Impact Factor:

ISRA (India)	= 3.117	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
ISI (Dubai, UAE)	= 0.829	РИНЦ (Russia)	= 0.156	PIF (India)	= 1.940
GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.716	IBI (India)	= 4.260
JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 5.667	OAJI (USA)	= 0.350

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2019 **Issue:** 07 **Volume:** 75

Published: 09.07.2019 http://T-Science.org

QR – Issue QR – Article

A.T. Zhakash
Taraz State University
PhD, ass. professor

E.A. Dzhakashova
Taraz State University
teacher

O.M. Tursynbay
Taraz State University
student

VIBRATIONS OF THE ROD WITH DIFFERENT WAYS OF FIXING THE ENDS

Abstract: *This article presents the equation of the transverse oscillation of the rod. Deviations of the axis points of the rod with transverse vibrations occur in the same plane. The basic assumptions and the equation of transverse oscillations of a straight rod are shown. The oscillations of a homogeneous rod hinged at the ends are considered.*

Key words: *vibrations of the rod, transverse vibrations of the transverse rod, the equation of transverse vibrations of the straight rod.*

Language: *Russian*

Citation: Zhakash, A. T., Dzhakashova, E. A., & Tursynbay, O. M. (2019). Vibrations of the rod with different ways of fixing the ends. *ISJ Theoretical & Applied Science, 07 (75),* 60-63.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-07-75-12 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2019.07.75.12

Classifiers: *Applied mathematics. Mathematical modeling.*

КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ КРЕПЛЕНИЯ КОНЦОВ

Аннотация: *В данной статье приведено уравнение поперечного колебания стержня. Отклонения точек оси стержня при поперечных колебаниях происходят в одной плоскости. Показаны основные допущения и уравнение поперечных колебаний прямого стержня. Рассмотрено колебания однородного стержня, шарнирно опертого по концам.*

Ключевые слова: *колебания стержня, поперечные колебания поперечного стержня, уравнение поперечных колебаний прямого стержня.*

Введение

При выводе уравнения поперечных колебаний стержня мы будем предполагать, что в недеформированном состоянии так называемая упругая ось стрежня прямолинейна и совпадает с линией центорв тяжести поперечных сечений стрежня. Эту прямолинейную ось мы примем за координатную ось x и от нее будем отсчитывать отклонения элементов стержня при поперечных колебаниях. Далее мы предполагаем, что отклонения точек оси стержня при поперечных колебаниях происходят в одной плоскости. [1] При таких предположениях отклонения точек оси стержня при поперечных колебаниях однозначно определяются одной функцией двух переменных- координаты x и времени t:

$y = y(x, t).$

Эта функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных четвертого порядка, которое может быть построено следующим образом.

Кинетическая энергия колеблющегося стержня складывается из кинетической энергии поперчных смещений элементов стержня

$$T_1 = \frac{1}{2}\int_0^l \mu(x)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx\,; \qquad (1.1)$$

и кинетической энергии вращений элементов стержня вокруг осей, перпендикулярных к лоскости колебаний,

$$T_2 = \frac{1}{2}\int_0^l J_0(x)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right)^2 dx\,; \qquad (1.2)$$

Потенциальная энергия равна сумме трех слагаемых:

а) Потенциальная энергия упругой деформации (работа востанавливающих упругих сил)

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\int_0^l EJ\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 dx; \qquad (1.3)$$

б) потенциальной энергии прогиба от поперечной нагрузки *f (x, t)*

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\int_0^l f(x,t) y dx; \qquad (1.4)$$

в) потенциальная энергия растяжения от продольной силы *P (x, t).*

$$\Pi_3 = \frac{1}{2}\int_0^l P(x,t)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx. \qquad (1.5)$$

Функционал S Остроградского-Гамильтона имеет вид

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \left| \mu(x)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + J_0(x)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right)^2 - EJ\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + \ f(x,t)y + +P(x,t)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \right| dtdx. \quad (1.6)$$

Уравнение поперечных колебаний стержня мы получим, составив для функционала S уравнение Эйлера по формуле

$$\mu(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial y}{\partial x}\right) - f(x,t)y + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(J_0\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right) = 0 \qquad (1.7)$$

Это линейное уравнение четвертого поряка, составленное при самых общих предположениях относительно действующих на стержень сил, жесткости распеределения массы.

