BREVE APRESENTAÇÃO DA *GEOMETRIA* DE DESCARTES

José Portugal dos Santos Ramos [1]

RESUMO: A *Geometria* foi publicada em 1637, acompanhando o *Discurso do Método*. A *Geometria* é constituída por três Livros: o primeiro trata dos "problemas que podem ser construídos ao se utilizar apenas círculos e linhas retas"; o segundo explica "a natureza das curvas"; e o terceiro trata da construção de "problemas sólidos e hipersólidos". Um dos principais feitos de Descartes na *Geometria* foi mostrar que o laboro dos antigos geômetras – destacando-se, dentre eles, Euclides (*Os Elementos*), Apolônio (*Cônicas*) e, sobretudo, Pappus (*Coleção Matemática*) – a partir das definições, postulados, axiomas, teoremas e secções cônicas, deixara muito a desejar, e diversas de suas resoluções eram mais o resultado de engenhosas resoluções particulares de problemas específicos, que a formulação e a aplicação de um método que possibilitasse a generalização das soluções. É manifestamente um tal método que Descartes descobre mediante a solução do problema de Pappus e o desenvolve ao longo da *Geometria*, obra que teve um impacto revolucionário no desenvolvimento da matemática e da filosofia moderna.

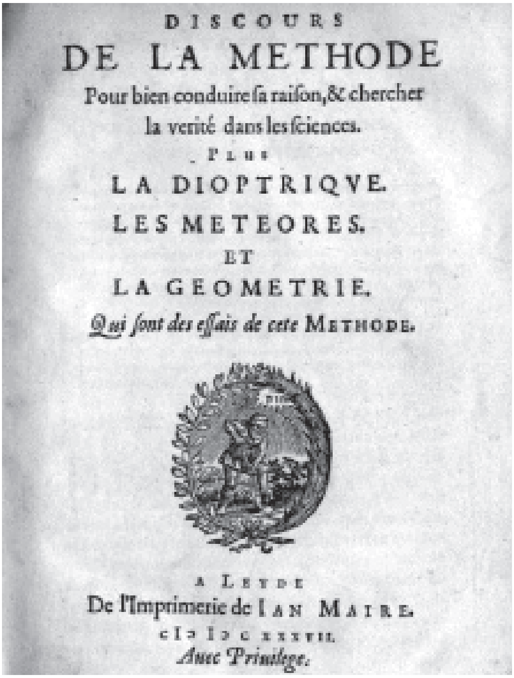
PALAVRAS-CHAVE: *A Geometria*; Matemáticas; Método; Descartes.

ABSTRACT: *The Geometry* was first published in 1637 as an appendix to the *Discourse on the method*. *The Geometry* comprises there Books: the first dealing with "problems that can be constructed using only circles and straight lines"; the second dealing with "the nature of curves"; and the third with the construction of "solid and supersolid problems". One of Descartes's most remarkable accomplishments in *The Geometry* was to display that the work of the ancient geometers – calling attention to Euclid (*Elements*), Apollonius (*Conics*), Pappus (*Mathematical Collection*) – through definitions, postulates, axioms, theorems and conic sections, left a great deal to be desired, and many of their results were more often the result of ingenious particular resolutions of specific problems than the formulation and application of a method that enables the solutions' generalization. It is clearly such a method that Descartes discovers and develops in the *Geometry*, a treatise that had a revolutionary impact on the development of mathematics and of modern philosophy.

KEYWORDS: *The Geometry*; Mathematics; Method; Descartes.

BREVE APRESENTAÇÃO DA *GEOMETRIA* DE DESCARTES

No ano de 1637, em Leyde, foi publicada por Jan Maire uma coleção em língua francesa de quatro obras inéditas de um autor anônimo residente na Holanda na década de 1620 (AT, VI, V-VI). Dentre estas obras destaca-se *A Geometria*, por tratar diretamente dos objetos pelos quais Descartes concebeu os raciocínios que possibilitassem a constituição de um método inovador.


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIƆ IƆ C XXXVII.
Avec Privilege.

A publicação organizada por Charles Adam e Paul Tannery seguiu a publicação de 1637 e outras duas edições posteriores. Tais edições referem-se àquelas realizadas por Schooten. Sabe-se *que A Geometria*[2] foi mais difundida quando Schooten traduziu a obra para o latim e a publicou com um conjunto de comentários e explicações em 1639 (AT, VI, V-VI). Acrescenta-se que, no ano de 1659, Schooten publicou uma nova edição da obra com comentários mais detalhados e com explicações de Beaune, Hudde e Heuraet.

A *GEOMETRIA* DE DESCARTES: A PROPOSTA DE UM MÉTODO INOVADOR

A Geometria é constituída por três Livros / Capítulos. O Livro I trata de problemas que podem ser construídos apenas com o auxílio de *círculos* e *linhas retas*, o Livro II apresenta a natureza das *linhas curvas* e o Livro III descreve os *hipersólidos*.

A *Geometria*[3] é um ensaio que esclarece a dimensão do espírito lógico-matemático do método de Descartes.[4] Embora seja um dos três ensaios que seguem o *Discurso do método*, a obra em muito se diferencia do texto do *Discurso*. Isso porque a exposição da *Geometria* é estabelecida apenas em articulações de questões matemáticas. Sustento, pois, que *A Geometria*, a despeito de sua aridez argumentativa, revela como Descartes concebe o *modus operandi* do método que inventara a partir dos raciocínios de "ordem e medida". Nesta perspectiva, defendo que a lógica matemática de Descartes é tomada como o modo de raciocínio que possibilita o acesso de juízos claros e evidentes. Descartes relata que os raciocínios matemáticos vão além daquilo que define o objeto dos geômetras como postulados, axiomas e teoremas. Por isso, a aplicabilidade das operações matemáticas extrapola a natureza mesma do objeto dos geômetras. Isso porque é requisitada para o encadeamento do raciocínio a legitimidade desse objeto matemático.

