УДК 517.956
DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-41-48

Галина Михайловна Яковлева,
магистрант,
Забайкальский государственный университет
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30),
e-mail: y.g.m@mail.ru

Решение краевых задач для уравнения Лапласа на полуплоскости, ограниченной слабопроницаемой плёнкой и содержащей сильнопроницаемую плёнку

Рассмотрены краевые задачи для уравнения Лапласа на кусочно-однородной полуплоскости, ограниченной слабопроницаемой плёнкой и состоящей из двух квадрантов, разделённых сильнопроницаемой плёнкой. Методом свёртывания разложений Фурье решение задачи выражено в квадратурах через решение классической задачи Дирихле на однородной полуплоскости (без плёнок).

Ключевые слова: краевые задачи, сильнопроницаемая плёнка, слабопроницаемая плёнка, метод свёртывания разложений Фурье

При решении практических задач для управления потоками тепломассопереноса применяются сильно- и слабопроницаемые плёнки, моделирующие экраны, изоляторы, дренажи, проводники, мембраны и т. д. Поэтому большой интерес имеет исследование процессов тепломассопереноса в областях с плёночными включениями и плёночными границами. В математических моделях задачи с плёнками описываются краевыми задачами математической физики с обобщёнными условиями сопряжения и обобщёнными граничными условиями на плёнках. При этом для установившихся процессов искомые потенциалы внутри области удовлетворяют уравнению Лапласа. В литературе при решении краевых задач с плёнками, как правило, рассматриваются одиночные плёночные включения. В данной статье рассматривается комбинация плёночного включения и плёночной границы для различных типов плёнок.

Рассмотрим на кусочно-однородной полуплоскости $D(x \in R, y < 0)$, состоящей из двух квадрантов $D_1(x < 0, y < 0)$ и $D_2(x > 0, y < 0)$, для функций $u_i(x, y)$ в D_i задачу

$$\Delta u_1 = 0, \qquad Bu_1 + \partial_y u_{1|y=0} = 0, \qquad x < 0, \tag{1}$$

$$\Delta u_2 = 0, \qquad Bu_2 + \partial_y u_{2|y=0} = h(x), \qquad x > 0, \tag{2}$$

$$x = 0: \qquad u_2 = u_1, \qquad k_2\partial_x u_2 - k_1\partial_x u_1 = A\partial_x^2 u_1, \tag{3}$$

где B, A – положительные постоянные; $h(x)$ – заданная кусочно-непрерывная ограниченная при $x \in (0, \infty)$ функция, Δu – оператор Лапласа, постоянные $k_i > 0$ характеризуют проницаемость соответствующей зоны D_i, $\partial_y = \partial/\partial_y$, $\partial_x^2 = \partial^2/\partial x^2$. Граничные условия (1), (2) и условия сопряжения (3) моделируют соответственно условия на слабопроницаемой плёнке $y = 0$ с параметром $1/B$ и условия на сильнопроницаемой плёнке $x = 0$ с параметром A [1]. В задаче (1)–(3) граничные условия однородны при $x < 0$, что не умаляет общности, т. к. задача с однородными условиями при $x > 0$ решается аналогично, а в общем случае неоднородных граничных условий при $x \in R$ решение задачи имеет вид суммы решений указанных задач.

Наряду с задачей (1)–(3) рассмотрим на однородной полуплоскости $D(x \in R,$ $y < 0)$ аналогичную классическую задачу Дирихле с сохранением граничной функции

$$\Delta F = 0, \qquad y < 0; \qquad F_{|y=0} = f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ h(x), & x > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Отметим, что решение задачи Дирихле (4) строится в квадратурах по формуле Пуассона [2, с. 327]:

$$F(x, y) = -\frac{y}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{h(\xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}, \qquad y < 0.$$

Для кусочно-постоянной граничной функции

$$h_i(x) = \begin{cases} c_i, & x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin (x_i, x_{i+1} \end{cases}$$

(c_i, x_i, x_{i+1} – постоянные, $x_i > 0$) решение задачи Дирихле (4) строится в конечном виде

$$F_i(x, y) = \frac{c_i}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{x - x_{i+1}}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x - x_i}{y} \right). \tag{5}$$

При этом, аппроксимируя с заданной точностью произвольную кусочно-непрерывную граничную функцию $h(x)$ кусочно-постоянной функцией

$$h(x) = \sum_{i=1}^n h_i(x),$$

решение задачи Дирихле (4) получим в конечном виде (с той же точностью в силу корректности задачи Дирихле (4)):

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n F_i(x, y),$$

где функции $F_i(x, y)$ имеют вид (5). Отметим, что на практике граничные функции строятся приближённо посредством той или иной аппроксимации точечных опытных данных.

