициентом сопротивления. Построенная математическая модель в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности. Применение такой модели сокращает затраты времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.*

Ключевые слова*: рабочая математическая модель, свойства математических моделей, принципы математического моделирования.*

Введение

Рассмотрению технических характеристик терморезисторов с отрицательным температурным коэффициентом сопротивления, основных принципов их работы, способов расчета схем с этими терморезисторами посвящена обширная учебная и научная литература. Известны многочисленные примеры успешного практического использования таких приборов в различных областях человеческой деятельности.

Целью настоящей работы является построение в рамках единого подхода рабочей математической модели технической системы. Эта техническая система включает последовательное соединение терморезисторов с отрицательным температурным коэффициентом сопротивления.

Зависимость сопротивления R такого терморезистора от его температуры T обычно описывают выражением (см., например, [1]), которое имеет вид

$$R(T) = r\exp\left[\beta\left(T^{-1} - T_0^{-1}\right)\right],$$

где r — сопротивление терморезистора при $T = T_0$; β — коэффициент, постоянный для данного экземпляра терморезистора. Однако в сравнительно узком диапазоне температур можно считать, что

$$R(T) = \frac{r}{1+\beta(T-T_0)T_0^{-2}}.$$

Единый подход к построению рабочей математической модели, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию, изложен в работах [2; 3]. Некоторые свойства математических моделей сформулированы, например, в [4; 5]. В работе [6] приведен пример построения математической модели, в достаточной мере обладающей нужными свойствами применительно к исследованию, некоторые результаты которого опубликованы в работах [7–9]. Особенности внедрения единого подхода к построению математических моделей рассмотрены, например, в [10; 11].

2. Постановка задачи

Рассмотрим последовательное соединение n терморезисторов. Пусть i-й терморезистор является высокотеплопроводным телом, температура T_i которого в начальный момент времени t_0 равна T_0, причем $T_i \le T_1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. На поверхности терморезистора площадью S_i происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой равна T_0, коэффициент теплоотдачи известен и равен α_i. Для сравнительно узкого диапазона температур от T_0 до T_1 считаем, что

$$R_i(T_i) = \frac{r_i}{1+\beta_i(T_i-T_0)T_0^{-2}},$$

$$C_i(T_i) = c_i\left[1+\gamma_i(T_i-T_0)\right],$$

где $R_i(T_i)$ и $C_i(T_i)$ — сопротивление и полная теплоемкость i-го терморезистора; r_i и c_i — сопротивление и полная теплоемкость i-го терморезистора при $T_i = T_0$; β_i и γ_i — положительные постоянные величины. Разность электрических потенциалов на полюсах i-го элемента равна

$$U_i = \frac{r_i I}{1+\beta_i(T_i-T_0)T_0^{-2}}, \qquad (1)$$

где I — сила постоянного электрического тока, протекающего через терморезисторы.

Пусть в рамках проводимого исследования представляет интерес разность электрических потенциалов

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i. \qquad (2)$$

Построим рабочую математическую модель объекта исследования, которая в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

3. Решение

Для решения поставленной задачи используем полученные в работе [12] результаты. Эти результаты позволяют легко построить иерархию математических моделей данного объекта исследования и определить условия, при выполнении которых можно с относительной погрешностью не более заданного значения δ_0 найти искомую величину U.

Если разности $T_i - T_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, достаточно малы, то согласно (1) найдем искомую величину по формуле

$$U_0 = \sum_{i=1}^{n} r_i I. \qquad (3)$$

Определим условия, при которых применима полученная формула. Для этого рассмотрим установившийся процесс теплообмена. В этом случае согласно выкладкам, приведенным в работе [12], установившееся значение величины U_i найдем по формуле

$$U_i^* = \frac{2r_i I}{1+\sqrt{1+4\beta_i r_i I^2 \alpha_i^{-1} S_i^{-1} T_0^{-2}}},$$

причем для данного диапазона температур

$$\frac{r_i I^2}{\alpha_i S_i (T_1 - T_0)} \le 1+\beta_i(T_1-T_0)T_0^{-2}. \qquad (4)$$

