УДК 517.956
DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-24-30

Святослав Евгеньевич Холодовский,
доктор физико-математических наук, профессор,
Забайкальский государственный университет
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30),
e-mail: hol47@yandex.ru

Решение краевых задач для уравнения Пуассона на полуплоскости, ограниченной плёнкой

Рассмотрены краевые задачи для уравнения Пуассона на полуплоскости с неоднородными граничными условиями типа слабо- и сильнопроницаемой плёнки на границе. Выведены формулы, выражающие решения рассмотренных задач через решения классических задач соответственно Дирихле и Неймана на полуплоскости. Доказаны теоремы существования и единственности.

Ключевые слова: краевые задачи, слабопроницаемая плёнка, сильнопроницаемая плёнка, метод свёртывания разложений Фурье

При экранировании загрязнённых зон, звуко- и теплоизоляции, при производстве композитных материалов, в нанотехнологиях и т.д. широко применяются разнообразные плёночные покрытия соответствующих объектов. Поэтому большой интерес имеет исследование процессов тепломассопереноса в областях, ограниченных сильно- и слабопроницаемыми плёнками. При решении задач с плёночными включениями, как правило, рассматриваются однородные уравнения или однородные граничные условия [1–5]. В данной статье рассмотрены неоднородные уравнения и граничные условия и выведены формулы, выражающие решения рассмотренных задач с плёнками в квадратурах.

1. Слабопроницаемая плёнка на границе полуплоскости. Рассмотрим на полуплоскости $D(x \in R,\ y < 0)$ для функции $u(x, y)$ краевую задачу

$$\Delta u = H(x, y), \qquad bu + u_{y|y=0} = h(x), \tag{1}$$

где $b > 0$ – постоянная; $H(x, y)$ и $h(x)$ – заданные функции, Δu – оператор Лапласа, буквенные индексы обозначают соответствующие частные производные. Граничное условие (1) моделирует условие на слабопроницаемой плёнке $y = 0$ с параметром $1/b$ [3]. Функции $h(x)$ и $H(x, y)$ (1) предполагаются такими, для которых классическая задача Дирихле для уравнения Пуассона на полуплоскости $D(x \in R,\ y < 0)$ относительно функции $F(x, y)$ вида

$$\Delta F = H_1(x, y), \qquad y < 0; \qquad F_{|y=0} = h(x) \tag{2}$$

корректна, где

$$H_1(x, y) = bH(x, y) + H_y(x, y). \tag{3}$$

Последняя задача (2) решается методом функции Грина, и её решение выражается через заданные функции в квадратурах [6, с. 156]

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{0} G(x, y, \xi, \eta) H_1(\xi, \eta) d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \frac{\partial G(x, y, \xi, 0)}{\partial \eta} d\xi, \tag{4}$$

где $G(x, y, \xi, \eta)$ – функция Грина задачи (2)

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}.$$

С помощью метода свёртывания разложений Фурье [3; 4] выразим решение задачи (1) через решение $F(x, y)$ (4) классической задачи (2).

Рассмотрим вспомогательную задачу на полуплоскости $y < 0$ относительно функции $v(x, y)$ для уравнения Лапласа с граничным условием (1):

$$\Delta v = 0, \qquad y < 0; \qquad bv + v_{y|y=0} = h(x). \tag{5}$$

Выразим решение этой задачи через решение $F_1(x, y)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta F_1 = 0, \qquad y < 0; \qquad F_{1|y=0} = h(x). \tag{6}$$

Предположим сначала, что граничная функция $h(x)$ (5), (6) разлагается в интеграл Фурье

$$h(x) = \int_{0}^{\infty} g(x, \lambda) d\lambda, \qquad g(x, \lambda) = g_1(\lambda) \sin \lambda x + g_2(\lambda) \cos \lambda x, \tag{7}$$

где $g_{1,2}(\lambda)$ – коэффициенты Фурье функции $h(x)$

$$g_1(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \sin \lambda x \, dx, \qquad g_2(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cos \lambda x \, dx. \tag{8}$$

Отсюда, применяя метод Фурье, решение задачи Дирихле (6) получим в виде

$$F_1(x,y) = \int_0^\infty e^{\lambda y} g(x,\lambda)d\lambda, \qquad y < 0. \tag{9}$$

Решение задачи (5) также будем искать в виде разложения Фурье

$$v(x,y) = \int_0^\infty p(\lambda) e^{\lambda y} g(x,\lambda)d\lambda, \qquad y < 0, \tag{10}$$

где $p(\lambda)$ – искомая функция. Функция $v(x,y)$ (10) при $y < 0$ удовлетворяет уравнению Лапласа (5) (при условии сходимости и дифференцируемости интеграла (10)). С учётом разложения функции $h(x)$ (7) из граничного условия (5) для функции $p(\lambda)$ получим алгебраическое уравнение, решение которого имеет вид

$$p(\lambda) = \frac{1}{\lambda + b}.$$

Отсюда решение (10) задачи (5) получим в виде

$$v(x,y) = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda y} g(x,\lambda)}{\lambda + b} d\lambda, \qquad y < 0. \tag{11}$$