Методом свёртывания разложений Фурье [1; 3] выразим решение задачи (1)–(3) через решение $F(x, y)$ задачи Дирихле (4). Для этого выведем две формулы для функций, тождественно удовлетворяющих условиям на плёнках $y = 0$ и $x = 0$ (1)–(3). Рассмотрим две вспомогательные задачи.

Первая задача на однородной полуплоскости $D(x \in R, y < 0)$ имеет вид

$$\Delta v = 0, \qquad Bv + \partial_y v_{|y=0} = f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ h(x), & x > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Выразим решение $v(x, y)$ этой задачи через решение $F(x, y)$ задачи Дирихле (4).

Предположим сначала, что граничная функция $f(x)$ (4), (6) разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье $f_{1,2}(\lambda)$ [4, с. 529]:

$$f(x) = \int_0^\infty g(x, \lambda) d\lambda, \qquad g(x, \lambda) = f_1(\lambda) \sin \lambda x + f_2(\lambda) \cos \lambda x. \tag{7}$$

Отсюда, применяя метод Фурье, решение задачи Дирихле (4) получим в виде

$$F(x, y) = \int_0^\infty e^{\lambda y} g(x, \lambda) d\lambda, \qquad y < 0. \tag{8}$$

Будем искать решение задачи (6) также в виде интеграла Фурье

$$v(x, y) = \int_0^\infty a(\lambda) e^{\lambda y} g(x, \lambda) d\lambda, \qquad y < 0, \tag{9}$$

где $a(\lambda)$ – искомая функция, $g(x, \lambda)$ имеет вид (7), при этом функция $v(x, y)$ (9) удовлетворяет уравнению Лапласа (6) (при условии сходимости и дифференцируемости интеграла (9)). Из граничного условия (6) с учётом разложения (7) находим

$$a(\lambda) = \frac{1}{\lambda + B}.$$

Тогда функция (9) примет вид

$$v(x, y) = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda y} g(x, \lambda)}{\lambda + B} d\lambda, \qquad y < 0. \tag{10}$$

Из разложения (8) следует формула [1; 3]

$$\int_0^\infty e^{-Bt}F(x,y-t)dt = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda y}g(x,\lambda)}{\lambda+B}\,d\lambda, \qquad y<0, \tag{11}$$

где функция $g(x,\lambda)$ имеет вид (7). Отсюда решение (10) задачи (6) непосредственно выражается через решение $F(x,y)$ задачи Дирихле (4) по формуле без разложений Фурье

$$v(x,y) = \int_0^\infty e^{-Bt}F(x,y-t)dt, \qquad y<0. \tag{12}$$

Замечание 1. Полученная функция $v(x,y)$ (12) тождественно удовлетворяет граничному условию на слабопроницаемой плёнке (6) для произвольной дифференцируемой по y функции $F(x,y)$, удовлетворяющей граничному условию Дирихле (4), что проверяется непосредственно путём интегрирования по частям интеграла, входящего в $\partial_y v_{|y=0}$, в граничном условии (6).

Вторая вспомогательная задача рассматривается на всей кусочно-однородной плоскости $(x,y)\in R^2$, разделённой сильнопроницаемой плёнкой $x=0$ на две полуплоскости $G_1(x<0)$ и $G_2(x>0)$. Рассмотрим относительно функций $w_i(x,y)$ в G_i задачу

$$\Delta w_1 = 0, \qquad x<0; \qquad \Delta w_2 = H(x,y), \qquad x>0, \tag{13}$$

$$x=0: \qquad w_2 = w_1, \qquad k_2\partial_x w_2 - k_1\partial_x w_1 = A\partial_x^2 w_1, \tag{14}$$

где $H(x,y)$ – некоторая заданная функция, удовлетворяющая условию корректности аналогичной классической задачи (без плёнки) для уравнения Пуассона на однородной плоскости [2, с. 276]

$$\Delta V = \begin{cases} 0, & x\le 0,\\ H(x,y), & x>0. \end{cases} \tag{15}$$

При этом решение $V(x,y)$ задачи (15) строится методом функции Грина в квадратурах [5, с. 156]. Выразим решение задачи (13), (14) через решение задачи (15). Предположим сначала, что решение $V(x,y)$ задачи (15) при $x=0$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье $V_{1,2}(\lambda)$

$$V(0,y) = \int_0^\infty Q(y,\lambda)d\lambda, \qquad Q(y,\lambda) = V_1(\lambda)\sin\lambda y + V_2(\lambda)\cos\lambda y. \tag{16}$$

