Nueva teoría sobre la distribución de los números primos

New theory about the prime numbers distribution

Luis Alberto Ramírez Castellanos

Universidad Nacional Abierta y a Distancia, UNAD

Recibido: 23/04/2017 • Aprobado: 05/24/2017

Resumen

Durante mucho tiempo se ha buscado la explicación a la distribución de los números primos en los números naturales aparentemente aleatoria. A continuación, se desarrolla un hermoso estudio para explicar esta distribución, basados en la definición del concepto de sistema de distribución, con el cual se comprenden las distancias que separan a cada número primo, y en estos sistemas de distribución, estas distancias tiene un patrón que se repite, llamado secuencia de distribución, cuyo valor es igual al primordial. También se explica el defecto de secuencia para no caer en cálculos erróneos en la determinación de números primos. Así, mediante varios teoremas se explican importantes temas, como ejemplo, por qué no todos los números de Euclides de la forma P_n#+1 (donde P_n# es el primorial) son primos, y se da otra demostración del postulado de Bertrand. Así, con esta teoría se resuelve el misterio de la distribución, aparentemente caótica, de los números primos, demostrando que siguen un sistema de distribución bien claro. .

Palabras clave: *bloque de secuencia, distancias de distribución, defecto de secuencia, factorial, frecuencia de distribución, primordial, producto de fusión, producto de fusión de defecto de secuencia, simetría secuencial, sistemas de distribución secuencia de distribución.*

Abstract

The explanation of the apparently random prime numbers distribution in the natural numbers has been sought for a long time. Below is a beautiful study to explain this distribution, in which each prime number determines a distribution system, the distances that separate each prime number are understood, and in this systems, these distances have a pattern that is repeated, called sequence of distribution, and its value is equal to the primordial. The defect of sequence also is explained to not fall in wrong calculations in the determination of prime numbers; so important themes are explained in various theorems, as an example, why not all Euclid numbers with the form P_n#+1 are prime numbers, is explained, and another proof of the Bertran's postulate is given. Thus, with this theory, the apparently chaotic prime numbers distribution is solved, demonstrating that this follows a clearly distribution system.

Key words: *block of sequence, distribution defect, distribution distances, distribution frequency, distribution sequence, factorial, fusion product, fusion product of defect sequence, primorial, sequential symmetry.*

laramirezcaste@unadvirtual.edu.co http://orcid.org/0000-0001-5979-566X

Preliminares

1.1. Descomposición del factorial

A continuación en la Tabla 1 se descompone n! en factores primos, con n tomando valores de 1 a 53, aunque la factorización puede continuar infinitamente para todo valor de :

Tabla 1
Descomposición del factorial

1!=1
2!=2
3!=2X3
4!=2^{3}X3
5!=2^{3}X3X5
6!=2^{4}X3^{2}X5
7!=2^{4}X3^{2}X5X7
8!=2^{7}X3^{2}X5X7
9!=2^{7}X3^{4}X5X7
10!=2^{8}X3^{4}X5^{2}X7
11!=2^{8}X3^{4}X5^{2}X7X11
12!=2^{10}X3^{5}X5^{2}X7X11
13!=2^{10}X3^{5}X5^{2}X7X11X13
14!=2^{11}X3^{5}X5^{2}X7^{2}X11X13
15!=2^{11}X3^{6}X5^{3}X7^{2}X11X13
16!=2^{15}X3^{6}X5^{3}X7^{2}X11X13
17!=2^{15}X3^{6}X5^{3}X7^{2}X11X13X17
18!=2^{16}X3^{8}X5^{3}X7^{2}X11X13X17
19!=2^{16}X3^{8}X5^{3}X7^{2}X11X13X17X19
20!=2^{18}X3^{8}X5^{4}X7^{2}X11X13X17X19
21!=2^{18}X3^{9}X5^{4}X7^{3}X11X13X17X19
22!=2^{19}X3^{9}X5^{4}X7^{3}X11^{2}X13X17X19
23!=2^{19}X3^{9}X5^{4}X7^{3}X11^{2}X13X17X19X23
24!=2^{22}X3^{10}X5^{4}X7^{3}X11^{2}X13X17X19X23
25!=2^{22}X3^{10}X5^{6}X7^{3}X11^{2}X13X17X19X23
26!=2^{23}X3^{10}X5^{6}X7^{3}X11^{2}X13^{2}X17X19X23
27!=2^{23}X3^{13}X5^{6}X7^{3}X11^{2}X13^{2}X17X19X23
28!=2^{25}X3^{13}X5^{6}X7^{4}X11^{2}X13^{2}X17X19X23
29!=2^{25}X3^{13}X5^{6}X7^{4}X11^{2}X13^{2}X17X19X23X29
30!=2^{26}X3^{14}X5^{7}X7^{4}X11^{2}X13^{2}X17X19X23X29
31!=2^{26}X3^{14}X5^{7}X7^{4}X11^{2}X13^{2}X17X19X23X29X31
32!=2^{31}X3^{14}X5^{7}X7^{4}X11^{2}X13^{2}X17X19X23X29X31
33!=2^{31}X3^{15}X5^{7}X7^{4}X11^{3}X13^{2}X17X19X23X29X31
34!=2^{32}X3^{15}X5^{7}X7^{4}X11^{3}X13^{2}X17^{2}X19X23X29X31
35!=2^{32}X3^{15}X5^{8}X7^{5}X11^{3}X13^{2}X17^{2}X19X23X29X31
36!=2^{34}X3^{17}X5^{8}X7^{5}X11^{3}X13^{2}X17^{2}X19X23X29X31
37!=2^{34}X3^{17}X5^{8}X7^{5}X11^{3}X13^{2}X17^{2}X19X23X29X31X37
38!=2^{35}X3^{17}X5^{8}X7^{5}X11^{3}X13^{2}X17^{2}X19^{2}X23X29X31X37
39!=2^{35}X3^{18}X5^{8}X7^{5}X11^{3}X13^{3}X17^{2}X19^{2}X23X29X31X37
40!=2^{38}X3^{18}X5^{9}X7^{5}X11^{3}X13^{3}X17^{2}X19^{2}X23X29X31X37
41!=2^{38}X3^{18}X5^{9}X7^{5}X11^{3}X13^{3}X17^{2}X19^{2}X23X29X31X37X41
42!=2^{39}X3^{19}X5^{9}X7^{6}X11^{3}X13^{3}X17^{2}X19^{2}X23X29X31X37X41
43!=2^{39}X3^{19}X5^{9}X7^{6}X11^{3}X13^{3}X17^{2}X19^{2}X23X29X31X37X41X43
44!=2^{41}X3^{19}X5^{9}X7^{6}X11^{4}X13^{3}X17^{2}X19^{2}X23X29X31X37X41X43
45!=2^{41}X3^{21}X5^{10}X7^{6}X11^{4}X13^{3}X17^{2}X19^{2}X23X29X31X37X41X43
46!=2^{42}X3^{21}X5^{10}X7^{6}X11^{4}X13^{3}X17^{2}X19^{2}X23^{2}X29X31X37X41X43
47!=2^{42}X3^{21}X5^{10}X7^{6}X11^{4}X13^{3}X17^{2}X19^{2}X23^{2}X29X31X37X41X43X47
48!=2^{46}X3^{22}X5^{10}X7^{6}X11^{4}X13^{3}X17^{2}X19^{2}X23^{2}X29X31X37X41X43X47
49!=2^{46}X3^{22}X5^{10}X7^{8}X11^{4}X13^{3}X17^{2}X19^{2}X23^{2}X29X31X37X41X43X47
50!=2^{47}X3^{22}X5^{12}X7^{8}X11^{4}X13^{3}X17^{2}X19^{2}X23^{2}X29X31X37X41X43X47
51!=2^{47}X3^{23}X5^{12}X7^{8}X11^{4}X13^{3}X17^{3}X19^{2}X23^{2}X29X31X37X41X43X47
52!=2^{49}X3^{23}X5^{12}X7^{8}X11^{4}X13^{4}X17^{3}X19^{2}X23^{2}X29X31X37X41X43X47
53!=2^{49}X3^{23}X5^{12}X7^{8}X11^{4}X13^{4}X17^{3}X19^{2}X23^{2}X29X31X37X41X43X47X53

Con la descomposición de n! en sus factores primos, se puede notar ciertas características en los cambios de los exponentes de cada factor primo, una de ellas es que en la descomposición del factorial aparece un nuevo número primo cada vez que los exponentes de los números primos ya encontrados como factores, coinciden en no cambiar. Esta característica se puede expresar de la siguiente manera:

considérese a

$n! = 2^{a_1} * 3^{a_2} * 5^{a_3} * 7^{a_4} * 11^{a_5} * \ldots * P_n^{a_i}$,

siendo $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i \in N a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i \in N$ (con $i = 1,2, \ldots, N i = 1,2, \ldots, N$) los exponentes de los factores primos del factorial $n!$, y si en $(n+1)!(n+1)!$, ninguno de estos exponentes cambia, entonces aparece un nuevo número primo en su descomposición, de manera que $(n+1)! = 2^{a_1} * 3^{a_2} * 5^{a_3} * 7^{a_4} * 11^{a_5} * \ldots * P_n^{a_i} * P_{n+1}$ $(n+1)! = 2^{a_1} * 3^{a_2} * 5^{a_3} * 7^{a_4} * 11^{a_5} * \ldots * P_n^{a_i} * P_{n+1}$.

1.2. Cambio de los exponentes de los factores primos del factorial

Si se analizan los exponentes de los factores primos, también se observará otra característica importante, y es el hecho de que en los cambios o aumentos de los valores de los exponentes se presentan diferentes distancias.

Teorema 1.2.1. *Cada exponente del número primo P se repite cada P veces al ir aumentando el valor de n en n!.*

Demostración. Sea tal $P = P_n P = P_n$ un factor primo de n!, con exponente $a_i a_i$, así:

$n! = 2^{a_1} * 3^{a_2} * 5^{a_3} * 7^{a_4} * 11^{a_5} * \ldots * P_n^{a_i}$,
de manera que
$(n + \gamma P_n)! = 2^{a_1} * 3^{a_2} * 5^{a_3} * 7^{a_4} * 11^{a_5} * \ldots * P_n^{\gamma a_i}$
$(n + \gamma P_n)! = 2^{a_1} * 3^{a_2} * 5^{a_3} * 7^{a_4} * 11^{a_5} * \ldots * P_n^{\gamma a_i}$
con $\gamma \in N \gamma \in N$.

Ahora para simplificar los cálculos y eliminar estas repeticiones, al enésimo exponente n de P que se desea hallar se le suma un valor $\tau = \tau =$0, 1, 2,3,……, (P-1) para que dé como resultado el múltiplo de P siguiente,

para que P| $(n+\tau) n+\tau)$, este resultado se llamará $n_1 = \frac{n+\tau}{P} n_1 = \frac{n+\tau}{P}$.

Teorema 1.2.2. *La diferencia de los exponentes del factor P de n!, se llama D, y aumentan su valor, y aparecen entre $n_1 n_1$ y $(n_1 + 1(n_1 + 1)$, cada $P^{D-1} N = n_1$ $P^{D-1} N = n_1$, donde NN son los números no múltiplos de P.*

Demostración. Si NN es múltiplo de P, es porque se aumenta D. sea así D=1, esta distancia aparece cada $N = P^0 NN = P^0 N$, y si a NN se le da el valor de un múltiplo de P, de manera que $N = PKN = PK$, entonces $P^0 PK = PNP^0 PK = PN$ y se crea D=2 que aparece cada $P^1 NP^1 N$, y si a NN se le da el valor de un múltiplo de P, de manera que $P^1 N = P^1 PK = P^2 N$ $P^1 N = P^1 PK = P^2 N$ y se crea D=3, así D aparece cada $P^{D-1} NP^{D-1} N$.