В стержнях, длина которых значительно превосходит поперечные размеры, можно пренебречь инерцией вращения и опустить в левой части уравнения (1.7) последний член.

Положив *f (x, t)*= 0 и *p (x, t)=0,* мы рассмотрим сначала свободные колебания однородного стержня с постоянными жесткостью *EJ* и погонной массой μ. Для таких колебаний уравнение (1.7) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \text{ где } c = \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}. \qquad (1.8)$$

Колебания однородного стержня, шарнирно опертного по концам. В этом случае инетграл, удовлетворяющий условиям на левом конце ϕ(0)=ϕ"(0) = 0, должен содержать функции, обращающиеся для x=0 в нуль вместе со своими вторыми производными.

$$\varphi(x) = BT(kx) + DV(kx). \qquad (1.9)$$

Постоянные B и D найдутся из условий на правом конце (x=l). Если этот конец также шарнирно оперт, то

$$\varphi(l) = BT(kl) + DV(kl) = 0,$$
$$\varphi''(l) = k^2[BV(kl) + DT(kl)] = 0,$$

Откуда

$$T^2(kl) - V^2(kl) = 0.$$

В элементарных функциях

$$sinkl = 0.$$

Это уравнение и является для рассматриваемого случая урвнением частот. Из него находим $k_i l = i_\pi (i = 1,2,3,\ldots,)$ так как

$$k_i^4 = \frac{\mu p_i^2}{EJ},$$

то

$$p_i = k_i^2\sqrt{\frac{EJ}{\mu}} = \frac{i^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\mu}}(i = 1,2,3,\ldots,) \qquad (1.10)$$

Таковы собственные частоты системы. Для собственных форм получаем уравнения

$$\varphi_i(x) = B_i sin\frac{i\pi x}{l}(i = 1,2,3,\ldots,). \qquad (1.11)$$

Первые три собственные формы представленны на рисунке 1. Общее решение имеет вид

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}(M_i cosp_i t + N_i sinp_i t) sin\frac{i\pi x}{l}, \quad (1.12)$$

где постоянные M_i, N_i находятся известным образом из начальных условий.

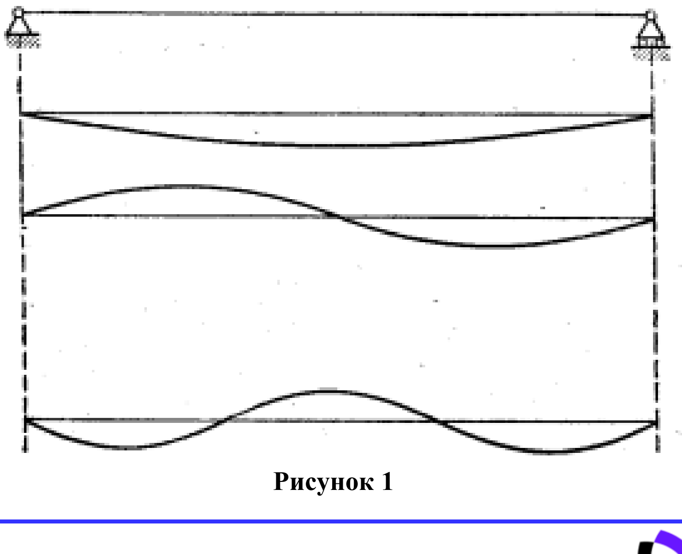


Рисунок 1

б) Колебания стержня, жестко закрепленного концом x=0 и свободного на конце x=l. Краевые условия в этом случае

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0,$$
$$\varphi''(l) = \varphi'''(l) = 0.$$

Интеграл уравнения, удовлетворяющий условиям на конце x=0, имеет вид

$$\varphi(x) = CU(kx) + DV(kx).$$

Условия на конце x=l выражаются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} CS(kl) + DT(kl) = 0,\\ CV(kl) + DS(kl) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1.13)$$

Откуда

$S^2 - TV = 0$ или $\mathrm{ch}kl\cos kl + 1 = 0.$

По таблицам находим первые четыре корня уравнения

kl=1,875; 4,694; 7,855; 10,996.