Тогда решение задачи (15) при $x \le 0$ (где функция $V(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа) представимо в виде интеграла Фурье

$$V(x,y) = \int_0^\infty e^{\lambda x} Q(y,\lambda) d\lambda, \qquad x \le 0 \tag{17}$$

(левая и правая части равенства (17) являются решением задачи Дирихле в полуплоскости $x \le 0$ для уравнения Лапласа с граничной функцией $V(0,y)$).

Будем искать решение задачи (13), (14) в виде разложений Фурье

$$w_1(x,y) = \int_0^\infty a_1(\lambda) e^{\lambda x} Q(y,\lambda) d\lambda, \qquad x < 0; \tag{18}$$

$$w_2(x,y) = V(x,y) + \int_0^\infty a_2(\lambda) e^{-\lambda x} Q(y,\lambda) d\lambda, \qquad x > 0, \tag{19}$$

где $a_i(\lambda)$ искомые функции, $V(x,y)$ – решение задачи (15), $Q(y,\lambda)$ – имеет вид (16), при этом функции $w_i(x,y)$ (18), (19) удовлетворяют соответствующему уравнению (13). Приравнивая в условиях сопряжения на плёнке (14) под знаками интегралов коэффициенты при функции $Q(y,\lambda)$, с учётом разложения (17) для функций $a_i(\lambda)$ получим систему алгебраических уравнений $1 + a_2 = a_1$, $k_2(1 - a_2) - k_1 a_1 = A\lambda a_1$, решение которой имеет вид

$$a_1(\lambda) = \frac{2k_2}{A(\lambda+\gamma)}, \qquad a_2(\lambda) = -1 + \frac{2k_2}{A(\lambda+\gamma)},$$

где

$$\gamma = \frac{k_1 + k_2}{A}. \tag{20}$$

Отсюда функции (18), (19) с учётом разложения (17) приводятся к виду

$$w_1(x,y) = \frac{2k_2}{A} \int_0^\infty \frac{e^{\lambda x} Q(y,\lambda)}{\lambda+\gamma} d\lambda, \qquad x < 0, \tag{21}$$

$$w_2(x,y) = V(x,y) - V(-x,y) + \frac{2k_2}{A} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x} Q(y,\lambda)}{\lambda+\gamma} d\lambda, \qquad x > 0. \tag{22}$$

Из разложения (17) следует формула, аналогичная формуле (11)

$$\int_0^\infty e^{-\gamma\tau} V(x-\tau,y) d\tau = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda x} Q(y,\lambda)}{\lambda+\gamma} d\lambda, \qquad x < 0,$$

где функция $Q(y, \lambda)$ имеет вид (16). Отсюда решение (21), (22) задачи (13), (14) непосредственно выражается через решение классической задачи (15) без разложений Фурье в виде

$$w_1(x,y) = \frac{2k_2}{A}\int_0^\infty e^{-\gamma\tau}V(x-\tau,y)d\tau, \qquad x<0, \tag{23}$$

$$w_2(x,y) = V(x,y) - V(-x,y) + \frac{2k_2}{A}\int_0^\infty e^{-\gamma\tau}V(-x-\tau,y)d\tau, \qquad x>0, \tag{24}$$

где постоянная $\gamma > 0$ имеет вид (20).

Замечание 2. Функции $w_i(x,y)$ (23), (24) тождественно удовлетворяют условиям сопряжения (14) на сильнопроницаемой плёнке $x = 0$ для произвольной дважды дифференцируемой по x функции $V(x,y)$, удовлетворяющей достаточно слабому условию на бесконечности

$$V(x,y) = O(e^{\alpha|x|}), \qquad \partial_x V(x,y) = O(e^{\alpha|x|}), \qquad x\to-\infty, \qquad \alpha<\gamma,$$

что проверяется непосредственно.