Teorema 1.2.3. *Sea $n_1 = en_1 = e$ y $n_1 + 1 = e + Dn_1 + 1 = e + D$ de P, así el máximo exponente de P en la descomposición del factorial nunca llegará a tener un valor de la forma $e + D_I e + D_I$, con $1 \leq D_I < D1 \leq D_I < D$.*

Demostración. Sea ee el máximo exponente de P en n!, ahora supóngase que n+1=PD, de manera que el máximo exponente de P en (n+1)! es $e + De + D$, ahora sea $f_1 f_1$ el máximo exponente de P en (n-k)!, con $1 \leq k < n1 \leq k < n$, de manera que $f_1 \leq ef_1 \leq e$. Ahora sea $f_2 f_2$ el máximo exponente de P en (n+k)!, con k>1, de manera que$f_2 \geq e + Df_2 \geq e + D$, así que es imposible que exista un exponente máximo para P de la forma $e + D_I e + D_I$, con $1 \leq D_I < D$ $1 \leq D_I < D$.

"Para x real, el símbolo [x] denota el máximo entero menor o igual a x". (Niven & Zukcerman 1969, 75).

El siguiente *Teorema* es similar a: “supóngase que P denota un número primo. Entonces el mayor exponente e tal que Pe |n! es $e = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]e = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$.” (Niven & Zukcerman 1969, 88).

Teorema 1.2.4. *El enésimo exponente n del número primo P en la factorizacion de n!* es:

$$n = \sum_{D=1}^{j} DV_D$$

Tal que $V_j > 0V_j > 0$ *y* $V_{j+1} = 0V_{j+1} = 0$.

Donde $D\neq 0 \neq 0$ *son las distancias de los exponentes que van tomando el valor de los números naturales 1, 2, 3,4,……*

Y donde VD=

$$\begin{cases} \left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right] - \left[\frac{\left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right]}{P}\right] si \left(\frac{n_1}{P^{D-1}}\right) \notin Z \\ \left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right] - \left[\frac{\left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right]}{P}\right] - 1 si \left(\frac{n_1}{P^{D-1}}\right) \in (+Z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right] - \left[\frac{\left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right]}{P}\right] si \left(\frac{n_1}{P^{D-1}}\right) \notin Z \\ \left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right] - \left[\frac{\left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right]}{P}\right] - 1 si \left(\frac{n_1}{P^{D-1}}\right) \in (+Z) \end{cases} \qquad \mathbf{(1)}$$

Demostración. Bien, sea VD las veces que aparece D en $n_1 n_1$, para saber esto se hace $\left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right]\left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right]$, pero a este valor hay que quitarle los múltiplos de P en que no aparece D, así $\left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right] - \left[\frac{\left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right]}{P}\right]\left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right] - \left[\frac{\left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right]}{P}\right]$, pero si $\left(\frac{n_1}{P^{D-1}}\right)\left(\frac{n_1}{P^{D-1}}\right)$ da como resultado un número entero, es porque $n_1 = KP^{D-1}n_1 = KP^{D-1}$, entonces a la expresión: $\left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right] - \left[\frac{\left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right]}{P}\right]\left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right] - \left[\frac{\left[\frac{n_1}{P^{D-1}}\right]}{P}\right]$ se le resta 1, ya que las distancias aparecen entre $n_1 n_1$ y $(n_1 + 1(n_1 + 1)$.

A continuación, se multiplican los resultados VD con sus distancias correspondientes, y se suman los resultados entre sí, y esto da el valor del enésimo exponente buscado.

Esto se expresa con la siguiente formula:

$$n = \sum_{D=1}^{j} DV_D$$

Tal que $V_j > 0V_j > 0$ y $V_{j+1} = 0V_{j+1} = 0$.

Ejemplo 1.2.1. Se hallará el n=49º exponente de 2.

Tabla 2
Cambio de los exponentes del número primo dos

N_1	Exponentes de 2	Distancias			
1	0				
2	1				
		2			
3	3				
4	4				
			3		
5	7				
6	8				
		2			
7	10				
8	11				
				4	
9	15				
10	16				
		2			
11	18				
12	19				
			3		
13	22				
14	23				
		2			
15	25				
16	26				
					5
17	31				

Observando los exponentes en la tabla, en estos se van presentando diferentes distancias: 2, 3, 4,5,…

Para no tener en cuenta la repetición de cada exponente, entonces: n1= (49º+1)/2=25º

Conociendo que el enésimo exponente buscado es el 25º sin repetición, se utiliza la fórmula **(1)**:

V_1=12
V_2=6
V_3=3
V_4=2
V_5=1
V_6=:0

Como V6= 0= 0, solo se usaran las distancias 1, 2, 3, 4 y 5.

Ahora los anteriores resultados se multiplican con sus distancias correspondientes, y los resultados se suman entre sí:

12*1= 12
6*2= 12
3*3= 9
2*4= 8
1*5= 5
12+12+9+8+5=46 es el n=49º exponente de 2.

2. Sistemas de distribución

Considérese la siguiente tabla:

Tabla 3
Frecuencias de distribución

N	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
1									
2	-								
3	-	-							
4	F_1	-							
5	-	-	-						
6	F_1	F_2	-						
7	-	-	-	-					
8	F_1	-	-	-					
9	-	F_2	-	-					
10	F_1	-	F_3	-					
11	-	-	-	-	-				
12	F_1	F_2	-	-	-				
13	-	-	-	-	-	-			
14	F_1	-	-	F_4	-	-			
15	-	F_2	F_3	-	-	-			
16	F_1	-	-	-	-	-			
17	-	-	-	-	-	-	-		
18	F_1	F_2	-	-	-	-	-		
19	-	-	-	-	-	-	-	-	
20	F_1	-	F_3	-	-	-	-	-	
21	-	F_2	-	F_4	-	-	-	-	
22	F_1	-	-	-	F_5	-	-	-	
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	F_1	F_2	-	-	-	-	-	-	-
25	-	-	F_3	-	-	-	-	-	-
26	F_1	-	-	-	-	F_6	-	-	-
27	-	F_2	-	-	-	-	-	-	-
28	F_1	-	-	F_4	-	-	-	-	-
29	-	-	-	-	-	-	-	-	-
30	F_1	F_2	F_3	-	-	-	-	-	-
31	-	-	-	-	-	-	-	-	-
32	F_1	-	-	-	-	-	-	-	-
33	-	F_2	-	-	F_5	-	-	-	-
34	F_1	-	-	-	-	-	F_7	-	-
35	-	-	F_3	F_4	-	-	-	-	-
36	F_1	F_2	-	-	-	-	-	-	-

N	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
37	-	-	-	-	-	-	-	-	-
38	F_1	-	-	-	-	-	-	F_8	-
39	-	F_2	-	-	-	F_6	-	-	-
40	F_1	-	F_3	-	-	-	-	-	-
41	-	-	-	-	-	-	-	-	-
42	F_1	F_2	-	F_4	-	-	-	-	-
43	-	-	-	-	-	-	-	-	-
44	F_1	-	-	-	F_5	-	-	-	-
45	-	F_2	F_3	-	-	-	-	-	-
46	F_1	-	-	-	-	-	-	-	F_9

La anterior tabla puede continuar indefinidamente horizontal y verticalmente, y los números primos aparecen en las filas coloreadas en azul**.**

Demostración 2.1. *Se llamará* frecuencia de distribución Fn *de cada primo* $P_n P_n$, *a los múltiplos de cada primo, es decir que las frecuencias son distintas para cada primo, así por ejemplo, la frecuencia* **F1** *de 2 aparece cada 2 números desde 2, la frecuencia* **F2** *de 3 aparece cada 3 números a partir de 3, y así sucesivamente. A medida que se van determinando números primos, se van estableciendo nuevas frecuencias, y la aparición de cada frecuencia determinara los sistemas de distribución.*

Demostración 2.2. *Se llamará* sistemas de distribución Sn *de cada número primo* n*, a las distancias* Dk *secuenciales que determinaran la aparición de los números primos, construidos por las frecuencias de los números primos ya encontrados.*

Demostración 2.3. *Sea* Dk *las* distancias de distribución *de un sistema Sn, cuyos valores son determinados por las diferencias de los números en los que no hay presencia de frecuencias, es decir, los números primos determinados por Sn, de manera que las distancias son las que determinan números primos en Sn..*

Anteriormente se observó que en la descomposición del factorial aparecía un nuevo número primo cuando en ningún primo de la descomposición cambiaban sus exponente. Ahora este fenómeno aplica de forma similar en la anterior tabla, en donde aparece un nuevo número primo cuando no aparece ninguna frecuencia en las filas.

A continuación, se construirá la tabla de frecuencias de distribución por partes con el primer número primo, así:

Tabla 4

Frecuencia de P_1=2

N	P_1=2
1	
2	-
3	-
4	F_1
5	-
6	F_1
7	-
8	F_1
9	-
10	F_1
11	-
12	F_1
13	-
14	F_1
15	-
16	F_1
17	-
18	F_1
19	-
20	F_1

El primer número primo es $P_1=2$, cuya frecuencia es $F_1=2$ a partir de 2. Así con el 2 y su frecuencia se construye el primer sistema de distribución S1.

Ahora imagínese que este sistema es el único, de manera que a partir de 2, los siguientes números primos serán aquellos números que no estén en la frecuencia, los cuales son: 3,5,7,9,11,…., es decir, los números impares, así se construye el primer sistema de distribución, que empieza a funcionar desde el siguiente número primo de 2, es decir, 3, que es el primer número que está antes de su primer frecuencia o su primer múltiplo 4, y así 3 es el siguiente número primo, esto quiere decir que con S1=2-2-2-2-2-2-…. los siguientes primos aparecerán cada dos números a partir de 3. Así, a partir de tres, los números primos serán: 3+2=5+2=7+2=9+2=11+2=13+2=……… (es evidente que 9 no es un número primo, este error será explicado con la Demostración del defecto de secuencia).

Ahora constrúyase la tabla de frecuencias de distribución con los números primos 2 y 3:

Tabla 5
Frecuencias de $P_1=2$ Y $P_2=3$

N	$P_1=2$	$P_2=3$
1		
2	-	
3	-	-
4	F_1	-
5	-	-
6	F_1	F_2
7	-	-
8	F_1	-
9	-	F_2
10	F_1	-
11	-	-
12	F_1	F_2
13	-	-
14	F_1	-
15	-	F_2
16	F_1	-
17	-	-
18	F_1	F_2
19	-	-
20	F_1	-
21	-	F_2
22	F_1	-
23	-	-

Aquí aparecen dos frecuencias, $F_1=2$ y $F_2=3$, imagínese que solo existen estas dos frecuencias, y con ellas se construye el segundo sistema de distribución S2=2-4-2-4-2-4-2-4-… esto quiere decir que con S2, que empieza a funcionar a partir del siguiente número primo del primo hasta donde se construyó el sistema, es decir el siguiente de 3 que es 5, los siguientes números primos aparecerán con las siguientes distancias:2-4-2-4-2-4-2-4-…, así por ejemplo a partir de 5 los números primos siguientes serán: 5+2=7+4=11+2=13+4=17+2=19+4=23+2=25+4=29+2=…

Hay que aclarar que los sistemas cambian con cada primo que se encuentra.

Así, como se vio anteriormente, se pueden construir los sistemas S3, S4. S5, S6,…Sn.