Найденное решение (11) задачи (5) содержит двукратные несобственные интегралы (внешний и внутренний в коэффициентах Фурье (8)) от осциллирующих тригонометрических функций. При этом граничная функция $h(x)$ должна удовлетворять необходимому условию [7, с. 529]

$$h(x) \to 0, \qquad x \to \pm\infty. \tag{12}$$

Заменяя в разложении $F_1(x,y)$ (9) переменную y на $y - t$, умножая полученное равенство на e^{-bt} и интегрируя по $t \in (0,\infty)$, получим формулу

$$\int_0^\infty e^{-bt} F_1(x, y-t)dt = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda y} g(x,\lambda)}{\lambda + b} d\lambda, \qquad y < 0.$$

Отсюда решение (11) задачи (5) непосредственно выражается через решение $F_1(x,y)$ задачи Дирихле (6) по формуле

$$v(x,y) = \int_0^\infty e^{-bt} F_1(x, y-t)dt. \tag{13}$$

Решение (13) задачи (5) с одной стороны проще решения (11), полученного методом Фурье, а с другой стороны решение (13) справедливо для более широкого класса граничных функций $h(x)$

$$h(x) = O(e^{\gamma|x|}), \qquad x \to \pm\infty, \qquad 0 < \gamma < b \tag{14}$$

по сравнению с классом функций (12).

Представим решение исходной задачи (1) в виде (13)

$$u(x,y) = \int\limits_0^\infty e^{-bt} F(x, y-t)dt, \tag{15}$$

где функция $F(x,y)$ принадлежит классу (14) и удовлетворяет граничному условию Дирихле (2). При этом функция (15) удовлетворяет граничному условию (1) тождественно для любой дифференцируемой функции $F(x,y)$ класса (14). Пусть функция $F(x,y)$, кроме граничного условия Дирихле (2), удовлетворяет в полуплоскости $y < 0$ уравнению Пуассона (2): $\Delta F = H_1(x,y)$ с некоторой правой частью $H_1(x,y)$. Подберём функцию $H_1(x,y)$ так, чтобы функция $u(x,y)$ (15) удовлетворяла уравнению Пуассона (1): $\Delta u = H(x,y)$ с заданной функцией $H(x,y)$. Отсюда с учётом уравнения (2): $\Delta F = H_1(x,y)$ для функции $H_1(x,y)$ получим интегральное уравнение

$$\int\limits_0^\infty e^{-bt} H_1(x, y-t)dt = H(x,y). \tag{16}$$

Для нахождения функции $H_1(x,y)$ продифференцируем уравнение (16) по y и вычислим полученный интеграл по частям:

$$\int\limits_0^\infty e^{-bt} \frac{\partial H_1(x, y-t)}{\partial z} dt = H_1(x,y) - b\int\limits_0^\infty e^{-bt} H_1(x, y-t)dt = H_y(x,y),$$

где $z = y - t$, при этом в формуле интегрирования по частям полагаем $u(t) = e^{-bt}$, $dv(t) = -b\partial H_1/\partial z \cdot dt \Rightarrow du(t) = -e^{-bt}dt$, $v(t) = -H_1(x, y-t)$. Отсюда с учётом равенства (16) найдём функцию $H_1(x,y)$ в виде (3).

Теорема 1. *Если функция $F(x,y)$ является решением корректной задачи Дирихле (2), то решение задачи (1) существует, единственно и выражается через функцию $F(x,y)$ по формуле (15).*

Существование решения задачи (1) в виде (15) доказано выше.

Функция (15) представляет собой оператор $u(x,y) = A[F(x,y)]$, действующий на функцию $F(x,y)$ по одной переменной y. Построим оператор, обратный оператору A. Для этого, дифференцируя равенство (15) по y и вычисляя полученный интеграл по частям, найдём

$$F(x,y) = bu(x,y) + u_y(x,y), \tag{17}$$

где $u(x,y)$ – решение задачи (1). Полученная функция (17) с учётом условий задачи (1) удовлетворяет условиям задачи (2), что проверяется непосредственно. При этом функция $F(x,y)$ по формуле (17) и функция $u(x,y)$ по формуле (15) определяются однозначно. Отсюда в силу корректности задачи (2) следует единственность решения вида (15) задачи (1). Теорема доказана.

