ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS. ANALYTICAL METHODS

УДК 532.546
DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-6-11

Ирина Анатольевна Ефимова,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Забайкальский институт предпринимательства
(672086, Россия, г. Чита, ул. Ленинградская, 16),
e-mail: yefimova79@yandex.ru

О фильтрации жидкости под точечной плотиной в двухслойном грунте, ограниченном снизу водоупором

Рассмотрены смешанные краевые задачи типа (1), (2) для уравнения Лапласа в однородной и кусочно-однородной полосе с условиями сопряжения на горизонтальной линии. Задачи моделируют фильтрацию жидкости под точечной плотиной, когда область фильтрации ограничена снизу водоупором. Решения задач получены в явном виде.

Ключевые слова: краевые задачи в кусочно-однородной полосе, условия сопряжения, фильтрация жидкости под плотиной

Рассмотрим в вертикальной плоскости с декартовыми координатами x, y фильтрацию жидкости под точечной плотиной, когда ось x расположена вдоль линии бьефов ($x > 0$ – нижний бьеф, $x < 0$ – верхний бьеф) и область фильтрации имеет вид горизонтальной полосы $D = (x \in R) \times (-\pi/2 < y < 0)$. Пусть полоса D ограничена снизу непроницаемым грунтом (водоупором) $y = -\pi/2$.

1. Рассмотрим сначала случай однородной полосы D с постоянной проницаемостью. Отсюда, отсчитывая давление от давления в нижнем бьефе, для потенциала $f(x, y)$ в полосе D получим смешанную краевую задачу вида [1; 2, с. 37]:

$$\Delta_{xy} f = 0, \qquad \partial_y f_{|y=-\pi/2} = 0, \qquad f_{|y=0} = \begin{cases} p, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Delta_{xy} = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ – оператор Лапласа, $\partial_{xx} = \partial^2/\partial x^2$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $p < 0$ – постоянная.

Для решения задачи (1) рассмотрим аналитическую функцию $\zeta = e^z$, отображающую точки плоскости $z = x + iy$ на точки плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. При этом полоса D конформно отображается на квадрант $D_0(\xi > 0, \eta < 0)$, где

$$\xi = e^x \cos y, \qquad \eta = e^x \sin y. \tag{2}$$

В переменных ξ, η задача (1) для функции $f_1(\xi, \eta) = f(x, y)$ в квадранте D_0 примет вид

$$\Delta_{\xi\eta} f_1 = 0, \qquad \partial_\xi f_{1|\xi=0} = 0, \qquad f_{1|\eta=0} = \begin{cases} p, & 0 < \xi < 1, \\ 0, & 1 < \xi < \infty. \end{cases} \tag{3}$$

Соответствующая задача для функции Грина $G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ в квадранте D_0 имеет вид

$$\Delta_{\xi\eta} G = \delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0), \qquad \partial_\xi G_{|\xi=0} = 0, \qquad G_{|\eta=0} = 0, \tag{4}$$

где $\delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)$ – дельта-функция Дирака [2, с. 385]. Функция Грина G (4) строится методом отражения и имеет вид

$$G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = \frac{1}{4\pi}[\, l(\xi_0, \eta_0) - l(\xi_0, -\eta_0) - l(-\xi_0, -\eta_0) + l(-\xi_0, \eta_0)],$$

где $l(\xi_0, \eta_0) = \ln[(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2]$. Из формулы Грина для области D_0 вида [2, с. 163]

$$\iint\limits_{D_0} (f_1 \Delta_{\xi\eta} G - G \Delta_{\xi\eta} f_1) d\xi d\eta = \int\limits_{\partial D_0} \left(f_1 \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial f_1}{\partial n} \right) ds$$

с учётом условий задач (3), (4) и основного свойства δ-функции [2, с. 395] найдём

$$f_1(\xi_0, \eta_0) = p \int\limits_0^1 \frac{\partial G}{\partial \eta}_{|\eta=0} d\xi, \tag{5}$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали к границе ∂D_0 квадранта D_0,

$$\frac{\partial G}{\partial \eta}_{|\eta=0} = -\frac{\eta_0}{\pi} \left[\frac{1}{(\xi - \xi_0)^2 + \eta_0^2} + \frac{1}{(\xi + \xi_0)^2 + \eta_0^2} \right].$$