Решение исходной задачи (1)–(3) выражается в квадратурах через решение $F(x,y)$ задачи Дирихле (4) в виде композиции операторов (23), (24), (12) по формулам

$$u_1(x,y) = \frac{2k_2}{A}\int_0^\infty e^{-\gamma\tau}v(x-\tau,y)d\tau, \qquad x<0, \tag{25}$$

$$u_2(x,y) = v(x,y) - v(-x,y) + \frac{2k_2}{A}\int_0^\infty e^{-\gamma\tau}v(-x-\tau,y)d\tau, \qquad x>0, \tag{26}$$

где функция $v(x,y)$ имеет вид (12)

$$v(x,y) = \int_0^\infty e^{-Bt}F(x,y-t)dt, \qquad y<0.$$

Действительно, в силу замечания 2 функции $u_i(x,y)$ (25), (26) тождественно удовлетворяют условиям сопряжения (3) на сильнопроницаемой плёнке $x = 0$. Обозначая оператор граничного условия (6) на слабопроницаемой плёнке через $Mv = Bv + \partial_y v$, запишем это условие в виде

$$Mv(x,y)_{|y=0} = \begin{cases} 0, & x<0, \\ h(x), & x>0. \end{cases} \tag{27}$$

Отсюда функции (25), (26) удовлетворяют граничным условиям (1), (2) при $y = 0$

$$Mu_{1|y=0} = \frac{2k_2}{A} \int\limits_0^\infty e^{-\gamma\tau} Mv(x-\tau, y)_{|y=0}\, d\tau = 0, \qquad x < 0,$$

$$Mu_{2|y=0} = Mv(x, y)_{|y=0} - Mv(-x, y)_{|y=0} +$$

$$+\frac{2k_2}{A} \int\limits_0^\infty e^{-\gamma\tau} Mv(-x-\tau, y)_{|y=0}\, d\tau = h(x), \qquad x > 0.$$

Здесь учитывается замечание 1 и то, что первые аргументы x подынтегральных функций $Mv(x, y)$ меньше нуля, и для этих аргументов граничное условие (27) однородно. Уравнение Лапласа (1), (2) для функций $u_i(x, y)$ (25), (26) выполняется в силу выполнения уравнения Лапласа для функции $v(x, y)$ (6) при $x \in R$, $y < 0$.

Список литературы

1. Холодовский С. Е. О многослойных плёнках на границе полупространства // Математические заметки. 2016. Т. 99, вып. 3. С. 421–427.

2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

3. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 9. С. 1550–1556.

4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1962. Т. 3. 656 с.

5. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 735 с.

Статья поступила в редакцию 26.05.2019; принята к публикации 18.06.2019

Библиографическое описание статьи

Яковлева Г. М. Решение краевых задач для уравнения Лапласа на полуплоскости, ограниченной слабопроницаемой плёнкой и содержащей сильнопроницаемую плёнку // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2019. Т. 14, № 3. С. 41–48. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-41-48.

Galina M. Yakovleva,
Student undergraduate,
Transbaikal State University
(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, Russia, 672039),
e-mail: y.g.m@mail.ru

Solution of Boundary Value Problems for the Laplace Equation on a Half-Plane Bounded by a Weakly Permeable Film and Containing a Strongly Permeable Film

Boundary-value problems for the Laplace equation on a piecewise-homogeneous half-plane bounded by a weakly permeable film and consisting of two quadrants separated by a strongly permeable film are considered. By the method of convolution of Fourier expansions, the solution of the problem is expressed in quadratures by solving the classical Dirichlet problem on a homogeneous half-plane (without films).

Keywords: boundary value problems, strongly permeable film, weakly permeable film, the method of convolution of Fourier expansions

References

1. Holodovskij S. E. O mnogoslojnyh plenkah na granice poluprostranstva // Matematicheskie zametki. 2016. T. 99, vyp. 3. S. 421–427.
2. Tihonov A. N., Samarskij A. A. Uravneniya matematicheskoj fiziki. M.: Nauka, 1972. 735 s.
3. Holodovskij S. E. Metod svertyvaniya razlozhenij Fur'e v reshenii kraevyh zadach s peresekayushchimisya liniyami sopryazheniya // ZHurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. 2007. T. 47, № 9. S. 1550–1556.
4. Fihtengol'c G. M. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya. M.: Nauka, 1962. T. 3. 656 s.
5. Arsenin V. Ya. Metody matematicheskoj fiziki i special'nye funkcii. M.: Nauka, 1974. 735 s.

Received: May 26, 2019; accepted for publication June 18, 2019

Reference to article

Yakovleva G. M. Solution of Boundary Value Problems for the Laplace Equation on a Half-Plane Bounded by a Weakly Permeable Film and Containing a Strongly Permeable Film // Scholarly Notes of Transbaikal State University. 2019. Vol. 14, No 3. PP. 41–48. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-41-48.