No *Discurso do método* de 1637, Descartes alega que os preceitos lógicos são estabelecidos por meio de uma "longa cadeia de razões de que os geômetras se servem para chegar às suas mais difíceis demonstrações" (AT, VI, 19). Tal cadeia de razões é assim anunciada: (1) prescrevendo que nunca se deve aceitar nenhuma proposição como verdadeira sem o conhecimento de sua *evidência* (AT, VI, 18);[5] (2) determinando a necessidade de dividir cada uma das dificuldades que se examine em tantas parcelas quantas fosse possível e necessário para de modo mais simples *resolvê-las* (AT, VI, 18);[6] (3) propondo que se conduzam por *ordem* os raciocínios, começando pelos objetos simples (e, por isso, mais fáceis de conhecer) até o conhecimento dos mais *compostos* e, assim, supondo uma determinada *ordem* mesmo entre aqueles objetos que não se precedem naturalmente uns aos outros (AT, VI, 18-19);[7] (4) e, por fim, efetuando *enumerações completas* e *revisões gerais*, para que não haja a mínima possibilidade de se estar omitindo algum dado do exame (AT, VI, 19).[8]

Sustento que Descartes expõe no *Discurso* os preceitos do seu método, mas que, com isso, ele apenas pretende tratar do método, ao invés de ensiná-lo. Nesta perspectiva, Descartes relata em uma carta enviada a Mersenne em meados de março de 1637 que:

> Não coloco o nome *Tratado do método*, mas sim *Discurso do método*, o que é o mesmo que *Prefácio* ou *Advertência sobre o método*, para mostrar que não tenho a intenção de ensiná-lo, mas somente de tratar do método. Pois, como se pode ver pelo que exponho nele, consiste mais em prática que em teoria, e chamo os *Ensaios* que vêm depois de *Ensaios* deste método, porque pretendo estabelecer

> que as coisas que estes contenham, não pudessem ser encontradas sem as bases teóricas do método, e que através deles podemos reconhecer o que o método vale. Assim como ensinarei alguma explicação de metafísica, de física [...] no *Discurso* para mostrar que o método estende-se a todos os tipos de disciplinas (AT, I, 349).

Ao longo da *Geometria*, Descartes descobre efetivamente o método e prova-o, sobretudo, a partir da resolução do problema de Pappus. Numa carta enviada a Mersenne em meados de 1637, Descartes relata a proeza da *Geometria*:

> Não sinto prazer em me vangloriar, mas desde que poucas pessoas possam entender a minha *Geometria*, e como o senhor deseja que eu externe a minha opinião sobre essa obra, afirmo que ela é mais do que eu poderia esperar; pois, por exemplo, na *Dióptrica* e nos *Meteoros* eu apenas procurei persuadir as pessoas que o meu método era melhor que o usual [método utilizado nas Escolas], mas eu provei isso na minha *Geometria*, pois por meio do raciocínio exposto nesta obra, eu resolvi um problema que, segundo Pappus, não pôde ser resolvido por nenhum dos geômetras antigos (AT, I, 478).

O caminho percorrido para a "constituição lógica do método"[9] é realizado quando Descartes presume que os juízos são estabelecidos mediante encadeamentos analíticos.

Descartes advoga que cada espírito funda em si a inteligibilidade dos juízos claros e evidentes. Diante disso, ele pretende compreender o motivo que faz a subjetividade adquirir a certeza das proposições e, a partir desse desdobramento intelectual, o pressuposto que faz o entendimento constituir o método por meio de encadeamentos lógicos que operam os raciocínios de ordem e medida. Nesta perspectiva, Alquié expõe sumariamente a contextualização que insere a gênese da *Geometria* no esboço do projeto inicial da *Mathesis universalis* de Descartes. Relata Alquié:

> Uma vez que Descartes está convencido de que a verdade é concebida pela intuição, [...] começa por se esforçar em descobrir um método que simplifique as regras matemáticas e liberte o espírito. Assim, Descartes aperfeiçoa o método das coordenadas e aplica-se a reformar todo o sistema das notações algébricas.[10] (ALQUIÉ, 1986, 35)

Segundo Alquié:

> [...] Descartes consagra de 1628 a 1637 às suas obras cientificas. [...] Pensa primeiro numa notação geométrica, que poderia ter-lhe aberto a via do cálculo infinitesimal, mas limitou-se a simplificar os sinais cóssicos, então em uso: sinais complexos, em geral tirados dos alfabetos grego e hebraico, e que embaraçavam o espírito do matemático. Descartes, que trabalhava nesta questão desde o início de suas investigações, não tarda a servir-se apenas das letras do alfabeto latino e dos sinais das quatro operações aritméticas. Designa primeiro as quantidades conhecidas pelas letras minúsculas e as quantidades desconhecidas pelas letras maiúsculas: em 1637, as maiúsculas serão substituídas pelas do alfabeto latino: x, y e z, e o sinal da raiz quadrada ou cúbica surge então. Do mesmo modo, inventa um método para baixar o grau das equações. Mas a sua grande descoberta, então, é a geometria analítica,