Ahora encontrando las distancias presentes en cada sistema, se puede construir un cuadro como el siguiente (el cuadro puede continuar indefinidamente):

Tabla 6
Cuadro de las distancias de los sistemas de distribución

N	S_1	S_2	S_3	S_4	N	S_1	S_2	S_3	S_4	N	S_1	S_2	S_3	S_4	N	S_1	S_2	S_3	S_4	N	S_1	S_2	S_3	S_4	N	S_1	S_2	S_3	S_4
3	2				41	2	2	2	2	79	2				113	2	2			149	2	2	2	2	187	2			
5					43							4	4	4						151							4	4	4
5	2	2			43	2					2					2		6		151	2					2			
7							4	4	4	83							4		8			4			191				
7	2					2				83	2	2				2					2		6	6	191	2	2	2	2
		4	4		47																				193				
	2				47	2	2	2			2		6	6		2	2	2			2	2			193	2			
11												4			121					157							4	4	4
11	2	2	2	2		2			6		2				121	2				157	2					2			
13							4	4		89							4					4	4		197				
13	2					2				89	2	2	2			2		6	6		2			6	197	2	2	2	2
		4	4	4	53																				199				
	2				53	2	2				2					2	2				2	2	2		199	2			
17												4		8	127					163							4	4	
17	2	2	2	2		2		6	6		2				127	2				163	2					2			
19							4										4	4	4			4	4	4					
19	2					2					2	2				2					2					2	2		10
		4	4	4	59					97					131					167									
	2				59	2	2	2	2	97	2				131	2	2	2		167	2	2	2	2		2		6	
23					61							4	4	4						169							4		
23	2	2			61	2					2					2			6	169	2					2			
							4			101							4	4				4	4	4	209				
	2		6	6		2		6	6	101	2	2	2	2		2					2				209	2	2	2	2
		4								103					137					173					211				
	2					2	2			103	2				137	2	2	2	2	173	2	2			211	2			
29					67							4	4	4	139												4		
29	2	2	2	2	67	2					2				139	2					2		6	6		2		6	
31							4	4	4	107							4	4	4			4							
31	2					2				107	2	2	2	2		2					2					2	2		10
		4			71					109					143					179									
	2		6	6	71	2	2	2	2	109	2				143	2	2			179	2	2	2	2		2			
					73							4	4	4						181							4	4	
	2	2			73	2					2					2		6	6	181	2				221	2			
37							4	4		113							4					4			221				
37	2					2										2					2								
									6						149								6	6					
		4	4	4																									
	2					2	2	2													2	2							
41					79															187									

El cuadro anterior solo se hizo hasta S4 donde P_4=7, y como S_4 funciona bien hasta el cuadrado de P_5=11, es decir que desde 121 empiezan a aparecer también números compuestos como 121, 143, 169, 187, 209, 221,…, pero si el cuadro de las distancias de los sistemas de distribución se completa hasta S_n, se perfecciona.

Demostración 2.4. *Se llamará* secuencia de distribución C_n *(coloreado en azul para la columna de cada sistema Sn de la Tabla 2.4) al patrón de distancias de* S_n *que se repite, así por ejemplo, las secuencias:*
C1∈∈ S1 =2
C2∈∈ S2 =2+4=6
C3∈∈ S3 =4+2+4+2+4+6+2+6=30
C4∈∈S4=2+4+2+4+6+2+6+4+2+4+6+6+2+6+4+2+6+4+6+8+4+2+4+2+4+8+6+4+6+2+4+6+2+6+6+4+2+4+6+2+6+4+2+4+2+10+2+10= 210
Y así sucesivamente.

La razón de que en los sistemas hayan secuencias que se repiten, es porque en la determinación de las distancias de tal sistema, llegará el momento en que la primera frecuencia en las distancias del sistema coincidirá de nuevo en ubicación, como al inicio, con respecto a las frecuencias de las distancias de los sistemas anteriores, así por ejemplo, en la Tabla 2.1, en P_3=5, la primera frecuencia que aparece está ubicada en el número 10 (por ser el primer factor de 5), que coincide en ubicación horizontal con una frecuencia de S1 también en 10 (por ser un factor de 2) y justo en la fila de arriba, en el número 9, aparece una frecuencia de S2 (por ser 9 un factor de 3) y estas frecuencias están entre los primos 7 y 11, cuya distancia es 4, que es la primera distancia en C3, como se muestra en la Tabla 2.5:

Tabla 7
Sección de la tabla de frecuencias de distribución entre los números primos 7 y 11

7	-	-	-	-	
8	**F_1**	-	-	-	
9	-	**F_2**	-	-	
10	**F_1**	-	**F_3**	-	
11	-	-	-	-	-

Así:
S_1, P_1=2, F_1 está en 10
S_2, P_2=3, F_2 está en 9
S_3, P_3=5, F_3 está en 10

Ahora el lugar siguiente donde se vuelve a repetir esta misma ubicación de las frecuencias es**:**

Tabla 8
Sección de la tabla de frecuencias de distribución entre los números primos 37 y 41

37	-	-	-	-	-
38	**F_1**	-	-	-	-
39	-	**F_2**	-	-	-
40	**F_1**	-	**F_3**	-	-
41	-	-	-	-	-

Así:
S_1, P_1=2, F_1 está en 40
S_2, P_2=3, F_2 está en 39
S_3, P_3=5, F_3 está en 40

Y estos valores están entre los números primos 37 y 41, cuya diferencia es 4 que es el primer valor de la segunda aparición de la secuencia C_3.

Teorema 2.1. *Las distancias* D_k∈∈ C_n *del sistema Sn construido hasta* P_n*, se empiezan a sumar desde* P_{n+1}.

Demostración 2.5. Ya se sabe que en Sn el patrón de C_n se vuelve a repetir, y las distancias Dk∈∈C_n del sistema S_n se empiezan a sumar desde P_{n+1}, y no desde P_n, porque la distancia D_0= P_{n+1} - P_n pertenece al sistema S_{n-1} ya que en adelante en Sn no se presentaran múltiplos de P_n como primos, así cuando se repita C_n, el primer primo que inicie esta repetición que será igual a P_k =x(C_n)+ P_{n+1}, donde x va tomando valores tal que x ∈∈ N, no tendrá antes un múltiplo de P_n a una distancia D_0.

Teorema 2.2. *El valor de la suma de las distancias de las secuencias de cada sistema coincide con el valor del producto de los primos con los que se construyó el sistema, es decir:*

$\sum_{k=1} D_k = C_n = P_n\#\sum_{k=1} D_k = C_n = P_n\#$
Donde $D_k \in D_k \in C_n$

Así por ejemplo, el sistema S_3 se construyó con los números primos 2, 3 y 5, ahora el producto (primorial: $P_n\#P_n\#$) 2*3*5 es =30, que coincide con el valor de la suma de las distancias de la secuencia C_3, así 4+2+4+2+4+6+2+6=30.

Demostración. La razón por la cual la suma de las distancias de la secuencia de un sistema coincide con el producto de los primos con los que se construyó el sistema, es porque tal producto determina en qué lugar, o cada cuanto, se volverá a repetir la ubicación inicial del sistema con respecto a los sistemas anteriores, es decir, cuando la ubicación de las frecuencias del sistema del último primo encontrado se alinean en la misma ubicación inicial con las frecuencias de los sistemas anteriores hasta S1, y esto se logra con el *m.c.m,* y como son primos, el *m.c.m*=$P_n\#P_n\#$, por ejemplo el *m.c.m* de 2,3 y 5 es 2*3*5=30 en S_3, y se representa lo anterior en la siguiente Tabla:

Tabla 9
Construcción del m.c.m. de 2, 3 y 5

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
F1=2	F1		F1		F1		F1		F1		F1		F1		F1		F1		F1		F1		F1		F1		F1		F1		F1
F2=3	F2			F2			F2			F2			F2			F2			F2			F2			F2			F2			F2
F3=5	F3					F3					F3					F3					F3					F3					F3

Nótese que en la anterior tabla las frecuencias de 2,3 y 5 coinciden en alineación en cero y en 30.

Así en la secuencia de S_2=2-4, sus distancias suman 2+4=6, que coincide en el producto de P_1*P_2 =2*3=6.

De esta manera se puede predecir que la suma de las distancias de la secuencia C4 de S4 es igual al producto $P_1*P_2*P_3*P_4$=2*3*5*7=210.

Teorema 2.3. *P_k - D0 es necesariamente un múltiplo de P_n.*

Demostración. P_k =x (C_n)+ P_{n+1}, por el *Teorema* 2.2. se sabe que $C_n = P_n\#C_n = P_n\#$, y P_{n+1} = P_n + D_0, de manera que:

P_k - D_0 =x(C_n)+ P_{n+1} - D_0 = x($P_n\#P_n\#$) + P_n + D_0 - D_0= x($P_n\#P_n\#$) + P_n, y evidentemente P_n | x($P_n\#P_n\#$) + P_n

Teorema 2.4. *El último número primo en cualquier repetición de C_n tiene la forma x(P_n#)+ P_n+1.*

Demostración. Por el *Teorema* 2.1. se sabe que las distancias $D_k \in\in C_n$ del sistema Sn construido hasta P_n, se empiezan a sumar desde P_{n+1}, es decir que los números primos determinados en Sn son el resultado de ir sumando a P_{n+1} cada distancia, pero la suma de estas distancias genera un patrón que se repite llamado xC_n, donde x es el número de su repetición, según la *Demostración* 2.4, así que el valor de la suma de las distancias hasta completas la secuencia más P_{n+1} es un número primo determinado por Sn, y como, según el *Teorema* 2.2. , $\sum_{k=1} D_k = C_n = P_n\#$ $\sum_{k=1} D_k = C_n = P_n\#$ Donde $D_k \in D_k \in C_n$ y $P_n\#$ $P_n\#$ es el primorial hasta $P_n P_n$, entonces el ultimo numero último número primo en cualquier repetición de C_n tiene la forma x(P_n#)+ P_{n+1}, donde x va tomando valores tal que x $\in\in$ N.

Teorema 2.5. *El número 1 no es un número primo.*

Demostración. En el estudio anterior se definieron los sistemas de distribución desde S_1, ahora considérese la existencia de S_0.

Recuérdese que los sistemas de distribución se construyen a partir de las frecuencias y distancias de distribución, considérese el sistema S_1 construido por el numero primo P_1=2, en este sistema la frecuencia F_1 son los múltiplos de P_1, es de decir, la multiplicación de 2 por todos los números naturales N>1, ya que si se multiplica por 1, el resultado sería que el mismo P_1 sería una frecuencia, lo que implicaría que P_1 no es primo ya que F≠P, lo que lleva a una contradicción, ya que $P_1 \in$P.

Ahora suponer la existencia de un sistema S_0, supone la existencia de un numero primo anterior a 2, y el único número natural diferente de cero anterior a 2 es 1, así P_0=1. Ahora para construir el S_0 se determinan sus frecuencias que serán los múltiplos de P_0=1, es decir el producto de P_0=1 con todos los números naturales mayores a 1, pero se sabe que todo número multiplicado por 1 da él mismo, lo que significa que las frecuencias F_0 son todos los números naturales mayores a 1, y como F_0≠P, esto quiere decir que, según S_0, no existirán más números primos a excepción de P_0=1, lo cual no es cierto, por ello el S_0 es inexistente, y P_0 no existe, de ahí se concluye que 1 no es primo.

Teorema 2.6. *Para S_n, x($P_n\#$) + 1 será un numero primo, y será el penúltimo número primo determinado por C_n.*

Demostración. Como en la Demostración del Teorema 2.1., llámese**:**

$D_0 = P_{n+1} - P_n$, $D_{-1} = P_{n+1} - P_{n-1}$, $D_{-2} = P_{n+1} - P_{n-2}$, $D_{-3} = P_{n+1} - P_{n-3}$,………, $D_{-j} = P_{n+1} - P_{n-j}$

Donde $P_{n-j} = P_1 = 2$
Así que $P_{n+1} = P_{n-j} + D_{-j}$
Recuérdese que $P_k = x(C_n) + P_{n+1}$ y:

$P_k - D_{-j} = x(C_n) + P_{n+1} - D_{-j} = x(P_n\#) + P_{n-j} + D_{-j} - D_{-j} =$ $x(P_n\#) + P_{n-j}$, y como $P_{n-j} < P_n$ evidentemente
$P_{n-j} \mid x(P_n\#) + P_{n-j}$

Así que $P_k - D_{-j}$ no es un numero primo, así que el único número anterior a $P_{n-j} = P_1 = 2$ es 1, es decir que se debe retrocedes una unidad ya que 2-1=1, pero por el Teorema 2.5., 1 no es un numero primo, de manera que x($P_n\#$) + P_{n-j} -1= x($P_n\#$) + 2 -1= x($P_n\#$) + 1 no es un múltiplo de ningún numero primo, al menos hasta P_n, de manera que para S_n, x($P_n\#$) + 1 será un numero primo, y será el penúltimo número primo determinado por C_n.