Отсюда, вычисляя интеграл (5) и переходя по формулам (2) на плоскость (x, y), получим решение исходной задачи (1) в элементарных функциях в конечном виде

$$f(x,y) = \frac{p}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sh} x}{\sin y} + \frac{p}{2}. \tag{6}$$

2. Рассмотрим случай кусочно-однородной полосы D, состоящей из двух слоёв $D_1 = (x \in R)\times(-l < y < 0)$ и $D_2 = (x \in R)\times(-\pi/2 < y < -l)$ с различной постоянной проницаемостью k_i в D_i, где $0 < l < \pi/2$. Отсюда для потенциалов $u_i(x,y)$ в D_i задача имеет вид [1]

$$\Delta_{xy}u_i = 0, \qquad \partial_y u_{2|y=-\pi/2} = 0, \qquad u_{1|y=0} = \varphi(x) = \begin{cases} p, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$y = -l: \qquad u_1 = u_2, \qquad k_1\partial_y u_1 = k_2\partial_y u_2, \tag{8}$$

где условия сопряжения (8) выражают непрерывность потенциала и нормальной скорости на линии разрыва проницаемости. Аналогичная задача в двухслойной полуплоскости рассмотрена в статье [3].

Задача (7), (8) является задачей сопряжения со смешанными граничными условиями первого и второго рода на границах полосы D при кусочно-постоянной граничной функции. При этом граничная функция $\varphi(x)$ (7) не разлагается в интеграл Фурье, т.е. здесь классический метод Фурье неприменим.

Представим решение задачи (7), (8) в виде

$$u_1(x,y) = f(x,y) + v_1(x,y), \qquad -l < y < 0, \tag{9}$$

$$u_2(x,y) = f(x,y) + v_2(x,y), \qquad -\frac{\pi}{2} < y < -l, \tag{10}$$

где функция $f(x,y)$ является решением задачи (1) и имеет вид (6). Отсюда для функций $v_i(x,y)$ в слоях D_i получим задачу

$$\Delta_{xy}v_i = 0, \qquad i = 1,2; \qquad v_{1|y=0} = 0, \qquad \partial_y v_{2|y=-\pi/2} = 0, \tag{11}$$

$$y = -l: \qquad v_1 = v_2, \qquad k_1\partial_y v_1 - k_2\partial_y v_2 = (k_2 - k_1)\partial_y f(x,-l), \tag{12}$$

где

$$\partial_y f(x,-l) = \frac{p\operatorname{sh} x\cos l}{\pi(\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 l)}.$$

При этом последняя функция является нечётной и в силу $\partial_y f(x,-l) \to 0$ при $x \to \pm\infty$ эта функция разлагается в интеграл Фурье [4, с. 529]:

$$\partial_y f(x,-l) = \int\limits_0^\infty g(x,\lambda)d\lambda, \tag{13}$$

где

$$g(x,\lambda) = -\frac{2p\sin\lambda x\,\cos l}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh} t\,\sin\lambda t}{\operatorname{sh}^2 t + \sin^2 l}\,dt. \tag{14}$$

Будем искать функции $v_i(x,y)$ (11), (12) также в виде разложений Фурье:

$$v_1(x,y) = \int\limits_0^\infty a_1(\lambda) g(x,\lambda)\operatorname{sh}\lambda y\,d\lambda, \qquad -l < y < 0, \tag{15}$$

$$v_2(x,y) = \int\limits_0^\infty a_2(\lambda) g(x,\lambda)\operatorname{ch}\lambda(y+\pi/2)\,d\lambda, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < -l, \tag{16}$$

где $a_i(\lambda)$ – неизвестные функции. Отсюда функции (15), (16) удовлетворяют уравнению и граничным условиям (11) (при условии сходимости и дифференцируемости интегралов (15), (16)). Из условий сопряжения (12) с учётом разложения (13) для функций $a_i(\lambda)$ получим систему линейных уравнений

$$a_1\operatorname{sh}\lambda l + a_2\operatorname{ch}\lambda(\pi/2 - l) = 0, \qquad k_1 a_1\operatorname{ch}\lambda l - k_2 a_2\operatorname{sh}\lambda(\pi/2 - l) = \frac{k_2 - k_1}{\lambda},$$

решение которой найдём в виде

$$a_1(\lambda) = \frac{2(k_2 - k_1)\operatorname{ch}\lambda b}{\lambda h(\lambda)}, \qquad a_2(\lambda) = \frac{2(k_1 - k_2)\operatorname{sh}\lambda l}{\lambda h(\lambda)}, \tag{17}$$