Тогда установившееся значение искомой величины равно

$$U_* = \sum_{i=1}^{n} U_i^*. \qquad (5)$$

Для относительной погрешности величины U_0 запишем

$$\delta(U_0) = \left|\frac{U-U_0}{U}\right| = \frac{U_0}{U} - 1 \le \frac{U_0}{U_*} - 1.$$

При выполнении неравенства

$$\frac{U_0}{U_*} - 1 \le \delta_0$$

можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (3) для нахождения искомой величины. Следовательно, при выполнении неравенства

$$U_0 \le (1+\delta_0)U_* \qquad (6)$$

математическая модель (3) в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

Затем определим условия, при которых применима математическая модель (5). Для этого рассмотрим неустановившийся процесс теплообмена. Тогда согласно результатам, полученным в работе [12], приходим к задаче Коши

$$\frac{c_i r_i I T_0^2}{\beta_i U_i^2}\frac{dU_i}{dt}=\frac{\alpha_i S_i r_i I T_0^2-\alpha_i S_i U_i T_0^2-\beta_i I U_i^2}{\gamma_i r_i I T_0^2-\gamma_i U_i T_0^2+\beta_i U_i},$$

$$U_i\left(t_0\right)=r_i I, \tag{7}$$

где $i=1,2,\dots,n$, и найдем момент времени

$$t_i=t_0+\frac{c_i}{\alpha_i S_i}\left[\frac{\gamma_i T_0^2}{\beta_i}\left(\frac{U_i^*}{r_i I}-1+\delta_0\right)\frac{r_i I}{U_i^*}+\right.$$
$$+\left(\frac{r_i I}{2r_i I-U_i^*}+\frac{\gamma_i T_0^2}{\beta_i}\frac{r_i I-U_i^*}{2r_i I-U_i^*}\frac{r_i I}{U_i^*}-1\right)\times$$
$$\times\ln\left(2-\frac{U_i^*}{r_i I}-\delta_0\right)-\left(\frac{r_i I}{2r_i I-U_i^*}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\gamma_i T_0^2}{\beta_i}\frac{r_i I-U_i^*}{2r_i I-U_i^*}\frac{r_i I}{U_i^*}\right)\ln\left(\frac{r_i I}{r_i I-U_i^*}\delta_0\right)\right],$$

для которого

$$U_i\left(t_i\right)=\frac{U_i^*}{1-\delta_0}.$$

Очевидно, что при $t\ge t_i$

$$\delta\left(U_i^*\right)=\left|\frac{U_i-U_i^*}{U_i}\right|=1-\frac{U_i^*}{U_i}\le\delta_0,$$

а значение U_i^* можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $U_i\left(t\right)$. Пусть $t_*=\max\limits_{1\le i\le n} t_i$, тогда легко показать, что при $t\ge t_*$

$$\delta\left(U_*\right)=\left|\frac{U-U_*}{U}\right|=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(U_i-U_i^*\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}U_i}\le\delta_0.$$

Следовательно, можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (5) для нахождения искомой величины.

Если не выполнено условие (6), то математическая модель (5) при $t\ge t_*$ в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

Разработка новой математической модели при формировании иерархии математических моделей объекта исследования может привести к уточнению найденных ранее условий применимости построенных математических моделей. Действительно, используя математическую модель (2), (7), можно уточнить условие применимости формулы (3). Для этого найдем момент времени

$$t_i=t_0+\frac{c_i}{\alpha_i S_i}\left[\left(\frac{\gamma_i T_0^2}{\beta_i}\frac{r_i I-U_i^*}{2r_i I-U_i^*}\frac{r_i I}{U_i^*}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{r_i I}{2r_i I-U_i^*}-1\right)\ln\left(1+\frac{U_i^*}{r_i I}\delta_0\right)-$$
$$-\frac{\gamma_i T_0^2}{\beta_i}\delta_0-\left(\frac{\gamma_i T_0^2}{\beta_i}\frac{r_i I-U_i^*}{2r_i I-U_i^*}\frac{r_i I}{U_i^*}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{r_i I}{2r_i I-U_i^*}\right)\ln\left(1-\frac{U_i^*}{r_i I-U_i^*}\delta_0\right)\right],$$