> aperfeiçoada em 1631, a propósito do problema de Pappus. A Geometria Analítica é, sem dúvida nenhuma, um dos frutos da preocupação principal de Descartes. Aspirando encontrar uma *ciência universal*, capaz de tratar das quantidades em geral, e sem se preocupar com a sua especificação, sem curar de saber se o que está a tratar são figuras ou números, julga poder alargar o método algébrico a todas as ciências da quantidade. Mas não se julgue que pensasse em reduzir o espaço imaginado a uma realidade propriamente intelectual ou espiritual, cujo conhecimento já não apelaria para qualquer intuição de tipo sensível. Pretendi apenas encontrar uma correspondência cômoda entre a equação e a curva geométrica. De resto, a palavra álgebra, não designava um ramo independente da matemática, mas um processo da aritmética deste tempo, que consistia em estabelecer, a partir dos dados de um problema, uma equação que a quantidade incógnita satisfizesse. Este método matemático assemelha-se ao que, na geometria grega, se chamava análise, e que consistia em construir uma linha desconhecida a partir de relações geométricas conhecidas. Por isso, longe de conferir à sua descoberta toda a importância que hoje lhe atribuímos, Descartes vê nela uma simples apresentação algébrica da Geometria dos antigos. Com isso, a *Geometria* de 1637 não será um Tratado sistematizado de Geometria Analítica, mas expõe um fundamento nuclear da filosofia de Descartes, ou seja, o método baseado em mecanismos puramente simples, estabelecidos nos raciocínios matemáticos (1986, 35-36).

A formulação de um sistema de notações algébricas permite a Descartes a busca do entendimento claro e evidente dos raciocínios matemáticos. Nesta perspectiva, ele constitui um método fundamentado em uma lógica matemática e o legitima mediante a resolução do famoso problema de Pappus.[11]

ESTRUTURA DA *GEOMETRIA*

No início do século XVII, os filósofos buscavam estabelecer regras que fossem capazes de transformar um conceito vago de exatidão em um método matemático rigoroso: consequência da articulação entre a lógica, a álgebra e os raciocínios da Geometria antiga. É diante desse desafio que Descartes se propõe a escrever *A Geometria*. Descartes inicia a mencionada obra anunciando a seguinte afirmação: "Todos os problemas de Geometria podem facilmente ser reduzidos a termos tais que é desnecessário conhecer previamente mais do que o comprimento de algumas linhas retas. Isto é o suficiente para sua construção" (AT, VI, 369). Neste argumento, constata-se de modo preliminar a ausência das considerações concernentes à forma e a posição das figuras geométricas. Esse aspecto do argumento remete Descartes a mais tarde realizar a distinção entre os problemas determinados e os problemas indeterminados: campo de investigação onde o método analítico tem o emprego mais apropriado. Os antigos geômetras – segundo o próprio Descartes – não tinham um método suficientemente adequado para resolver os problemas matemáticos. Para sustentar essa interpretação, Descartes cita a passagem onde Pappus expõe o problema "*ad quatuor aut plures lineas*" (AT, I, 233) e a passagem onde requer-se que "*nullum non problema soluere*" (AT, I, 245).

No Livro I da *Geometria*, Descartes tem por objetivo explicar a resolução da primeira etapa do problema de Pappus. Para isso, inicialmente, Descartes é levado a se perguntar de que maneira as operações aritméticas podem ser atribuídas às construções geométricas. Para tal resposta, ele fixa, primeiramente, uma unidade de medida, com o auxílio da qual chega às construções geométricas mediante as cinco operações aritméticas. Essa inovação cartesiana possibilita um sistema adotado para compreender os segmentos de reta.

As fórmulas adotada por Descartes viabilizam o aspecto moderno do sinal de igualdade e do símbolo √c, para designar a raiz cúbica. Ainda no Livro I, Descartes expõe uma regra geral para resolver os problemas de geometria, cujo aspecto determinante consiste na "suposição" de que "o problema está previamente resolvido", o que revela o *modus operandi* da via demonstrativa de análise. Neste contexto, se inicia a formulação do método cartesiano, a saber, por um lado, os raciocínios de ordem: operando os raciocínios da via demonstrativa de análise e, por outro lado, os raciocínios de medida:operando os termos da Aritmética a partir dos objetos da Álgebra e da Geometria. Após definir os problemas planos, Descartes expõe as soluções das equações algébricas de maneira completamente diferente daquela que é exposta nos *Elementos* de Euclides. Esse aspecto das soluções das equações revela, sobretudo, que a matemática de Descartes é fundamentada em novas operações metódicas. Os antigos geômetras não tinham um método suficientemente adequado para resolver os problemas matemáticos. Para sustentar essa interpretação, Descartes cita a passagem em que Pappus expõe o problema "*ad quatuor aut plures lineas*" (AT, I, 233) e a passagem onde se requer que "*nullum non problema* *soluere*" (AT, I, 245). Com base em tais considerações, tratar-se-á aqui, finalmente, o modo pelo qual Descartes resolve o problema de Pappus. Sabe-se que tal problema consiste na procura de um lugar de um ponto em que os oblíquos levados sob os ângulos dados a um determinado número de retas formam um produto que esteja dado em relação constante com aqueles levados do mesmo modo a outras retas situadas no mesmo plano que os precedentes.[12]

Para a resolução do mencionado problema, Descartes realiza a enumeração dos casos em que a questão pode ser resolvida pela Geometria elementar – isto é, por retas e círculos – ou pela Geometria dos sólidos, ou ainda pelo o auxílio das linhas curvas mais elevadas.[12] Nesta perspectiva, Descartes estabelece como eixo uma das retas dadas e leva sob o ângulo dado uma reta que passa por um dos pontos do lugar procurado. Segue uma breve exposição feita por Gaukroger que apresenta a resolução cartesiana do problema de Pappus.