Teorema 2.7. *La ultima distancia $D_k \in C_n$ es igual a P_{n+1} -1.*

Demostración. Ahora como el último número primo en cualquier repetición de C_n tiene la forma $x(P_n\#) + P_{n+1}$ según el Teorema 2.4., y el penúltimo número primo determinado por C_n tiene la forma x($P_n\#$) + 1 según el Teorema 2.6., la diferencia del ultimo primo y el penúltimo primo en C_n es:

$x(P_n\#) + P_{n+1} - (x(P_n\#) + 1) = P_{n+1} - 1$ que es la última distancia $D_k \in C_n$

Teorema 2.8. *Cada sistema S_n funcionará perfectamente en la determinación de números primos hasta llegar al cuadrado del primo P_{n+1}, siguiente al primo P_n hasta donde se construyó el sistema.*

Demostración**:** El cuadrado del primo siguiente al primo hasta donde se construyó el sistema, es el primer número que no es múltiplo de los primos con los que se construyó el sistema, por ello no se puede considerar como frecuencia. Esto se explica Así:

$F_1 = P_1 * N$, $F_2 = P_2 * N$, $F_3 = P_3 * N$
,…………., $F_n = P_n * N$
Donde N son los números naturales mayores a 1.

$(F_1) \in S_1,\ (F_1, F_2) \in S_2,\ (F_1, F_2, F_3) \in S_3, \dots\dots,$
$(F_1, F_2, F_3, \dots\dots, F_n) \in S_n$

Ahora en S_n considerese
$(P_{n+1})^2 = (P_{n+1})(P_{n+1}) = (P_{n+1}) * N = F_{n+1}$
Pero $F_{n+1} \notin S_n$

De manera que la aparición de $(P_{n+1})^2 = F_{n+1}$ en S_n hace que S_n sea correcta en la determinación de números primos hasta llegar a $(P_{n+1})^2$, de ahí en adelante el sistema S_n determinará tanto números primos como números primos falsos que serán todo tipo de combinación de productos de números primos diferentes a los números primos de las frecuencias pertenecientes a S_n. así por ejemplo, el S_1 se construyó con el primo 2, y el siguiente número primo de 2 es 3, y el cuadrado de 3 es 9, así S_1 funcionara bien hasta llegar a 9, ya que 9 no es primo, y a partir de ahí el S_1 predecirá tanto números primos como números impares compuestos; ahora S_2 se construyó con los primos 2 y 3, y el siguiente primo de 3 es 5, y el cuadrado de 5 es 25, es decir, que S_2 funcionara perfectamente hasta llegar a 25, ya que 25 no es primo.

Demostración 2.5. *Llámese* ***defecto de secuencia*** *al hecho de que en un sistema S_n se supere el valor de P_{n+1}^2 antes de terminar la primera secuencia, de manera que $P_{n+1} + C_n = P_{n+1} + P_n\# > P_{n+1}^2$.*

Demostración 2.6. *Llámese* ***producto de fusión***, *a aquel producto que en la construcción de un sistema hace que se fusionen o unan dos distancias. Los productos de fusión en S_n son los productos de P_n con los primos determinados con las distancias de la secuencia C_{n-1}, es decir, con los números que son diferentes a los primos anteriores a P_n o a sus múltiplos, esto para que en S_n los múltiplos de P_n ya no sean considerados como primos Así por ejemplo en la TABLA 2.8, se observa que en S_2 hay una distancia 4, resultado de la fusión de las dos distancias 2 y 2 de S_1, presentes entre los números primos 7 y 11. Así mismo se llamara* ***distancias de fusión*** *a las distancias resultado de fusionar dos distancias del sistema anterior por un producto de fusión.*

Tabla 10

Ejemplo de producto de fusión, tomado del cuadro de las distancias de los sistemas de distribución

<table>
<tr><th>N</th><th>S_1</th><th>S_2</th></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td>7</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="4">4</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
</table>

Así un producto de fusión en S_n elimina un falso número primo construido por S_{n-1}, y lo define como múltiplo de P_n.

Demostración 2.7. *Llámese* ***bloque de secuencia b_k*** *a la suma de las distancias de una secuencia de un sistema desde D_1 o desde la distancia siguiente a la distancia en que termina el bloque anterior, hasta aquella distancia siguiente que es una fusión de dos distancias del sistema inmediatamente anterior, así por ejemplo, en el cuadro de las distancias de los sistemas de distribución, los dos bloques del sistema S_3 en su secuencia son:*

Tabla 11

Bloques de S_3, tomado del cuadro de las distancias de los sistemas de distribución

<table>
<tr><th>N</th><th>S_1</th><th>S_2</th><th>S_3</th><th></th></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="4">4</td><td rowspan="4">4</td><td rowspan="6">BLOQUE 1 DEL SISTEMA 3</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>13</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>N</th><th>S_1</th><th>S_2</th><th>S_3</th><th></th></tr>
<tr><td>13</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="4">4</td><td rowspan="4">4</td><td rowspan="16">BLOQUE 1 DEL SISTEMA 3</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>17</td></tr>
<tr><td>17</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>19</td></tr>
<tr><td>19</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="4">4</td><td rowspan="4">4</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>23</td></tr>
<tr><td>23</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="6">6</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="4">4</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>29</td></tr>
<tr><td>29</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="8">BLOQUE 2 DEL SISTEMA 3</td></tr>
<tr><td>31</td></tr>
<tr><td>31</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="4">4</td><td rowspan="6">6</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>37</td></tr>
</table>

Demostración 2.8. *Llámese* ***productos de fusión de defecto de secuencia*** *de S_n a los productos de fusión de todos los sistemas S_{n+k}, con $k \geq 1$, esto es, todo tipo infinitos de combinación y repetición de productos de primos de la forma P_{n+k}, con $k \geq 1$, estos productos no son primos, pero para S_n si lo son, por eso están en el defecto de secuencia.*

Teorema 2.9. *Sea R_n la cantidad de productos de fusión que unen distancias en un sistema S_n, y sea Q_{n-1} la cantidad de distancias existentes en un C_{n-1}, de manera que $R_n=Q_{n-1}$.*

Demostración. La cantidad de productos de fusión R_n presentes en un S_n es igual a los productos de P_n con los primos determinados con las distancias de la secuencia C_{n-1}, esto para que en S_n los múltiplos de P_n ya no sean considerados como primos, sin incluir a P_{n-1}, ni a los primos anteriores, ya que los múltiplos de estos mismos ya se excluyeron de ser números primos en los sistemas anteriores. Sea Q_{n-1} la cantidad de distancias existentes en un C_{n-1}, que es igual a la cantidad de primos determinados con las distancias de la secuencia $C_{n-1,}$ de manera que $R_n=Q_{n-1}$.

Teorema 2.10. *El primer producto de fusión en C_n es P_n^2, y el segundo producto de fusión es $P_n P_{n+1}$.*

Demostración. Como se explicó en la Demostración del Teorema 2.9., los productos de fusión en C_n es igual a los productos de P_n con los primos determinados con las distancias de la secuencia C_{n-1}, esto para que en S_n los múltiplos de P_n ya no sean considerados como primos, sin incluir a P_{n-1}, ni a los primos anteriores, pero si a P_n y a los primos posteriores determinados con las distancias de la secuencia C_{n-1}, ya que los múltiplos de P_{n-1}, y de los primos anteriores ya se excluyeron de ser números primos en los sistemas anteriores, pero los múltiplo de P_n y de los primos posteriores aún no se han excluido. Los múltiplos de P_n son de la forma P_n*N, pero para que P_n*N sea un producto de fusión en C_n, $N \geq P_n$, ya que si $N < P_n$, N tomara valores de primos anteriores a P_n o números anteriores a P_n compuestos por primos anteriores a P_n. así que P_n*N con N $=P_n$, es un producto de fusión en C_n.

Considérese los dos casos diferentes:

- El primer producto de fusión en C_n es $P_n * P_{n-k}$, $P_{n-k} < P_n$, así que P_{n-k} es anterior a P_n, lo que quiere decir que ya habrá creado antes de S_n un sistema S_{n-k} en el que se habrán excluido los múltiplos de P_{n-k}, y P_n *

P_{n-k} sería un múltiplo de P_{n-k}, de manera que en S_n no hay necesidad de eliminar el numero primo falso $P_n * P_{n-k}$, porque ya ha sido eliminado por el sistema S_{n-k} , por ello el primer producto de fusión en C_n no es $P_n * P_{n-k}$.

- El primer producto de fusión en C_n es $P_n * P_{n+k}$, donde P_{n+k} fue determinado en C_{n-1} ,$P_{n+k} > P_n$, así que P_{n+k} será posterior a P_n, así que $P_n * P_{n+k}$ si es un producto de fusión en C_n pero no será el primero, ya que $P_n * P_n$ también es un producto de fusión en C_n, y $P_n * P_n < P_n * P_{n+k}$, por eso el primer producto de fusión en C_n no es $P_n * P_{n+k}$.

Así queda demostrado que el primer producto de fusión en C_n es $P_n * P_n = P_n^2$.

Bien, $P_n P_{n+k} > P_n P_{n+1}$ para $k > 1$, de manera que ninguno de los productos de fusión de la forma $P_n P_{n+k}$ para $k > 1$ es el segundo producto de fusión.

Solo resta demostrar que $P_n^3 > P_n P_{n+1}$, ahora Considérese el importante postulado de Bertrand: "para todo entero positivo n existe un primo P tal que $n<P \leq 2n$" (*Niven y Zukcerman* 1969, 181).

Sea $n=P_n$, así se tiene que $P_n < P_{n+1} < 2P_n$, supóngase que $P_{n+1} = 2P_n$, de manera que $P_n P_{n+1} = P_n 2P_n = 2P_n^2$, y $2P_n^2 < P_n^3$, para $P_n > 2$, pero con comprobación numérica se ve que el segundo producto de fusión es $P_n P_{n+1}$ para $P_n \geq 2$.

Teorema 2.11. *El último producto de fusión en C_n es igual a P_n por el penúltimo número primo determinado por C_{n-1}, y es de la forma $x(P_n\#) + P_n$.*

Demostración. Por la Demostración del Teorema 2.6., se sabe que el penúltimo número primo determinado por C_{n-1} es de la forma $x(P_{n-1}\#)+1$, y por la Demostración del Teorema 2.3., se sabe que $x(P_n\#)+ P_n$ es el producto de fusión que hace que la última distancia $D_k \in C_n$ sea una fusión, ahora haciendo la división: $\frac{x(P_n\#) + P_n}{P_n} = x(P_{n-1}\#) + 1$ que es el penúltimo numero primo determinado por C_{n-1}.

Teorema 2.12. *El penúltimo producto de fusión en C_n es igual a $P_n\#- P_n$.*

Demostración. Por el Teorema 2.11 se sabe que el último producto de fusión en C_n es igual a P_n por el penúltimo número primo determinado por C_{n-1}, así que el penúltimo producto de fusión en C_n es igual a P_n por el antepenúltimo número primo determinado por C_{n-1}, Y el antepenúltimo número primo determinado por C_{n-1} es de la forma $x(P_{n-1}\#) - 1$, ya que P_{n-1} no divide a $x(P_{n-1}\#) - 1$, de manera que $P_n(P_{n-1}\# - 1) = P_n\# - P_n$.