для которого

$$U_i\left(t_i\right)=\frac{r_i I}{1+\delta_0}.$$

Очевидно, что при $t\le t_i$

$$\delta\left(r_i I\right)=\left|\frac{U_i-r_i I}{U_i}\right|=\frac{r_i I}{U_i}-1\le\delta_0,$$

а значение $r_i I$ можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $U_i\left(t\right)$. Пусть $t^*=\min\limits_{1\le i\le n} t_i$, тогда легко показать, что при $t\le t^*$

$$\delta\left(U_0\right)=\left|\frac{U-U_0}{U}\right|=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(r_i I-U_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}U_i}\le\delta_0.$$

Следовательно, можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (3) для нахождения искомой величины.

Если выполнено условие (6) или $t\le t^*$, то математическая модель (3) в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

4. Результаты

При выполнении неравенства (4) справедливы следующие утверждения, которые позволяют выявить рабочую математическую модель объекта исследования.

Утверждение 1. Если выполнено условие (6) или в рамках проводимого исследования $t\le t^*$, то математическую модель (3) считаем рабочей.

Утверждение 2. Если не выполнено условие (6), то математическую модель (5) при $t\ge t_*$ выбираем как рабочую.

Утверждение 3. Если не выполняется неравенство (6), а временной интервал от t^* до t_* представляет интерес, то математическую модель (2), (7) считаем рабочей.

5. Заключение

Таким образом, в рамках единого подхода сформулированы применительно к данному исследованию утверждения. Они позволяют установить рабочую математическую модель технической системы, которая включает последовательное соединение терморезисторов с отрицательным температурным коэффициентом сопротивления. Построенная математическая модель в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

Очевидно, что применение такой математической модели не только сокращает затраты времени и средств на проведение исследования, но и позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.

References:

1. Macklen, E. D. (1979). *Thermistors*. Ayr: Electrochemical Publications Ltd.
2. Markelov, G. E. (2015). On Approach to Constructing a Working Mathematical Model. *ISJ Theoretical & Applied Science, 04 (24),* 287–290. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS*04(24)52 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.04.24.52
3. Markelov, G. E. (2015). Constructing a Working Mathematical Model. *ISJ Theoretical & Applied Science, 08 (28),* 44–46. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-08-28-6 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.08.28.6
4. Myshkis, A. D. (2011). *Elements of the Theory of Mathematical Models* [in Russian]. Moscow: URSS.
5. Zarubin, V. S. (2010). *Mathematical Modeling in Engineering* [in Russian]. Moscow: Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana.
6. Markelov, G. E. (2012). Peculiarities of Construction of Mathematical Models. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii, No. 4,* http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/150.html
7. Markelov, G. E. (2000). Effect of initial heating of the jet-forming layer of shaped-charge liners on the ultimate elongation of jet elements. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys., 41, No. 2,* 231–234.
8. Markelov, G. E. (2000). Effect of initial heating of shaped charge liners on shaped charge penetration. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys., 41, No. 5,* 788–791.
9. Markelov, G. E. (2000). *Influence of heating temperature on the ultimate elongation of shaped-charge jet elements*. Proc. of the 5th Int. Conf. "Lavrentyev Readings on Mathematics, Mechanics and Physics". (p. 170). Novosibirsk: Lavrentyev Institute of Hydrodynamics.
10. Markelov, G. E. (2015). Particular Aspects of Teaching the Fundamentals of Mathematical Modeling. *ISJ Theoretical & Applied Science, 05 (25),* 69–72. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS*05(25)14 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.05.25.14
11. Markelov, G. E. (2016). Teaching the Basics of Mathematical Modeling. Part 2. *ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (33),* 72–74. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-33-15 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2016.01.33.15
12. Markelov, G. E. (2018) Mathematical Model of a Technical System Element. *ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (*57*),* 111–113. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-57-20 Doi: https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.01.57.20