Quatro linhas são apresentadas, e as tracejadas são as retas procuradas (ver figura 1). Descartes toma AB e BC como as retas principais e passa a relacionar todas as demais com elas. Seus comprimentos são *x* e *y*, respectivamente; na realidade, AB é o eixo *x* e BC é o eixo *y*. A solução é encontrada da seguinte maneira: os ângulos do triângulo ABR são fornecidos de maneira que se conhece a razão AB : BR. Se consideramos que essa razão é $\frac{z}{b}$ constata-se que BR = $\frac{bx}{z}$ e $CR = y + \frac{bx}{z}$. Os ângulos do triângulo DRC também são conhecidos, representando a razão CR : CD como $\frac{z}{c}$; donde CR = $y + \frac{bx}{z}$ e CD = $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$. Além disso, como as posições de AB, AD e EF são fixas, está dado, portanto, o comprimento *k* de AE; portanto, EB = *k* + *x*. Os ângulos do triângulo ESB são também fornecidos; por conseguinte, também é a razão BE : BS (GAUKROGER, 1995, 91-114). Caso se considere agora que essa razão é $\frac{z}{d}$, obteremos BS = $\frac{dk+dx}{z}$ e CS = $\frac{zy+dk+dx}{z}$. Uma vez que os ângulos do triângulo FSC são fornecidos, a razão CS : CF é conhecida. Essa razão é $\frac{z}{e}$, de modo que obtemos CF = $\frac{ezy+dek+dex}{}$ No triangulo BGT é $\frac{z}{f}$, e teremos que BT = $\frac{fl-fx}{z}$, e CT = $\frac{zt+fl-x}{z}$; $\frac{z}{g}$, por último, se consideramos que CT : CH no triângulo TCH é , veremos que CH = $\frac{gzy+fgl-fgx}{zz}$ (GAUKROGER, 1995, 91-114).

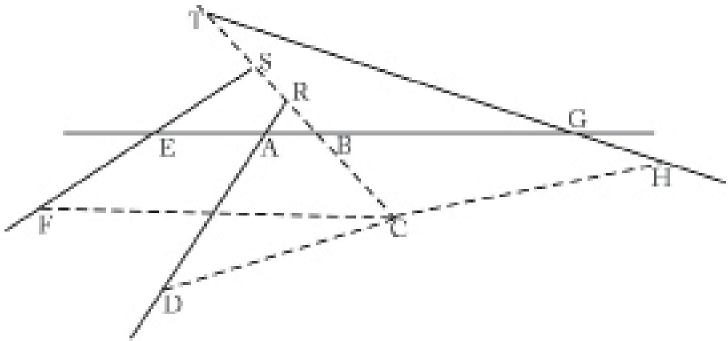


FIGURA 1

A partir desta breve exposição do problema de Pappus apresentada pelos comentários de Gaukroger, constata-se que Descartes elabora um sistema de notações para resolvê-lo, o qual é constituído pelas coordenadas *y* e *x*. Descartes obtém a solução para o caso em que *n* = *4* quando se estabelece quatro linhas retas, a saber, AB, AD, EF e GH. Para explicar a análise algébrica, Descartes propõe AB como a linha de referência e a designa *x*. Na sequência, Descartes propõe CB como a linha desenhada a partir de uma possível posição de C e que corta a linha AB com um ângulo dado e a designa como *y*. Após designar as linhas AB e CB com os símbolos *x* e *y*, respectivamente, Descartes mostra como é possível expressar o comprimento das outras linhas que partem de C em relação às linhas dadas que cortam com ângulos dados por meio de *x* e *y*. A multiplicação destas expressões produz uma equação cujo grau depende do número de linhas. Porém, a generalização da equação não resolvia o problema de Pappus. Dever-se-ia ainda construir uma curva determinada. O método de Descartes consistia em escolher um valor arbitrário de *y* e construir geometricamente o valor de *x*, que correspondia com o valor de *y*. Repetindo esse processo com os valores de *y*, conseguiam-se tantos pontos como se desejasse. Assim, a partir do seu sistema de notações, Descartes requer um valor arbitrário para *y* e, por meio desta medida, identifica que é necessário construir geometricamente o valor de *x*. Determinando, então, que o valor de *x* está em função do valor de *y*, Descartes constata que quando o problema de Pappus é proposto para quatro linhas dadas, o lugar geométrico que satisfaz a condição analítica pode ser tanto uma linha reta ou um círculo (lugar plano) quanto uma das três secções cônicas (lugar sólido). Nesta perspectiva, Descartes determina o primeiro gênero das linhas curvas correspondente a polinômios de grau dois e constituído pelas secções cônicas e pelo círculo.[12] A partir de tais considerações, ele ainda reconfigura o sistema das notações *x* e *y* adotada – pelos calculadores modernos, tal como Viète – mediante os cálculos operacionalizados pelo *modus operandi* do método que inventara. Por meio desta reconfiguração, ele adquire um meio para encontrar a solução do problema de Pappus, a saber, uma teoria das proporções (AT, VI, 485).[13]

No início do Livro II da *Geometria*, Descartes introduz a nomenclatura curva geométrica em oposição à designação das curvas mecânicas. Curvas algébricas são aquelas para as quais Descartes fornece uma argumentação que se designa nos dias atuais como um verdadeiro método de transformação geométrica. Nos casos mais simples as curvas tratadas são as hipérboles e as parábolas. Descartes ainda ressalta que todas as curvas geométricas podem ser representadas por uma equação. Descartes propõe também que uma classificação das linhas planas. Nesta perspectiva, o autor compõe uma classe de curvas de gênero $2n - 1$ e $2n$, propondo por uma "analogia", com a qual ele sugere a redução ao terceiro grau de toda a equação do quarto grau. Esta classificação é baseada na consideração do gênero de uma curva; portanto, constata-se que Descartes sabe que essa característica não depende da opção do eixo. As questões expostas são suficientes para levar adequadamente a resolução do problema de Pappus iniciada no Livro I. Então, no caso em que as retas dadas são três ou quatro, Descartes oferece o primeiro exemplo de enumeração de todas as linhas que podem ser representadas pela mesma equação. Em seguida, ele estabelece as questões mais gerais e examina quais são as linhas que podem ser aceitas na sua nova Geometria. Neste intuito, o autor chega à conclusão de que seriam aquelas que podem ser representadas por equações reportadas a duas retas fixas.