Teorema 2.13. *Entre el último producto de fusión y el penúltimo existen dos números considerados primos por S_n.*

Demostración. Sea el último producto de fusión en C_n de la forma $(P_n\#) + P_n$ o $(P_n\#) + K$, y sea el penúltimo producto de fusión en C_n de la forma $P_n\#- P_n$ o $P_n\#- K$, donde $K=P_n$, ahora si a K se le dan valores enteros menores a P_n , las expresiones $(P_n\#) + K$ y $P_n\#- K$ serán divisibles por los números primos anteriores a P_n, exceptuando a K=1, ya que las dos expresiones $(P_n\#) + 1$ y $P_n\#- 1$ son las únicas que no son divisibles por los números primos menores o igual a P_n, de manera que para S_n, $(P_n\#) + 1$ y $P_n\#- 1$ son primos.

Teorema 2.14. *La cantidad de distancias Q_n existentes en un C_n, es igual al producto de la cantidad de distancias Q_{n-1} existentes en un C_{n-1} por el número primo P_n, menos la cantidad de distancias Q_{n-1}.asi:*

$$Q_n = Q_{n-1}P_n - Q_{n-1} = Q_{n-1}(P_n - 1)$$

Demostración. Supóngase que se conoce la cantidad de distancias Q_n existentes en un C_n, y se desea saber cuánta cantidad de distancias Q_{n+1} existentes en un C_{n+1}, para ello se calcula cuantas veces esta C_n en C_{n+1}, y como por el Teorema 2.2. $C_n=P_n\#$ y $C_{n+1}=P_{n+1}\#$, de manera que:

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{P_{n+1}\#}{P_n\#} = P_{n+1}$$

De manera que C_n está P_{n+1} veces en C_{n+1}, que sería lo mismo decir Q_n esta P_{n+1} veces en Q_{n+1}, sin embargo esta cantidad de distancias merma por los productos de fusión que construyen a S_{n+1}, y por el Teorema 2.9. $R_{n+1}=Q_n$, por esto:

$$Q_{n+1} = Q_n P_{n+1} - Q_n = Q_n(P_{n+1} - 1)$$

Ahora $Q_1=1$, y este es el único Q_n que no se define por la formula $Q_n = Q_{n-1}(P_n - 1)$, ya que Q_0 no existe. Así:

$Q_2 = Q_1(P_2 - 1)$=2
$Q_3 = Q_2(P_3 - 1)$=8
$Q_4 = Q_3(P_4 - 1)$=48
$Q_5 = Q_4(P_5 - 1)$=480
$Q_6 = Q_5(P_6 - 1)$=5.760
$Q_7 = Q_6(P_7 - 1)$=92.160
$Q_8 = Q_7(P_8 - 1)$=1.658.880
$Q_9 = Q_8(P_9 - 1)$=36.495.360
$Q_{10} = Q_9(P_{10} - 1)$=1.021.870.080
Y así sucesivamente.

Teorema 2.15. *Q_{n+1} aumenta su proporción con respecto a Q_n al crecer el valor de n, así $\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{Q_{n+1}} = 0$.*

Demostración. $Q_n = Q_{n-1}(P_n - 1)$, así $Q_{n+1} = Q_n(P_{n+1} - 1) = Q_{n-1}(P_n - 1)(P_{n+1} - 1)$, ahora $\frac{Q_n}{Q_{n+1}} = \frac{Q_{n-1}(P_n - 1)}{Q_{n-1}(P_n - 1)(P_{n+1} - 1)} = \frac{1}{(P_{n+1} - 1)}$,

y evidentemente $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(P_{n+1} - 1)} = 0$.

Teorema 2.16. *Q_n aumenta su proporción con respecto a R_n, así $\lim_{n\to\infty} \frac{(R_n)}{(Q_n)} = 0$, de manera que R_n se ha repartido en C_n con un Q_n cada vez más mayor con respecto a R_n.*

Demostración. Por el Teorema 2.9 se sabe que $R_n=Q_{n-1}$, y por el Teorema 2.14. se tiene que $Q_n = Q_{n-1}(P_n - 1)$, ahora

$\frac{Q_{n-1}}{Q_{n-1}(P_n - 1)} = \frac{1}{(P_n - 1)}$, y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(P_{n+1} - 1)} = 0$

Teorema 2.17. $P_n^2 > P_{n+1} + D_1$ *, para n>1.*

Demostración. Considérese el postulado de Bertrand: $n<P\leq 2n$

Sea $n=P_n$ así $P_n < P_k \leq 2P_n$, pero si P_n y P_k son primos, entonces $P_k < 2P_n$, ahora puede considerarse que $P_k = P_{n+1}$.

Ahora $(2P_n) < P_{k_l} < 2(2P_n) = 4P_n$, y por el Teorema 2.10. se sabe que P_n^2 es el primer producto de fusión, y $4P_n < P_n^2$ si $4 < P_n$, y $P_n>4$ para n>2. Así si $4P_n < P_n^2$ entonces $P_{k_l} < P_n^2$, y como $P_{k_l} > P_k$, entonces puede ser $P_{k_l} = P_{n+1} + D_1$, lo que demuestra que $P_n^2 > P_{n+1} + D_1$, para n>2, pero con comprobación se ve que $P_n^2 > P_{n+1} + D_1$, para n>1.

Teorema 2.18. *La primera distancia $D_1 \in C_n$ para n>1, no es una fusión, de manera que $D_1 \in C_n$ es la segunda distancia $D_2 \in C_{n-1}$.*

Demostración. Por el Teorema 2.17 se sabe que $P_n^2 > P_{n+1} + D_1$ para n>1, y se sabe por el Teorema 2.10 que el primer producto de fusión en C_n es P_n^2, de manera que al ser $P_n^2 > P_{n+1} + D_1$, P_n^2 no puede estar dentro de D_1 haciéndola una fusión.

Teorema 2.19. *La última distancia $D_k \in C_n$ es una fusión.*

Demostración. Como dice el Teorema 2.7 la última distancia $D_k \in C_n$ es igual a $P_{n+1} - 1$, que es una fusión, y como se vio en la Demostración del mismo Teorema, se tiene que:

$P_n | x(P_n\#) + P_n$, $P_{n-1} | x(P_n\#) + P_{n-1}$, $P_{n-2} | x(P_n\#) + P_{n-2}$, ……., $P_{n-j} | x(P_n\#) + P_{n-j}$, Así que los múltiplos de los primos anteriores a P_n ya han sido descartados como primos por sus sistemas correspondientes, pero se sabe que x($P_n\#$) + P_n no es primo por ser múltiplo de P_n, solamente desde S_n, ya que en los sistemas anteriores hasta S_{n-1}, x($P_n\#$) + P_n si se consideraba primo, y recuérdese por la Demostración 2.6 que productos de fusión es el producto de P_n por los números diferentes a los números primos anteriores a P_n o a sus múltiplos, así cualquier $P_{n-k} \mid$ x($P_n\#$) + P_n, por ello x($P_n\#$) + P_n es un producto de fusión que une dos distancias de C_{n-1} y crea la última distancia P_{n+1} -1 en C_n.

Demostración 2.9. *Llámese* ***simetría secuencial*** *x****sim****$_n$, al hecho de que en las distintas repeticiones de $P_n\#$ se presenta simetría en los números primos que incluye S_n, sin tomar en cuenta los números primos anteriores a P_{n+1}, presentes en las dos secciones resultado de dividir $P_n\#$ en 2, donde x∈ N representa el numero ordinal de la simetría, así por ejemplo 1****sim****$_n$ representa la simetría en las dos secciones que están entre 0 y $P_n\#$, 2****sim****$_r$ representa la simetría en las dos secciones que están entre $P_n\#$, y $2P_n\#$, 3****sim****$_n$ representa la simetría en las dos secciones que están entre $2P_n\#$, y $3P_n\#$, y x****sim****$_n$ representa la simetría en las dos secciones que están entre $(x-1)P_n\#$, y $xP_n\#$.*

Tabla 12

Ejemplo de simetría en 1sim$_3$, tomado de la tabla de frecuencias de distribución

N	P_3
1	
2	
3	
4	
5	-
6	-
7	-
8	-
9	-
10	F_3
11	-
12	-
13	-
14	-
15	F_3
16	-
17	-
18	-
19	-
20	F_3
21	-
22	-
23	-
24	-
25	F_3
26	-
27	-
28	-
29	-
30	F_3

En esta tabla se observa que 7 es simétrico con 23, 11 es simétrico con 19 y 13 es simétrico con 17, también se ve que 29 no es simétrico con 1 porque 1 no es primo. Igualmente se observa que 1**sim**$_3$ llega hasta $P_n\# = P_3\#$ =30.

Teorema 2.20*. Si a $XP_n\#$ se le resta los números primos determinados por S_n mayores a P_n hasta P_k tomados de menor a mayor, tal que $XP_n\# - P_k = P_{n+1} + \left((X-1)P_n\#\right)$, el resultado será los números primos de S_n tomados de mayor a menor hasta P_{n+1}.*

Demostración.
En $XP_n\# - P_k = P_{n+1} + ((X-1)P_n\#)$ se ha sumado en el segundo miembro $((X-1)P_n\#)$ por las repeticiones de C_n, pero si se considera una sola secuencia, entonces $P_n\# - P_k = P_{n+1}$.

Ahora sea todo P_Q con $n<Q\leq k$, de manera que a la expresión $P_n\# - P_Q$ no la dividirá ningún primo P_j con $j\leq$ n, por eso $P_n\# - P_Q$ es un numero primo para S_n.

Ahora Q debe tomar valores hasta K tal que $P_n\# - P_k = P_{n+1}$, ya que si $P_n\# - P_k$ es igual a algún numero anterior a P_{n+1}, este resultado será divisible o igual a algún numero primo anterior a P_{n+1}.

Teorema 2.21. *En x**sim**$_n$ no se tienen en cuenta los números primos anteriores a P_{n+1} ni sus múltiplos, en 1**sim**$_n$ no se tiene en cuenta 0+1 ni $P_n\# - 1$, pero en x**sim**$_n$ con x>1 si se tiene en cuenta $(x-1)P_n\# + 1$, y* $xP_n\# - 1$.

Demostración. La simetría de $P_n\#$ se construye con S_n, y no se tienen en cuenta los números primos anteriores a P_{n+1} ni sus múltiplos porque en S_n los múltiplos de estos primos ya no aparecen como primos. Ahora en 1**sim**$_n$ que es la simetría entre 0 y $P_n\#$ no se tiene en cuenta $P_n\# - 1$, ya que 0+1=1 no es un numero primo, pero en x**sim**$_n$ con x>1 que es la simetría entre $(x-1)P_n\#$ y $xP_n\#$, si se tiene en cuenta $(x-1)P_n\# + 1$, y $xP_n\# - 1$ ya que por el Teorema 2.13 ambos si se consideran números primos en S_n.

Teorema 2.22. *La cantidad de primos que contiene cada una de las dos secciones de 1**sim**$_n$ es* $\dfrac{Q_{n-1}(P_n-1)}{2} - 1$ *, y de x**sim**$_n$ con x>1 es* $\dfrac{Q_{n-1}(P_n-1)}{2}$.