2. Сильнопроницаемая плёнка на границе полуплоскости. Пусть полуплоскость $D(x \in R, y < 0)$ ограничена сильнопроницаемой плёнкой с параметром $1/a$. Для функции $u(x,y)$ при $y < 0$ рассмотрим соответствующую задачу [3]

$$\Delta u = H(x,y), \qquad au_y + u_{yy|y=0} = h(x), \tag{18}$$

где функции $H(x,y)$ и $h(x)$ предполагаются такими, для которых классическая задача Неймана вида

$$\Delta F = H_1(x,y), \qquad y < 0; \qquad F_{y|y=0} = h(x) \tag{19}$$

корректна, где

$$H_1(x,y) = aH(x,y) + H_y(x,y). \tag{20}$$

Решение задачи (19) строится в квадратурах [6, с. 156]

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{0} G(x,y,\xi,\eta) H_1(\xi,\eta) d\eta - \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\xi) G(x,y,\xi,0) d\xi, \tag{21}$$

где $G(x,y,\xi,\eta)$ – функция Грина задачи (19)

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi} \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] + \frac{1}{4\pi} \ln[(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2].$$

Решение задачи (18) будем искать в виде (15)

$$u(x,y) = \int\limits_0^{\infty} e^{-at} F(x, y-t) dt, \tag{22}$$

где функция $F(x,y)$ – решение задачи (19). При этом функция (22) удовлетворяет граничному условию (18) тождественно для любой функции $F(x,y)$, удовлетворяющей условию Неймана (19) класса (14). Подставляя функцию $u(x,y)$ (22) в уравнение Пуассона (18) с учётом уравнения (19), получим интегральное уравнение относительно функции $H_1(x,y)$ вида

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-at} H_1(x, y-t)dt = H(x, y).$$

Решение этого уравнения строится аналогично уравнению (16) и имеет вид (20).

Теорема 2. *Если функция $F(x, y)$ является решением корректной задачи Неймана (19) (с точностью до аддитивной постоянной), то решение задачи (18) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и выражается через функцию $F(x, y)$ по формуле (22).*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1, при этом оператор, обратный оператору (22), имеет вид

$$F(x, y) = au(x, y) + u_y(x, y).$$

Таким образом, решения задач (1) и (18) строятся по формулам (15), (4) и (22), (21) в квадратурах.

Список литературы

1. Васильев Б. А. Плоская стационарная задача теории теплопроводности для составной клиновидной области // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20, № 3. С. 530–533.

2. Холодовский С. Е. О многослойных плёнках на границе полупространства // Математические заметки. 2016. Т. 99, вып. 3. С. 421–427.

3. Холодовский С. Е. Решение краевой задачи для уравнения Лапласа в кусочно-однородной полуплоскости, ограниченной слабопроницаемой плёнкой // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2018. Т. 25, вып. 2. С. 187–188.

4. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 9. С. 1550-1556.

5. Холодовский С. Е. Метод свёртывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1204–1208.

6. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 735 с.

7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1962. Т. 3. 656 с.

Статья поступила в редакцию 29.04.2019; принята к публикации 18.05.2019

Библиографическое описание статьи

Холодовский С. Е. Решение краевых задач для уравнения Пуассона на полуплоскости, ограниченной плёнкой // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2019. Т. 14, № 3. С. 24–30. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-24-30.

Svyatoslav Ye. Kholodovskii,
Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Transbaikal State University
(30 Aleksandro-Zavodskaya st., Chita, Russia, 672039),
e-mail: hol47@yandex.ru

Solving Boundary Value Problems for the Poisson Equation on a Half-Plane Bounded by a Film

Boundary-value problems for the Poisson equation on half-planes with inhomogeneous boundary conditions of the type of weakly and strongly permeable films on the boundary are considered. The formulas expressing solutions to the problems considered through solutions of the classical problems of Dirichlet and Neumann, respectively, on a half-plane, are derived. The theorems of existence and uniqueness are proved.

Keywords: boundary value problems, weakly permeable film, strongly permeable film, method of convolution of Fourier expansions

References

1. Vasil'ev B. A. Ploskaya stacionarnaya zadacha teorii teploprovodnosti dlya sostavnoj klinovidnoj oblasti // Differencial'nye uravneniya. 1984. T. 20, № 3. S. 530–533.

2. Holodovskij S. E. O mnogoslojnyh plyonkah na granice poluprostranstva // Matematicheskie zametki. 2016. T. 99, vyp. 3. S. 421–427.

3. Holodovskij S. E. Reshenie kraevoj zadachi dlya uravneniya Laplasa v kusochno-odnorodnoj polupploskosti, ogranichennoj slabopronicaemoj plyonkoj // Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki. 2018. T. 25, vyp. 2. S. 187–188.

4. Holodovskij S. E. Metod svyortyvaniya razlozhenij Fur'e v reshenii kraevyh zadach s peresekayushchimisya liniyami sopryazheniya // ZHurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. 2007. T. 47, № 9. S. 1550-1556.

5. Holodovskij S. E. Metod svyortyvaniya razlozhenij Fur'e. Sluchaj treshchiny (zavesy) v neodnorodnom prostranstve // Differencial'nye uravneniya. 2009. T. 45, № 8. S. 1204–1208.

6. Arsenin V. Ya. Metody matematicheskoj fiziki i special'nye funkcii. M.: Nauka, 1974. 735 s.

7. Fihtengol'c G. M. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya. M.: Nauka, 1962. T. 3. 656 s.

Received: April 29, 2019; accepted for publication May 18, 2019

Reference to article

Kholodovskii S. Ye. Solving Boundary Value Problems for the Poisson Equation on a Half-Plane Bounded by a Film // Scholarly Notes of Transbaikal State University. 2019. Vol. 14, No 3. PP. 24–30. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-24-30.