Ainda no Livro II, Descartes dedica sua atenção a um dado problema: a construção das normais levadas a uma curva por um ponto no plano. Na obra *History of Analytic Geometry*, Boyer relata que Descartes tinha toda a razão ao dizer que o problema de encontrar a normal (ou a tangente) de uma curva era de grande importância. Por exemplo, ele encontra a normal de uma curva algébrica em um ponto fixo P da curva, tomando um segundo ponto variável e, em seguida, descobre a equação do círculo que tem por centro o eixo de coordenadas

AG e passa por P e Q. Depois, considerando o descriminante da equação que determina as intersecções do círculo com a curva como sendo igual a zero, nota que é possível encontrar o centro do círculo no qual Q coincide com P. Uma vez dispondo deste centro, Descartes descobre que a tangente e a normal da curva são concebidas por uma operação simples (BOYER, 1996, 232). Constata-se, portanto, que Descartes emprega um cálculo baseado na consideração de um círculo que tem o centro sobre o eixo no qual a curva é reportada e cujo limite seja a tangente. Descartes ainda acrescenta que para resolver o problema das normais em relação a uma curva no espaço é suficiente resolver duas curvas que estão projetadas.

Segundo Boyer (1996, 237), o Livro II da *Geometria* contém também muitos aspectos sobre as ovais de Descartes, as quais são muito úteis à Óptica, sendo, pois, obtidas na generalização do método do jardineiro de construir uma elipse por meio de barbantes. Por exemplo, se D_1 e D_2 são as distâncias de um ponto variável P a dois pontos fixos F_1 e F_2 respectivamente, e se m e n são inteiros positivos e K é qualquer constante positiva, então o lugar de P, posto que $D_1 + nD_2 = K$, é agora chamado uma oval de Descartes. Diante disso, constata-se que o método cartesiano pode ser estendido a todas as curvas que poderiam ser concebidas como geradas pelo movimento regular dos pontos de um corpo no espaço geométrico tridimensional.

O tratamento dos conteúdos do Livro III da *Geometria* é primordialmente algébrico. Ali, Descartes tem por objetivo fornecer as regras para conhecer a natureza da solução das equações, as quais devem ser reportadas as construções geométricas. Tais considerações resultam em uma inovadora teoria das equações algébricas.

No Livro III, Descartes finalmente constata que as curvas a serem empregadas para resolver uma questão qualquer devem ser as mais simples possíveis. Para isso, o autor requisita o auxílio do esquadro (instrumento matemático de sua invenção). Acrescenta-se a isso que, no Livro III da *Geometria*, Descartes descreve a resolução dos problemas sólidos e hipersólidos. Nesta perspectiva, ele apresenta a solução das equações, das raízes e as relações entre os coeficientes. Diante disso, Descartes revela que uma equação pode ter tantas raízes quantas dimensões tem o grau da equação.

Por fim, no último Livro da *Geometria*, Descartes trata os problemas de terceiro grau, a saber, a trisseção do ângulo e a duplicação do cubo a partir da regra geral para reduzir as equações que passam o quadrado do quadrado.

A *Geometria* foi possivelmente a obra menos discutida pelos interlocutores de Descartes. Isso porque, como assinala o próprio Descartes, a obra teria um pequeno número de leitores, devido à exigência prévia de um vasto conhecimento matemático e da necessidade de um espírito atento e engenhoso. Todavia, deve-se ressaltar que *A Geometria* teve grande influência na formação do pensamento de diversos matemáticos do século XVII, tais como Florimond de Beaune, Witt, Reneri e Schooten. Acrescento ainda que possivelmente o intuito primordial de Descartes na *Geometria*, enquanto um dos ensaios que acompanham o *Discurso do método* é estabelecer o caminho da descoberta de um método inovador que possibilite a mais apta condução da razão em virtude da fundação de uma nova metafísica e de uma revolucionária prática científica. Por isso, Descartes conclui a *Geometria* com as seguintes considerações:

> Mas não é minha finalidade escrever um grande livro. [...] Ao propor uma única construção a todos os problemas de uma classe, constatou-se que eu, ao mesmo tempo, concebi um método de os transformar em uma infinidade de outros e resolvi por esse mesmo método cada um em um número infinito de diversas maneiras; além disso, construindo todos os problemas planos pelo corte de um círculo ou por uma linha reta, e todos os problemas que são sólidos pelo corte de um círculo por uma parábola; e, finalmente, todos que são de um grau mais complexo cortando um círculo por uma curva com um grau mais elevado do que a parábola, seguindo o mesmo método para construir todos os problemas, mais e mais complexos, etc. No exemplo de uma progressão matemática, sempre que os primeiros dois ou três termos são dados, será fácil encontrar o seu resultado. Eu espero que a posteridade me julgue amavelmente, não apenas a respeito das coisas que eu expliquei, mas também a respeito daquelas que eu omiti intencionalmente para deixar a outro o prazer da invenção (AT, VI, 485).

NOTAS

[1]Doutor em Filosofia pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Prof. Dr. na Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Endereço eletrônico: domluso@gmail.com.