Demostración. La cantidad de primos que contiene 1**sim**$_n$ es $Q_{n-1}(P_n-1)-2$, ya que por el Teorema 2.14. la cantidad de distancias, y por ende la cantidad de primos en C_n desde P_{n+1} (sin incluir a P_{n+1}) hasta $P_n\# + P_{n+1}$ es $Q_n = Q_{n-1}(P_n-1)$, pero como 1**sim**$_n$ si incluye a P_{n+1}, pero no incluye a $P_n\# - 1$, ni a $P_n\# + 1$ y $P_n\# + P_{n+1}$ porque estos últimos dos pertenecen a 2**sim**$_n$, entonces la cantidad de primos que contiene 1**sim**$_n$ es $Q_{n-1}(P_n-1)-2$, ahora como $P_n\#$ es par ya que incluye al número primo par 2 como factor, si $P_n\#$ se divide en 2, se obtendrán dos secciones tal que la primera es simétrica con la segunda, de manera que la mitad de cada simetría, es decir, el punto que divide la simetría en dos secciones es frecuencia de todos los primos de $P_n\#$ a excepción del 2, y cada sección en 1**sim**$_n$ tendrá $\dfrac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2} = \dfrac{Q_{n-1}(P_n-1)}{2} - 1$ primos ; y la cantidad de primos que contiene x**sim**$_n$ con x>1 es $Q_{n-1}(P_n-1)$, ya que por el Teorema 2.14: $Q_n = Q_{n-1}(P_n-1)$ sin incluir a 1 ni a P_{n+1}, pero si incluye a $P_n\# - 1, P_n\# + 1\ y\ P_n\# + P_{n+1}$, ahora x**sim**$_n$ que representa la simetría en las dos secciones que están entre $(x-1)P_n\#$, y $xP_n\#$, no incluye a $xP_n\# + 1\ ni\ a\ xP_n\# + P_{n+1}$, pero si incluye a $(x-1)P_n\# + 1$, $(x-1)P_n\# + P_{n+1}$ y a $xP_n\# - 1$, y cada sección en x**sim**$_n$ tendrá $\dfrac{Q_{n-1}(P_n-1)}{2}$ primos.

Teorema 2.23. *En términos generales*

$$(x-1)P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}-(t-1)} =$$

$$xP_n\# - P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}+t}\text{, y}$$

$$(x-1)P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}+t} =$$

$$xP_n\# - P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}-(t-1)}\text{, donde}$$

$$t \leq \frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}.$$

Demostración. Por el Teorema 2.20 se sabe que si a $XP_n\#$ se le resta los números primos determinados por S_n mayores a P_n hasta P_k tomados de menor a mayor, tal que $XP_n\# - P_k = P_{n+1} + ((X-1)P_n\#)$, el resultado será los números primos de S_n tomados de mayor a menor hasta P_{n+1}, de manera que esto es una simetría, donde $k = n + \frac{Q_{n-1}(P_n - 1) - 2}{2}$ para 1**sim**$_n$, y para x**sim**$_n$.

Así para 1**sim**$_n$ $0 + P_{n+1}$ es simétrico con $P_n\# - P_{n+1}$, $0 + P_{n+2}$ es simétrico con $P_n\# - P_{n+2}$, y $0 + P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}}$ es simétrico con $P_n\# - P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}}$.

Y para x**sim**$_n$ $(x-1)P_n\# + 1$ es simétrico con $xP_n\# - 1$, $(x-1)P_n\# + P_{n+1}$ es simétrico con $xP_n\# - P_{n+1}$, $(x-1)P_n\# + P_{n+2}$ es simétrico con $xP_n\# - P_{n+2}$, y $(x-1)P_n\# + P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}}$ es simétrico con $xP_n\# - P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}}$, pero estos números simétricos son precisamente los números primos determinados en la sección entre $(x-1)P_n\#$ y $xP_n\#$ por S$_n$.

Y se tiene necesariamente que por ejemplo

$$(x-1)P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}+1} = xP_n\# - P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}}$$

Porque $(x-1)P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}}$ es el último primo de menor a mayor de la primera sección, de manera que su número primo siguiente es $(x-1)P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}+1}$, pero necesariamente el primo siguiente al último primo de la primera sección, es el último primo de mayor a menor de la segunda sección, que es $xP_n\# - P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}}$.

Y así mismo $P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}} = xP_n\# - P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}+1}$, y en términos generales:

$$(x-1)P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}-(t-1)} = xP_n\# - P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}+t}$$, y

$$(x-1)P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}+t} = xP_n\# - P_{n+\frac{Q_{n-1}(P_n-1)-2}{2}-(t-1)}$$, donde $t \leq \frac{Q_{n-1}(P_n - 1) - 2}{2}$, ya que no debe salirse del rango entre $(x-1)P_n\#$ y $xP_n\#$.

Teorema 2.24. *Respecto a los bloques de secuencia* $b_k \in S_n$ *se tiene que:*

La cantidad o número de bloques en C$_n$ para n>1, es igual a la cantidad de productos de fusión R$_n$=Q$_{n-1}$.

$$\sum_{k=1}^{Q_{n-1}} b_k = C_n = P_n\#$$.

Demostración.

Se sabe por la Demostración 2.7 que **bloque de secuencia b$_k$** es la suma de las distancias de una secuencia de un sistema desde D$_1$ o desde la distancia siguiente a la distancia en que termina el bloque anterior, hasta aquella distancia siguiente que es una fusión de dos distancias del sistema inmediatamente anterior, y se sabe por el Teorema 2.18. que la primera distancia D$_1$∈ C$_n$ para n>1, no es una fusión, y por el Teorema 2.19. se sabe que necesariamente la última distancia D$_k$ ∈ C$_n$ es una fusión, y como las distancias fusionadas es por los productos de fusión, la cantidad de distancias fusionadas es igual a la cantidad de productos de fusión R$_n$ por Demostración.

Todos los b_k en C$_n$ están compuestos por todas las D$_k$∈ C$_n$ empezando desde D$_1$ hasta la última distancia D$_k$∈ C$_n$, y por el Teorema 2.2. y 2.14.

$$\sum_{k=1}^{Q_n} D_k = C_n = P_n\#$$.

Teorema 2.25. $P_n\# > P_{n+1}^2$ *Para n>3, es decir, desde P$_4$=7.*

Demostración. Considérese postulado de Bertrand: $n<P_k \leq 2n$.

Ahora sea $n=P_n$ y $P_k= P_{n+1}$, así $P_n <P_{n+1} \leq 2P_n$, ahora supóngase el valor máximo de P_{n+1} tal que $P_{n+1} =2P_n$, de manera que $P_{n+1}^2 = 4P_n^2$, ahora supóngase cierto que $P_n\# > P_{n+1}^2$, de manera que también $P_n\# > 4P_n^2$, ahora si se divide esta última expresión en P_n, el resultado es $P_{n-1}\# > 4P_n$, y por el mismo postulado de Bertrand $P_{n-1} <P_n \leq 2P_{n-1}$, désele a P_n el máximo valor tal que $P_n =2P_{n-1}$, así la inecuación $P_{n-1}\# > 4P_n$ equivale a $P_{n-1}\# > 4(2P_{n-1})$, y si esta expresión se divide en P_{n-1} , el resultado es $P_{n-2}\# > 8$, esto quiere decir que $P_n\# > P_{n+1}^2$ si $P_{n-2}\# > 8$, y $P_{n-2}\# > 8$ para n>4, es decir que $P_n\# > P_{n+1}^2$ para n>4 , pero haciendo comprobación numérica $P_n\# > P_{n+1}^2$ Para n>3, esta diferencia se debe a que en la Demostración se tomaron los casos extremos de que $P_{n+1} =2P_n$ y $P_n =2P_{n-1}$.

Teorema 2.26. *Todo S_n con n>3 tiene defecto de secuencia desde el primer C_n.*

Demostración. Todo sistema S_n tomando solo un valor de C_n, es decir, sin considerar las demás repeticiones de su patrón, determinara números primos sumando sus distancias a P_{n+1} hasta llegar a $C_n=P_n\#$:

$$P_{n+1} + \sum_{k=1}^{Q_{n-1}(P_n-1)} D_k = P_{n+1} + C_n = P_{n+1} + P_n\#$$

Pero si $P_{n+1} + P_n\# > P_{n+1}^2$, existirá en S_n el defecto de secuencia según la Demostración 2.5**,** y por el Teorema 2.25. $P_n\# > P_{n+1}^2$ Para n>3, lo que implica también que $P_n\# + P_{n+1} > P_{n+1}^2$ Para n>3, ya que para $n \leq 3$, $P_n\# + P_{n+1} < P_{n+1}^2$.

Teorema 2.27. *No todos los números de Euclides de la forma $P_n\# + 1$ son números primos.*

Demostración. En la Demostración del Teorema 2.6 se mostró que para S_n, x($P_n\#$) + 1 será un numero primo, sea x=1, y por el Teorema 2.8, S_n será correcta en la determinación de números primos hasta llegar a $(P_{n+1})^2$, de ahí en adelante el sistema S_n determinará tanto números primos como números compuestos, y por el Teorema 2.26 todo S_n con n>3 tiene defecto de secuencia, por eso los números de EUCLIDES de la forma $P_n\# + 1$ para n>3 están en la zona de defecto de secuencia de S_n, lo que implica que $P_n\# + 1$ puede ser un numero primo o un numero compuesto.

Teorema 2.28. *En S_n, $P_{n+1} + D_1 =P_{n+2}< P_{n+1}^2$.*

Demostración. Por el Teorema 2.17 se sabe que $P_{n+1} + D_1< P_n^2$, y como evidentemente $P_{n+1}^2 > P_n^2$, entonces también $P_{n+1} + D_1< P_{n+1}^2$.

Teorema 2.29. $P_n^2 > P_{n+1}$.

Demostración. Considérese de nuevo el postulado de Bertrand, de manera que $P_n <P_{n+1} \leq 2P_n$, así $P_{n+1} \leq 2P_n$, ahora si se reemplaza en el segundo miembro de la inecuación el numero 2 por P_n, entonces si $P_{n+1} \leq 2P_n$, entonces $P_{n+1} <P_n * P_n= P_n^2$ para $P_n>2$, pero por comprobación numérica se sabe que también se cumple $P_n^2 > P_{n+1}$ para $P_n=2$.

Teorema 2.30. *Siempre entre P_n y P_n^2 existirá por lo menos N números primos, de manera que $2^N \leq P_n$, y*

$$N = \left\lfloor \frac{\log P_n}{\log 2} \right\rfloor .$$

Demostración. Por el postulado de Bertrand, se tiene que:

$P_n<P_{k_1}<2P_n$

De manera que: $(2P_n)< P_{k_2} <(4P_n)$, $(4P_n)< P_{k_3} <(8P_n)$, $(8P_n)< P_{k_4} <(16P_n)$, …….., $(2^{N-1})P_n< P_{k_N}<(2^N)P_n$

Así $(2^N)P_n \leq P_n^2$ si $2^N \leq P_n$.

Ahora si se desea conocer el valor de N conociendo P_n, en la expresión $2^N \leq P_n$ se despeja N, de manera que $log\ 2^N \leq log\ P_n$, N $log\ 2 \leq log\ P_n$, y despejando a N:

$$N \le \frac{\log P_n}{\log 2}$$

Ahora N toma el valor entero que no supere a $\frac{\log P_n}{\log 2}$, ahora sea [x] la función máximo entero menor o igual a x, de manera que $N = \left[\frac{\log P_n}{\log 2}\right]$.

Teorema 2.31. *En S_n existen por lo menos dos productos de fusión antes de P_{n+1}^2, es decir, antes del defecto de secuencia.*

Demostración. Recuérdese en la Demostración 2.6 que los productos de fusión en S_n son los productos de P_n con los primos determinados con las distancias de la secuencia C_{n-1}, es decir, con los números que son diferentes a los primos anteriores a P_n o a sus múltiplos, y los dos primeros números diferentes a los primos anteriores a P_n, son el mismo P_n y P_{n+1}, de manera que los primeros productos de fusión son $P_n * P_n$ y $P_n * P_{n+1}$, y como $P_n < P_{n+1}$, con certeza $P_n * P_n < P_{n+1}^2$ y $P_n * P_{n+1} < P_{n+1}^2$.