Для первых четырех собственных частот получаем по формуле

$$p_1 = \frac{(1{,}875)^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\mu}}, p_2 = \frac{(4{,}694)^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\mu}},$$

$$p_3 = \frac{(7{,}855)^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\mu}}, p_4 = \frac{(10{,}996)^2}{l^2}.$$

Уравнение ***i***-той собственной формы составляем следующим образом. Из первого или второго уравнения (1.13) находим, подставив туда $k_i l$

$$\frac{D}{C} = -\frac{S(k_i l)}{T(k_i l)} = -\frac{V(k_i l)}{S(k_i l)}$$

Подставив это значение в уравнение получим

$$\varphi_i(x) = C\left[U(k_i x) - \frac{S(k_i l)}{T(k_i l)}V(k_i x)\right] = C\left[U(k_i x) - \frac{V(k_i l)}{S(k_i l)}V(k_i x)\right]. \quad (1.14)$$

На рисунке 2 представлены первые три формы

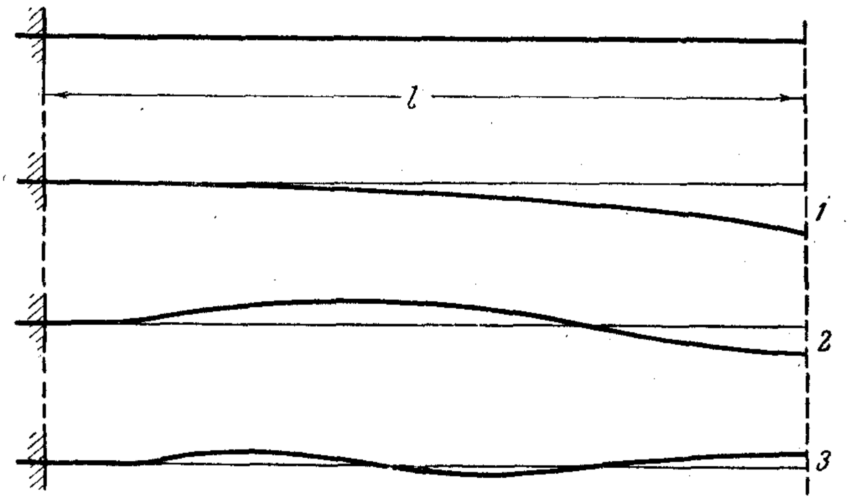
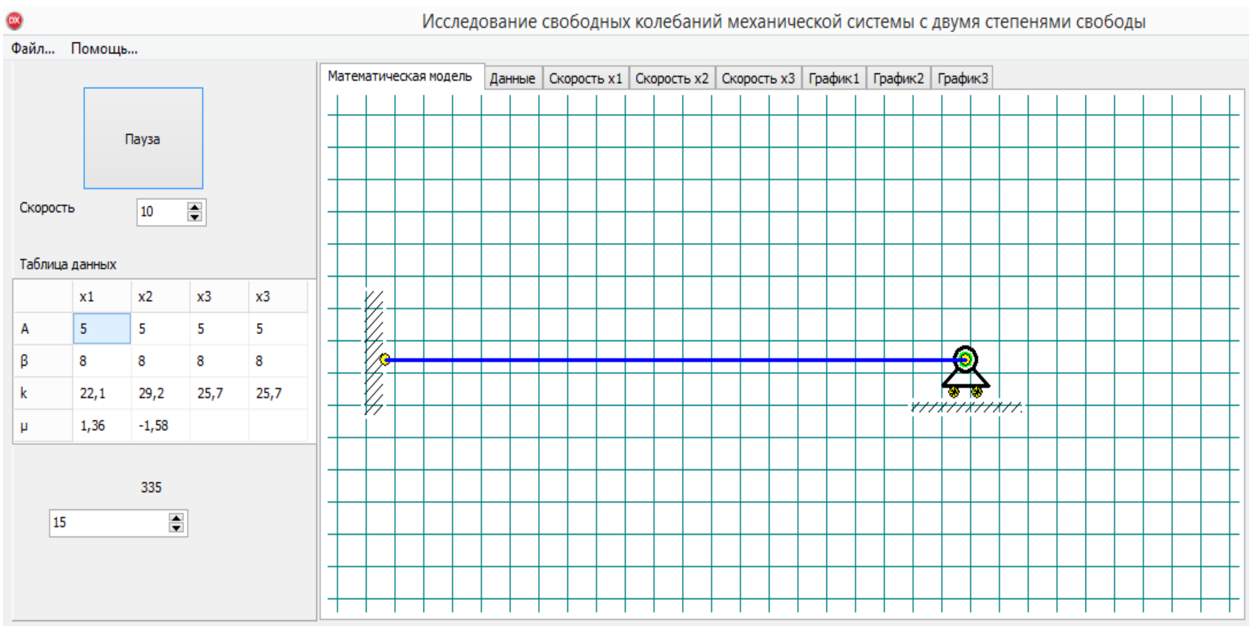
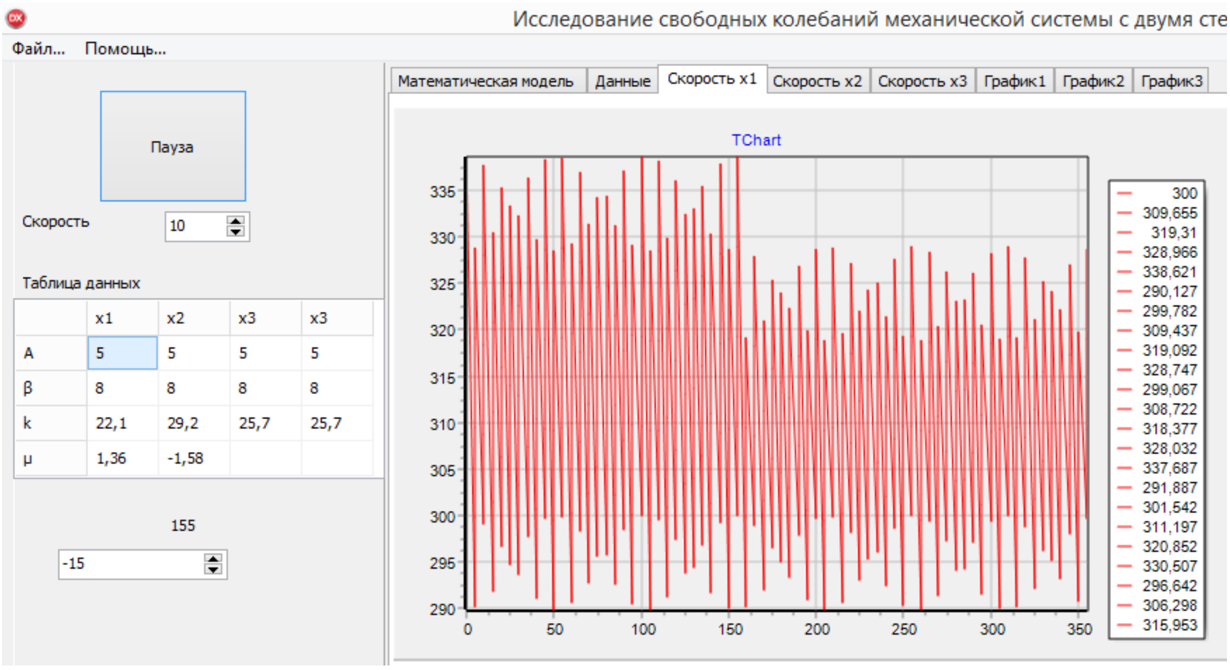