[2]Acrescenta-se a esses dados que as ilustrações da *Geometria* foram desenhadas por Franz Van Schooten (AT, VI, V-VI). Outro dado é que Étienne de Courcelles havia deixado de lado o último dos três *Ensaios*, isto é, *A Geometria*. Uma versão latina surgiu igualmente quando Descartes ainda estava vivo: *Geometria, à Renato Des Cartes anno 1637 Gallicè edita*; *nunc*

autem cum notis Florimondi de Beune in Curia Blesensi Consiliarii Regii in Latina linguam versa, et Commentaris illustrada, oper à atque studio Francisci a Shooten Leydensis, in Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris Belgicè docentis. Lugduni Batavorum. Ex officina Ioannis Maire. (AT, VI, V-VI). Shea (1997, 531-549) acrescenta ainda *que A Geometria* deveria ser estudada em conjunto com o *Discurso do método* e com os demais *Ensaios científicos,* pois esse era o intuito de Descartes.

[3]*A Geometria* é um dos três ensaios que acompanham o *Discurso do método*. Segundo Cottingham (1993, 73), "*A Geometria* é constituída por três Livros \ Capítulos: o primeiro trata dos problemas que podem ser construídos apenas com o uso de *círculos* e *linhas retas*; o Livro II expõe a natureza das linhas curvas; e o terceiro, examina os sólidos e os hipersólidos".

[4]Na *Geometria*, Descartes explica a sua concepção de Matemática, anunciada desde as *Regras para orientação do Espírito*.

[5]Preceito da evidência.

[6]Preceito da análise. Assinala-se que o conceito resolução prescreve, desde os antigos geômetras, a via de descoberta analítica (ALLARD, 1963, 44).

[7]Preceito da síntese. Assinala-se que o conceito composição prescreve, desde os antigos geômetras, a via de descoberta sintética (ALLARD, 1963, 44).

[8]Preceito da revisão geral. Descartes relata no *Discurso do método* que: "Primeiramente, procurei *descobrir* os *princípios* ou *causas* primordiais de tudo que existe ou pode existir no Mundo. Depois disso, examinei quais eram os primeiros e mais comuns *efeitos* que se podiam *deduzir* dessas *causas* [...]. Após isso, quando quis empreender as *experiências* mais *particulares*, tantas e tão diversas se me apresentaram, que não acreditei ser possível ao espírito humano distinguir as formas ou espécies de corpos existentes [...] nem, por conseguinte, torná-las por nós utilizáveis, a não ser *que se chegue às causas pelos efeitos* e que se *utilizem muitas experiências*. [...] *Mas devo confessar que a potência da natureza é tão ampla e tão vasta, e esses princípios tão simples e tão inteligíveis, que não noto quase nenhum efeito particular que de início eu não saiba que pode ser deduzido desses princípios de muitas maneiras diferentes, e que minha maior dificuldade é, geralmente, mostrar de qual dessas maneiras os efeitos são deduzidos deles*" (AT, VI, 63-64, grifo nosso).

[9]O tema da "constituição lógica do método cartesiano mediante a análise geométrica" é anunciado e tratado por Hintikka e Remes (1958, 28-47).

Para Descartes, os raciocínios matemáticos perpassam necessariamente por um encadeamento lógico, em que todas as conclusões são necessariamente verdadeiras. Então, como afirma Beyssade, "As operações matemáticas ensinam a relação entre a descoberta de uma verdade indubitável e a formulação de um método", pois "É justamente o exercício da matemática que lhe dá o gosto da verdade, o desejo de encontrar a verdadeira filosofia [...] e, assim, a vontade de construir uma nova filosofia, tendo a sua fonte a prática refletida na própria matemática. Quando Descartes cultiva a matemática, ele regozija-se, não apenas por descobrir as soluções de certos problemas, mas, sobretudo, por estar perfeitamente assegurada a sua verdade, pois ele lhe compreende as razões. Esta alegria faz nascer em Descartes o desejo de estender essa certeza à totalidade do saber" (1989, 25-26).

[10]Tratar de uma ciência (ou arte) matemática requer a expressão de unidade por meio de um conceito de base que expresse a universalidade entre as diversas ciências matemáticas. Crapulli relata como esse problema chega ao Renascimento, e como há um desenvolvimento progressivo das discussões matemáticas para se chegar à concepção de uma *Mathesis universalis*. Além disso, quando o conteúdo dessa ciência universal aparece determinado, tende a centrar-se sobre a teoria das relações / proporções (CRAPULLI, 1969, 28).

[11]Segundo Costabel (1982, 29), "O sistema de notações algébricas constituídas por Descartes tem como referência a matemática de Clavius". Milhaud (1921, 38) acrescenta que "É possível conjecturar que Descartes haveria adquirido as notações através das obras do Jesuíta Clavius, as quais deveriam fazer parte da biblioteca do Colégio jesuíta de La Flèche". Outra característica relevante do sistema de notações cartesiano é o aparecimento do conceito de incógnito. Incógnito designa algo que exige resolução. Sabe-se que Viète fornece grandes contribuições ao desenvolvimento do pensamento matemático, e, de modo peculiar, tais argumentações de Viète foram debatidas por Descartes numa carta enviada a Mersenne datada em meados de dezembro de 1637 (AT, I, 478-479). Assinala-se que 1637 é o ano da publicação da *Geometria*. Segundo Boyer, Viète foi um dos grandes contribuidores para elaboração da Álgebra moderna. Segundo esse comentador, não haveria grandes progressos na teoria da Álgebra enquanto a preocupação principal fosse a de encontrar a "coisa" numa equação com coeficientes numéricos específicos. Tinham sido desenvolvidos símbolos e abreviações para uma *incógnita* e suas *potências*, bem