Teorema 2.32. *En C_n existen por lo menos dos distancias de fusión D_h y D_k, donde k>h, antes de P_{n+1}^2, es decir, antes del defecto de secuencia, si $P_{n+1} + \left(\sum_{j=1}^{k} D_j\right) < P_{n+1}^2$, y por lo menos una distancias D_h, si $P_{n+1} + \left(\sum_{j=1}^{k} D_j\right) = P_{n+1}^2$.*

Demostración. Por el Teorema 2.31. se sabe que en S_n existen por lo menos dos productos de fusión antes de P_{n+1}^2, y estos dos productos de fusión crean en C_n dos distancias de fusión, pero si $P_{n+1} + \left(\sum_{j=1}^{k} D_j\right) = P_{n+1}^2$, donde D_k es la última distancia de fusión, quiere decir que su límite superior es P_{n+1}^2, pero P_{n+1}^2 es el primer producto de fusión de defecto de secuencia, así D_k es en realidad D_{k_1}, y su límite superior real será superior a P_{n+1}^2, así $P_{n+1} + \left(\sum_{j=1}^{k_1} D_j\right) > P_{n+1}^2$, por ello en este caso solo existirá con certeza por lo menos una distancia de fusión D_h antes de P_{n+1}^2, de manera que $P_{n+1} + \left(\sum_{j=1}^{h} D_j\right) < P_{n+1}^2$.

Teorema 2.33. *La cantidad de productos de fusión en C_n antes de P_{n+1}^2, será igual a k+1, de manera que $P_n\left(\sum_{j=1}^{k} D_j\right) < 2D_1P_n + D_1^2$, para $D_j \in C_{n-1}$.*

Demostración. Sea todo $D_j \in C_{n-1}$, así en vez de $P_{n+1} = P_n + D_0$ con $D_0 \in C_n$, será $P_{n+1} = P_n + D_1$ con $D_1 \in C_{n-1}$, ahora $P_{n+1}^2 = (P_n + D_1)^2 = P_n^2 + 2D_1P_n + D_1^2$, ahora sea $P_{n+k} = P_n + \sum_{j=1}^{k} D_j$, así:

$$P_nP_{n+k} = P_n^2 + P_n\sum_{j=1}^{k} D_j$$

Pero P_nP_{n+k} debe ser lo más próximo a P_{n+1}^2 sin sobrepasarlo, es decir que $P_nP_{n+k} < P_{n+1}^2$, que equivale a $P_n\left(\sum_{j=1}^{k} D_j\right) < 2D_1P_n + D_1^2$, y la cantidad de productos de fusión será igual a k+1, ya que se cuentas también el producto de fusión P_n^2.

Teorema 2.34. *La cantidad de distancias de fusión en C_n antes de P_{n+1}^2, será igual a k+1, de manera que*

$$P_n\left(\sum_{j=1}^{k} D_j\right) < 2D_1P_n + D_1^2,$$

si $P_{n+1} + \left(\sum_{j=1}^{k} D_j\right) < P_{n+1}^2$, *y será k si* $P_{n+1} + \left(\sum_{j=1}^{k} D_j\right) = P_{n+1}^2$, *para* $D_j \in C_{n-1}$.

Demostración. Por el Teorema 2.33. se sabe que la cantidad de productos de fusión en C_n antes de P_{n+1}^2, será igual a k+1, de manera que $P_n\left(\sum_{j=1}^{k} D_j\right) < 2D_1P_n + D_1^2$, para $D_j \in C_{n-1}$,y los productos de fusión crean distancias de fusión, pero en el caso de que $P_{n+1} + \left(\sum_{j=1}^{k} D_j\right) = P_{n+1}^2$, como se explicó en Teorema 2.32., será uno menos, es decir k.

El siguiente Teorema se construye a partir de esta idea: "existen arbitrariamente grande vacíos en la serie de los primos. Dicho de otra manera, dado cualquier entero positivo k, existen k enteros compuestos consecutivos." (*Niven y Zukcerman* 1969, 23).

Teorema 2.35. *Todo número de la forma* $P_n\# \mp k$, *con* $1 < k \leq P_n$ *no es* número *primo.*

Demostración. Todo numero $k \leq P_n$, es un numero primo o un numero compuesto por los primos anteriores a P_n, así la expresión $P_n\# \mp k$ es divisible por algún o algunos primos anteriores o igual a P_n, pero k>1, ya que $P_n\# \mp 1$ no es divisible por los primos anteriores o igual a P_n.

Teorema 2.36. *En* S_n *la distancia máxima max* $D_k \in C_n$ *es* $2(f_{n+1}) \geq maxD_k \geq P_{n+1} - 1$, *sin tener en cuenta el defecto de secuencia, donde* f_{n+1} *representa el n+1-ésimo numero en la sucesión de Fibonacci.*

Demostración. Por el Teorema 2.35 se sabe que todo número de la forma $P_n\# \mp k$, con $1 < k \leq P_n$ no es primo, pero para S_n, el número de la forma $P_n\# \mp P_{n+1}$ si es primo, ya que no es divisible por los primos anteriores o igual a P_n, y se sabe también que para S_n, $P_n\# \mp 1$ también es primo, y la diferencia absoluta $|(P_n\# \mp P_{n+1}) - (P_n\# \mp 1)| = P_{n+1} - 1$, así la distancia máxima de S_n no puede ser menor a $P_{n+1} - 1$.

Ahora max $D_k \in C_1 = 2$, max $D_k \in C_2 = 4$, max $D_k \in C_3 = 6$ y max $D_k \in C_4 = 10$, ahora hágase la suposición extrema de que todo max $D_k \in C_n$ =(max$D_k \in C_{n-1}$) + (max$D_k \in C_{n-2}$) .

Sea max $D_k \in C_1 = 2(f_2)$, max $D_k \in C_2 = 2(f_3)$, max $D_k \in C_3 = 2(f_4)$ y max $D_k \in C_n = 2(f_{n+1})$, donde $f_2 = 1$ es el segundo número en la sucesión de Fibonacci, $f_3 = 2$ es el tercer número, $f_4 = 3$ es el cuarto número, y así sucesivamente, y como a max $D_k \in C_n$ se le está dando un valor máximo extremo de $2(f_{n+1})$, el verdadero valor de max $D_k \in C_n$ no puede superar o ser mayor que $2(f_{n+1})$, por ello $2(f_{n+1}) \geq$ max $D_k \geq P_{n+1} - 1$.

Teorema 2.37. *Sea* C_n, *con n>4, es decir, con defecto de secuencia, llámese* $U_n = P_{n+1}^2 - P_{n+1}$ *la parte útil de* C_n *antes del defecto de secuencia, de manera que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{C_n} = 0.$$

Demostración. Supóngase que $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{C_n} = 0$ es cierto, de manera que $C_n > U_n$, ahora si a ambos lados de esta inecuación se le suma un valor se mantiene la inecuación, tal que $C_n + P_{n+1} > U_n + P_{n+1}$.

Ahora sea $U_n = P_{n+1}^2 - P_{n+1}$ y $C_n = P_n\#$, si a ambas ecuaciones se les suma P_{n+1}, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{C_n} = \frac{P_{n+1}^2 - P_{n+1}}{P_n\#} \approx \frac{P_{n+1}^2}{P_n\# + P_{n+1}}$$

Ahora tómese esta última expresión e inviértase así:

$\frac{P_n\# + P_{n+1}}{P_{n+1}^2} = \frac{P_n\#}{P_{n+1}^2} + \frac{P_{n+1}}{P_{n+1}^2} = \frac{P_n\#}{P_{n+1}^2} + \frac{1}{P_{n+1}}$, ahora la fracción $\frac{1}{P_{n+1}}$ tiende a cero cuando n aumenta, así que se puede omitir, de manera que solamente queda $\frac{P_n\#}{P_{n+1}^2}$, ahora por el Teorema de Bertrand se tiene que $P_{n+1} \leq 2P_n$, asi $P_{n+1}^2 \leq 4P_n^2$, así el denominador de la fracción se puede reemplazar por su valor máximo así: $\frac{P_n\#}{4P_n^2} =: \frac{P_{n-1}\#}{4P_n}$, y por el mismo Teorema de Bertrand $P_n \leq 2P_{n-1}$, así el denominador de esta última fracción de nuevo se reemplaza por su valor máximo: $\frac{P_{n-1}\#}{4(2P_{n-1})} = \frac{P_{n-2}\#}{8}$, recuérdese que se le asigno valores máximos al denominador, así los valores reales del denominador pueden tomar valores menores, y si la fracción se invierte: $\frac{8}{P_{n-2}\#}$, y evidentemente esta fracción tiende a cero al crecer n, pero como se dijo, al numerador se le ha asignado valores máximos, y puede tomar valores menores, así que la fracción $\frac{8}{P_{n-2}\#}$ es la cota superior para $\frac{U_n}{C_n}$, de manera que $\frac{U_n}{C_n} \leq \frac{8}{P_{n-2}\#}$.

Teorema 2.38. *Para todo S_n con n>4, el defecto de secuencia aparece en la primera sección de 1**sim**$_n$.*

Demostración. Sea n=5, así el defecto de secuencia empieza desde $P_{n+1}^2 = P_6^2 = 13^2 = 169.$ Ahora la primera sección de 1**sim**$_5$ está entre 0 y $\frac{P_5\#}{2} = 1155$, asi $P_6^2 < \frac{P_5\#}{2}$, y por el Teorema 2.37., $C_n = P_n\#$ aumenta su proporción con respecto a U_n al aumentar n, ahora usando un razonamiento similar al de la Demostración del Teorema 2.37. se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}^2}{P_n\#} \approx \frac{4P_n^2}{P_n\#} \approx \frac{4P_n}{P_{n-1}\#} \approx \frac{8P_{n-1}}{P_{n-1}\#} \approx \frac{8}{P_{n-2}\#} = 0$, y como se le dio valores máximos al numerador, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}^2}{P_n\#} = 0,$ de manera que si $P_n\#$ aumenta su proporción con respecto a P_{n+1}^2 al aumentar n, entonces $\frac{P_n\#}{2}$ también aumenta su proporción con respecto a P_{n+1}^2 al aumentar n, y si en n=5, $P_6^2 < \frac{P_5\#}{2}$, entonces $P_{n+1}^2 < \frac{P_n\#}{2}$ para todo n>4.

Teorema 2.39. *Sea $R_n^{\cdot}$ la cantidad de productos de fusión de defecto de secuencia en $P_n\# + P_{n+1}$, de manera que $R_n^{\cdot} = \sum_{j=1}^{k} \rho(x_j)$, donde $x_j = \left[\frac{P_n\# + P_{n+1}}{P_{n+j}}\right]$ k toma el valor de P_{n+k} que es el numero primo anterior y más cercano a $\sqrt{P_n\# + P_{n+1}}$, y $\rho(x_j)$ es la función que determina la cantidad de números primos para S_n que hay en x_j sin incluir a los primos anteriores a P_{n+j}.*

Demostración. Sea $x_j = \left[\frac{P_n\# + P_{n+1}}{P_{n+j}}\right]$ la cantidad de veces que esta P_{n+j} en $P_n\# + P_{n+1}$, pero de x_j solo interesa los números primos para S_n mayores o iguales a P_{n+j}, así la función $\rho(x_j)$ determina esta cantidad de primos que son los que participan en los productos de fusión de defecto de secuencia.

Ahora $\left[\frac{P_n\# + P_{n+1}}{P_{n+j}}\right] \geq P_{n+j}$, ya que si $\left[\frac{P_n\# + P_{n+1}}{P_{n+j}}\right] < P_{n+j}$ entonces no habría primos para S_n en x_j mayores o iguales a P_{n+j}.