Рисунок 2





References:

1. Babakov, I. M. (1968). *Teoriya kolebaniya*. (p.58). Moscow: Nauka.
2. Bogolyubov, N. N., & Metropol'skiy, Y. A. (1990). *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy*. Moscow: Fizmatgiz.
3. Svetlitskiy, V. A. (2001). *Mekhanika absolyutno gibkikh sterzhney*. Pod red. A.Yu. Ishlinskogo (Eds.). Moscow: Izd-vo MAI.
4. Starzhenskiy, I. A. (1972). *Differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsentami i ikh prilozheniya*. (p.720). Moscow: Nauka.
5. Malkin, I. G. (1956). *Nekotorye zadachi teorii nelineynykh kolebaniy*. (p.172). Moscow: Gostekhizdat.
6. Mitropol'seiy, Y. A. (1964). *Problemy asimptoticheskoy teorii nestatsionarnykh kolebaniy*. (p.158). Moscow: Nauka.
7. Blekhman, I. I. (1971). *Sinkhronizatsiya dinamicheskikh system*. Nauka.
8. Babanov, I. M. (1968). *Teoriya kolebaniy*. (p.47). Nauka.
9. Kryukov, B. I. (1987). *Dinamika sushchestv nelineynykh sistem*. Moscow.
10. Dorodnitsyn, A. A. (1977). Asimptoticheskoe povedenie resheniya uravneniya Van-der-Polya. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, p.379.