где $h(\lambda) = 2(k_2\operatorname{sh}\lambda b\operatorname{sh}\lambda l + k_1\operatorname{ch}\lambda b\operatorname{ch}\lambda l)$, $b = \pi/2 - l$, при этом $h(\lambda) > 0$ при $0 \le \lambda < \infty$. Отсюда решение задачи (7), (8) строится по формулам (9), (10), (15), (16), (17):

$$u_1(x,y) = f(x,y) + 2(k_2 - k_1)\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\lambda y\,\operatorname{ch}\lambda(\pi/2 - l)}{\lambda h(\lambda)}\,g(x,\lambda)\,d\lambda, \qquad -l < y < 0, \tag{18}$$

$$u_2(x,y) = f(x,y) - 2(k_2 - k_1)\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\lambda l\,\operatorname{ch}\lambda(y+\pi/2)}{\lambda h(\lambda)}\,g(x,\lambda)\,d\lambda, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < -l, \tag{19}$$

где $h(\lambda) = (k_1 + k_2)\operatorname{ch}\lambda\pi/2 + (k_1 - k_2)\operatorname{ch}\lambda(2l - \pi/2)$, функции $f(x,y)$ и $g(x,\lambda)$ имеют соответственно вид (6) и (14). При этом подынтегральные функции в выражениях

(18), (19) при $\lambda \to \infty$ имеют асимптотику $O(\lambda^{-1}e^{-\lambda|l+y|})$ для соответствующих значений y. При $\lambda \to 0$ указанные подынтегральные функции имеют конечные пределы. Отсюда интегралы (18), (19) и их производные сходятся.

Список литературы

1. Ефимова И. А. Метод функции Грина в задачах фильтрации под плотинами в неоднородных анизотропных грунтах: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Чита, 1990. 24 с.

2. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 432 с.

3. Ефимова И. А. Решение задачи фильтрации жидкости под точечной плотиной в двухслойной полуплоскости // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2018. Т. 13, № 3. С. 6–10.

4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969. Т. 3. 656 с.

Статья поступила в редакцию 22.04.2019; принята к публикации 27.05.2019

Библиографическое описание статьи

Ефимова И. А. О фильтрации жидкости под точечной плотиной в двухслойном грунте, ограниченном снизу водоупором // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2019. Т. 14, № 3. С. 6–11. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-6-11.

Irina A. Efimova,
Candidate of Physics and Mathematics,
Associate Professor,
Transbaikal Institute of Entrepreneurship
(16 Leningradskaya st., Chita, 672086, Russia),
e-mail: yefimova79@yandex.ru

Filtration of a Fluid Under a Point Dam in a Two-Layer Primer Bounded from Below by an Aquitard

Mixed boundary value problems of type (1,2) for the Laplace equation in a homogeneous and piecewise homogeneous strip with conjugation conditions on a horizontal line are considered. The problems simulate the filtration of a fluid under a point dam when the filtration area is bounded from below by an aquitard. Solutions of the problems are obtained in an explicit form.

Keywords: boundary value problems in a piecewise-homogeneous strip, conjugation conditions, filtration of a fluid under a dam

References

1. Efimova I. A. Metod funktsii Grina v zadachakh filtratsii pod plotinami v neodnorodnykh anizotropnykh gruntakh: avtoref. dis. … kand. fiz.-mat. nauk: 01.02.05. Chita, 1990. 24 s.

2. Arsenin V. Ya. Metody matematicheskoy fiziki i spetsialnyye funktsii. M.: Nauka. 1974. 432 s.

3. Efimova I. A. Resheniye zadachi filtratsii zhidkosti pod tochechnoy plotinoy v dvukhsloynoy polupploskosti // Uchenyye zapiski Zabaykalskogo gosudarstvennogo universiteta. 2018. T. 13, № 3. S. 6–10.

4. Fikhtengolts G. M. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. M.: Nauka, 1969. T. 3. 656 s.

Received: April 22, 2019; accepted for publication May 27, 2019

Reference to article

Efimova I. A. Filtration of a Fluid Under a Point Dam in a Two-Layer Primer Bounded from Below by an Aquitard // Scholarly Notes of Transbaikal State University. 2019. Vol. 14, No. 3. PP. 6–11. DOI: 10.21209/2308-8761-2019-14-3-6-11.