Ahora $1 \leq j \leq k$, tal que *k* viene del P_{n+k} que es el primo máximo tal que $\left[\frac{P_n\# + P_{n+1}}{P_{n+k}}\right] \geq P_{n+k}$, ahora $P_n\# + P_{n+1} \geq P_{n+k}^2$,y $\sqrt{P_n\# + P_{n+1}} \geq P_{n+k}$

Bien, los productos de fusión de defecto de secuencia en $P_n\# + P_{n+1}$ son de la forma $\left(P_{n+j}^{a_0} P_{n+j+1}^{a_1} P_{n+j+2}^{a_2} \dots \dots . P_{n+j+i}^{a_i}\right) \leq P_n\# + P_{n+1}$, y el producto entre paréntesis es un primo para S_n , así que no hay problema por las potencias.

Teorema 2.40. *Si la función* $\pi(x)$ *denota la cantidad de primos en x, y si* $x = P_n\# + P_{n+1}$ *, entonces:*

$$\left\lceil \frac{\log(P_n\# + P_{n+1})}{\log 2} \right\rceil \leq \pi(P_n\# + P_{n+1}) \leq$$

$$\left(\prod_{k=2}^{n}(P_k - 1)\right) + n + 1$$

Y también:

$$\pi(P_n\# + P_{n+1}) = \left(\prod_{k=2}^{n}(P_k - 1)\right) + n + 1 - R_n' .$$

Demostración. Por el Teorema 2.30,
$N = \left\lceil \frac{\log(P_n\# + P_{n+1})}{\log 2} \right\rceil$, y por el Teorema 2.14.
$Q_n = Q_{n-1}(P_n - 1)$ y $Q_{n-1} = Q_{n-2}(P_{n-1} - 1)$

Así $Q_n = Q_{n-2}(P_{n-1} - 1)(P_n - 1)$ y
$Q_{n-2} = Q_{n-3}(P_{n-2} - 1)$

Así $Q_n = Q_{n-3}(P_{n-2} - 1)(P_{n-1} - 1)(P_n - 1)$, y en general:

$$Q_n = (P_2 - 1)(P_3 - 1)(P_4 - 1) \dots \dots \dots \dots \dots . (P_n - 1)$$

$$= \prod_{k=2}^{n}(P_k - 1) .$$

Ahora las $D_k \in C_n$ determinan números primos para S_n , de manera que Q_n es la cantidad de primos determinados en C_n , y como por el Teorema 2.1 las D_k empiezan a sumar desde P_{n+1}, antes de los primos determinados por D_k , están los primos $P_1, P_2, P_3, \dots \dots \dots , P_{n+1}$, es decir n+1 primos.

Ahora si $1 \leq n \leq 3$, entonces

$$\pi(P_n\# + P_{n+1}) = \left(\prod_{k=2}^{n}(P_k - 1)\right) + n + 1 .$$

Si n>3, entonces

$$\pi(P_n\# + P_{n+1}) < \left(\prod_{k=2}^{n}(P_k - 1)\right) + n + 1 ,$$

esto es porque por el Teorema 2.26 todo S_n con n>3 tiene defecto de secuencia, pero si a $\left(\prod_{k=2}^{n}(P_k - 1)\right) + n + 1$ se le resta los falsos primos por los productos de fusión de defectos de secuencia cuya cantidad en $P_n\# + P_{n+1}$ es R_n' por el Teorema 2.39, entonces

$$\pi(P_n\# + P_{n+1}) = \left(\prod_{k=2}^{n}(P_k - 1)\right) + n + 1 - R_n' .$$

Teorema 2.41. *Siendo cualquier* $xP_n\# - \delta$ *un número primo, con* $x, \delta \in N$ *, y* $P_{n+1} < \delta < \frac{P_n\#}{2}, P_{n+1}^2$, *entonces* δ *es con toda certeza un número primo.*

Demostración. Ya se sabe por la simetría secuencial, que los números primos de la primera sección de $xP_n\#$, y también de $P_n\#,$ son simétricos con la segunda sección de $xP_n\#$, pero si hay un $xP_n\# - \delta$ que sea primo, será primo a pesar del defecto de secuencia, y si $\delta < \frac{P_n\#}{2}$, entonces $xP_n\# - \delta$ es un número primo que está en la segunda sección de la simetría, y si $\delta < P_{n+1}^2$, entonces su número simétrico en la primera sección de ***1sim***$_n$ esta antes del defecto de secuencia, y $P_{n+1} < \delta$, ya que si $P_{n+1} = \delta$, es obvio que P_{n+1} es primo.

Ejemplo 2.1. Sea

$$2P_n\# = 2P_4\# = 2(7\#) = 2(210) = 420$$

Ahora sea $\delta = 83$, y 420-83=337, y 337 es un numero primo, y como $83 < \frac{P_4\#}{2} = 105$, y $83 < P_{4+1}^2 = 11^2 = 121$, entonces 83 es con toda certeza un numero primo.

3. Teorema fundamental de la teoría de la distribución de los números primos

Formula general de los números primos

En S_n, todo número primo mayor a 3 es de la forma:

$$P_{n+k+1} = \left(P_{n+1} + \gamma P_n\# + \sum_{k=1}^{z} D_k\right) < P_{n+1}^2$$

Tal que $P_{n+k+1} \in S_n$,

$$1 \leq z \leq \prod_{k=2}^{n}(P_k - 1), 0 \leq \gamma \leq 3$$ *y donde* $D_k \in C_n$.

Demostración. Por el Teorema 2.1 se sabe que las distancias $D_k \in C_n$ del sistema S_n construido hasta P_n, se empiezan a sumar desde P_{n+1}.

Ahora la expresión $\gamma P_n\#$ representa las repeticiones de C_n, y por el Teorema 2.2 se sabe que $C_n = P_n\#$, y $0 \leq \gamma \leq 3$ ya que por el Teorema 2.26 todo S_n con n>3 tiene defecto de secuencia.

En la sumatoria $\sum_{k=1}^{z} D_k$, $1 \leq z \leq Q_{n+1}(P_n - 1)$, ya que por el Teorema 2.14. La cantidad de distancias Q_n existentes en un C_n, es

$$Q_n = Q_{n-1}(P_n - 1) = \prod_{k=2}^{n}(P_k - 1)$$.

Ahora $\left(P_{n+1} + \gamma P_n\# + \sum_{k=1}^{z} D_k\right) < P_{n+1}^2$, ya que por el Teorema 2.8. Cada sistema S_n funcionará perfectamente en la determinación de números primos hasta llegar al cuadrado del primo P_{n+1}, siguiente al primo P_n hasta donde se construyó el sistema.

Y la fórmula de P_{n+1+k} expresa la forma de todo número primo mayor a 3, ya que 2 no es un P_{n+1} , y por lo tanto tampoco un P_{n+1+k}, y 3 si es un P_{n+1} pero no un P_{n+1+k}.

Esta fórmula de P_{n+1+k} siempre será utilizable, ya que por el Teorema 2.28. $P_{n+1}+D_1< P_{n+1}^2$.

Sin embargo, para utilizar esta fórmula se deben de construir completamente las distancias de cada secuencia $C_n \in S_n$, pero el valor de $C_n = P_n\#$, crece rápidamente al aumentar n, y como dice el Teorema 2.15, Q_{n+1} aumenta su proporción con respecto a Q_n al crecer el valor de n, de manera que para el cálculo de las distancias $D_k \in C_n$ se necesita la ayuda de una computadora para hacer los cálculos cada vez más extensos.

4. Otra Demostración del postulado de Bertrand

Como se ha visto anteriormente, las distancias de cada sistema se determinan con las distancias del sistema anterior, y algunas de ellas se unen por los productos de fusión, ahora considérese el siguiente caso extremo:

En S_1 los números primos se van determinando así: 3+2+2+2+2+2+2+2……..

Ahora supóngase que en S_2 los números primos se van determinando así: 3+2+4+4+4+4+4+4+….., en

S_3 : 3+2+4+8+8+8+8+…., y así en general los números primos se van construyendo con la suma a $P_2 = 3$ de las potencias de 2, así: 3+ (2+4+8+16+32+64+…..).

Ahora se sabe que

$$1 + a^1 + a^2 + a^3 + \ldots\ldots + a^k = \sum_{n=0}^{k} a^n = \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a}$$

(Grossman 1996, app 1, A-5).

De esta fórmula se tiene que $\sum_{n=1}^{k} a^n = \frac{a^{k+1} - a}{a - 1}$,

ahora si $a = 2$, entonces $\sum_{n=1}^{k} 2^n = 2^{k+1} - 2$

y $\frac{\left(\sum_{n=1}^{k} 2^n\right)}{2} + 1 = \frac{2^{k+1} - 2}{2} + 1 = 2^k$, así

$\sum_{n=1}^{k} 2^n - \frac{\left(\sum_{n=1}^{k} 2^n\right)}{2} - 1 = 2^{k+1} - 2 - 2^k$ =

$2 * 2^k - 2^k - 2 = 2^k(2 - 1) - 2$ = $2^k - 2$ =

$\sum_{n=1}^{k-1} 2^n$. Ahora sea $\beta = \sum_{n=1}^{k} 2^n$,

así que 3+ β = P_r , y 3+$\beta - \frac{\beta}{2} - 1$ =3+ $\frac{\beta}{2} - 1$ = P_{r-1}

ahora $2P_{r-1} = 6 + \beta - 2 = 4 + \beta$,
y $4 + \beta - 1$ =3+β $= 2P_{r-1} - 1 = P_r$, así
$P_{r-1} < P_r = 2P_{r-1} - 1, P_{r-1} < P_r < 2P_{r-1}$.

Ahora sea $0 < \delta < (P_r - P_{r-1})$ con $\delta \in$ +**R**,
así se cumple la desigualdad
$P_{r-1} + \delta < P_r < 2P_{r-1} + 2\delta$, y si
$\delta = (P_r - P_{r-1})$, entonces $P_{r-1} + \delta = P_r$,
y $P_r < P_{r+1} < 2P_r$.

Así se concluye que si n es un número real positivo mayor a 1, se tiene que $n < P < 2n$.

5. Conclusion

La distribución de los números primos parece aleatoria por la aparición aparentemente caótica de sus distancias, pero en realidad su distribución es sistemática, como se observó en la construcción de los sistemas de distribución y sus secuencias, pero a medida que se va determinando un nuevo número primo, este afecta la distribución y se crea un nuevo sistema con una nueva secuencia que cambia la manera de predecir números primos, y así los sistemas se van volviendo más complejos, con secuencias más extensas y distancias más variadas, así que los números primos presentan, como se puede llamar, una distribución compleja.

Bibliografía

Apostol, TM (1980), *Introducción a la teoría analítica de números*, edición en español, Editorial Reverte S.A., Barcelona.

Caro, VE (1937), *Los números*, Editorial Minerva S.A., Bogotá.

Grossman, S (1996), *Algebra lineal*. Quinta edición, McGraw-Hill, Bogotá.

Jiménez, LR, Gordillo, JE & Rubiano, GN (2004), *Teoría de números [para principiantes]*, segunda edición, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Mattson, HF (1993), *Discrete Mathematics*, John Wiley & Sons Inc., New Jersey.

Mora, W (2014), *Introducción a la teoría de números. Ejemplos y algoritmos*, primera edición, *Revista digital matemática, educación e internet*, Recuperado de: https://repositoriotec.tec.ac.cr/bitstream/handle/2238/6299/introducci%C3%B3n-teor%C3%ADa-n%C3%BAmeros.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Niven, I, Zuckerman, HS (1969). *Introducción a la teoría de números*, Limusa-Wiley, México.

Ross, KA., Wright, CR (1990), *Matemáticas discretas,* segunda edición, Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., México.

Vinogradov, I (1977), *Fundamentos de la teoría de los números*, segunda edición, Editorial MIR, Moscú.

Vorobiov, NN (1974). *Números de Fibonacci*, Editorial MIR, Moscú.