como para operações e a relação de igualdade. Desde os tempos de Euclides as letras tinham sido usadas para representar grandezas, conhecidas ou desconhecidas, todavia, Viète introduziu uma convenção tão simples quanto fecunda. Usou uma vogal para representar, em álgebra, uma quantidade supostamente desconhecida, ou intermediária, e uma consoante para representar uma grandeza ou números supostos conhecidos ou dados. Ora, se Viète tivesse adotado outros símbolos existentes em seus dias, ele poderia ter escrito todas as equações quadráticas na forma única: $BA^2 + CA + D = 0$, onde A seria a *incógnita* e B, C e D seriam os parâmetros. Mas, infelizmente, Viète era moderno somente em alguns aspectos, ou seja, em outros era um antigo ou medieval. Sua *álgebra* é fundamentalmente sincopada e não simbólica, pois, embora Viète sensatamente adotasse os símbolos germânicos para adição e subtração e ainda mais sensatamente usasse símbolos diferentes para parâmetros e incógnitas, o resto de sua álgebra consistia de palavras e abreviações. Outro caso é o exemplo em que Viète procurou outra palavra e, neste caso, ele observou que em problemas envolvendo a "coisa" ou "*quantidade incógnita*", geralmente se procede do modo que Pappus e os antigos (Euclides, Apolônio etc.) haviam descrito como análise. Com isso, em vez de raciocinar a partir da hipótese que a incógnita foi dada, deduzia uma conclusão necessária da qual a incógnita pudesse ser determinada. Em símbolos modernos, se queremos resolver $x^2 - 3x + 2 = 0$ (BOYER, 1996, 208-209). Segundo Jullien (1996, 33), existiriam possíveis acusações de plágio de Descartes em relação a Viète. Entretanto, em uma carta datada em 1 de março de 1638, Descartes declara a Mydorge: "meus cálculos são mais simples e mais cômodos que os de Viète" (AT, II, 22). Allard (1963, 41) relata que os primeiros aspectos do método de Descartes encontram-se ainda nos antigos geômetras, os quais utilizavam a análise para solução dos problemas. Os vestígios dessa análise aparecem, sobretudo, em Diofante e Pappus. Entretanto, esses matemáticos não haviam entendido o verdadeiro uso do método de análise.

[12]De acordo com Milhaud (1921, 236), os antigos geômetras haviam percebido que alguns problemas não podiam ser resolvidos com régua e compasso. Diante disso, eles faziam intervir as secções cônicas ou mesmo outras curvas, como a concóide.

[13]De acordo com Milhaud (1921, 236), os antigos geômetras haviam percebido

que alguns problemas não podiam ser resolvidos com régua e compasso. Diante disso, eles faziam intervir as secções cônicas ou mesmo outras curvas, como a concóide.

[14]Boyer (1996, 233-236) relata que "Descartes ficou impressionado com a proeza de seu método no tratamento do problema do lugar das três e quatro linhas retas. [...] Descartes examinou com detalhes um lugar, e isso foi em conexão com o problema do lugar das três e quatro retas de Pappus, derivando a equação $y^2 = (-dekz^2y + cfglzy - dez^2xy - cfgzxy + bcgzxy + bcfglx - bcfgx^2) / ez^3 - cgz^2$. Essa é uma equação geral de uma cônica passando pela origem [...]. Descartes indicou condições sobre os coeficientes sob as quais a cônica é uma *reta*, um *círculo*, uma *parábola*, uma *elipse*, ou uma *hipérbole*".

[15]É interessante observar que na obra *Sur l´ontologie grise de Descartes*, Marion alega que a ciência produtora de universal certeza, chama-lhe Descartes *Mathesis universalis* (a partir da matematicidade, não matemática das matemáticas) ou método geral (a partir da produção da certeza). Ora, acontece que a apresentação que Descartes faz na regra IV encerra uma surpreendente semelhança com alguns textos de Aristóteles. Por exemplo, os *Analíticos* apresentam um tipo de demonstração que abstrai de certas matérias a seguinte concepção: "que a proporção possa também converter-se em números, linhas sólidos ou tempos, e isso não impede que o mostremos numa só demonstração válida para todos": A *teoria das proporções* (exemplo privilegiado do método, nas *Regulae*) e que esta teoria pode desenvolver-se em perfeita independência dos objetos particulares da sua universal validade, isso porque, ela admite a universalidade. Aqui, isso é exposto universalmente, porque não é enquanto linhas, ou números, mas na medida em que têm o que é conjecturado que tenham universalmente nelas. Mas surpreendentemente, para Marion, nem por isso Aristóteles conclui que a ciência das proporções se possa qualificar de universal, mas, ao contrário, deixa-a num rigoroso anonimato. No entanto, para Descartes parece evidente que a teoria das proporções abre caminho a um modo de ciência universal; mas, se alguns antes de Descartes já o tinham compreendido, por que o silencia? Segundo Marion (1975, 62), porque Aristóteles se fundamentava na impossibilidade de uma denominação para justificar essa lacuna teórica.

REFERÊNCIAS

Obras de Descartes:

DESCARTES, R. *Œuvres de Descartes*. Publiées par Charles Adam e Paul Tannery. Paris: Vrin. 1996. 11 v.

Outras fontes:

ALLARD, J.-L. *Le mathématisme de Descartes*. Ottawa: Université d'Ottawa, 1963.

ALQUIÉ, F. *A Filosofia de Descartes*. Tradução de Rodrigues Martins. Lisboa: Presença, 1986.

ALQUIÉ, F. *Œuvres philosophiques de Descartes*. Paris: Garnier, 1987. V. 2.

BERKEL, K. Beeckman, Descartes et La Philosophie Physico-Mathématique. In: *Archives de Philosophie*. N. 46, 1983, p. 620-626.

BEYSSADE, J.-M. *Études sur Descartes*. Paris: Éditions du Seuil, 2001.

BLANCHÉ, R. *Axiomatics*. London: Routledge & Kegan Paul, 1966.

BOYER, C. *História da Matemática*. Tradução de Elza Gomide. São Paulo: E. Blücher, 1996.

BOYER, C. *History of analytic geometry*. New Jersey: Princeton University, 1988.

BOYER, C. *The Rainbow: from myth to mathematics*. New Jersey: Princeton University, 1987.

BOS, H. J. M. On the representation of curves in Descartes' Géométrie. In: *Archive for history of exact sciences*. V. 24, n. 4, 1981, p. 295-338.

COSTABEL, P. *Démarches Originales de Descartes Savant*. Paris: Vrin, 1982.

COSTABEL, P. *Exercices pour les éléments des solides*. Paris: Presses Universitaires de France, 1987.

COTTINGHAM, J. *Dicionário Descartes*. Tradução de Helena Martins. Rio de Janeiro: J. Zahar, 1993.

CLARKE, D. *Descartes' Philosophy of Science.* Manchester: Manchester University, 1982.

CRAPULLI, G. *Introduzione a Descartes*. Roma: Laterza, 2001.

CRAPULLI, G. *Mathesis universalis: Genesi di un'idea nel XVI secolo*. Roma: Edizioni dell'Ateneo, 1969.

CRIPPA, D. A solução cartesiana da quadratura do círculo. In: *Scientiae studia*. V. 8, n. 4, 2010, p. 597-621.

DIOPHANTE D'ALEXANDRIE. *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones.* Paris: A. Blanchard, 1959.

DUCHESNEAU, F. Descartes et le modèle de la Science. In: *L´Esprit Cartésien*. Paris: Vrin, 2000, p. 63-90.

DUHAMEL, J.M.C. *Des méthodes dans les sciences de raisonnements*. Paris: Gauthier-Villars, 1885.

ERNEST, C. *The principal Works of Simon Stevin*. 5 vols. Amsterdam: D. J. Struik, 1955.

ERNEST, P. *The Philosophy of Mathematics Education*. London: Falmer, 1991.

ÉVORA, F. *Astronomia e Cosmologia Pré-Galileana*. Campinas: UNICAMP / Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1993. (A Revolução Copernicano-Galileana, v. 1).

ÉVORA, F. *A Revolução Galileana*. Campinas: UNICAMP / Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1993. (A Revolução Copernicano-Galileana, v. 2).

FICHANT, M. *Science et Métaphysique dans Descartes et Leibniz*. Paris: PUF, 1998.

ITARD, J. *Essais d'Historie des Mathématiques*. Paris: A. Blanchard, 1984.

GARBER, D. *Corps Cartésiens: Descartes et la philosophie dans les Sciences*. Paris: Presses Universitaires de France, 2004.

GARBER, D. *Descartes Embodied*. Chicago: Cambridge University, 2001.

GARBER, D. *La physique métaphysique de Descartes*. Paris: Presses Universitaires de France, 1999.

GARBER, D. Philosophers of Substance. *Archive for history of exact sciences*. Cambridge, v. 27, n.3, 1996, p. 421-427.

GAUKROGER, S. The nature of abstract reasoning: philosophical aspects of Descartes work in algebra. In: COTTINGHAM, J. (ed.). *The Cambridge Companion to Descartes*. New York: Cambridge University, 1992, p. 91-114.

GILSON, É. *Discours de la Méthode. Texte et Commentaire*. Paris: Vrin, 1987.

GILSON, É. *Index Scolastico-Cartésien*. Paris: Librairie Félix Alcan, 1913.

GUEROULT, M. *Descartes Selon L'Ordre des Raisons*. Paris: Aubier, 1968. V.1.

GUEROULT, M. *Descartes Selon L'Ordre des Raisons*. Paris: Aubier, 1968. V. 2.

GUEROULT, M. Lógica, arquitetônica e estruturas constitutivas dos sistemas filosóficos. In: *Transformação / Ação: Revista de Filosofia*. São Paulo: UNESP, v. 30, 2007, p. 235-246.

GUEROULT, M. Métaphysique et physique de la force chez Descartes et chez Malebranche. In: *Revue de Métaphysique et de Morale*. V. 59, 1954, p. 1-37.

HAMELIN, O. *Le système de Descartes*. Paris: L. Robin, 1911.

HEATH, T. L. *The Works of Archimedes*. New York: Dover, 1953.

HEATH, T. L. *The thirteen books of Euclid´s elements*. New York: Dover, 1956.

HEATH, T. L. *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover, 1981.

HINTIKKA, J.; REMES, U. A análise geométrica e a lógica moderna. In: *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, n. 4, p. 28-47, 1958.

HINTIKKA, J.; REMES, U. *The method of analysis*. Dordrecht: D. Reidel, 1974.

JULLIEN, V. *Descartes*, *La "Géométrie" De 1637*. Paris: Presses Universitaires de France, 1996.

KLEIN, J. *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. New York: Dover, 1968.

KOBAYASHI, M. *La philosophie naturelle de Descartes*. Paris: Vrin, 1993.

KOYRÉ, A. *Considerações sobre Descartes*. Lisboa: Presença, 1992.

LORIA, G. Descartes géomètre. In: *Revue de métaphysique et morale*. Paris: Armand Colin, 1937, p. 199-220.

MANCOSU, P. *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*. New York: Oxford University, 1996.

MARION, J.-L. *Sur l´ontologie grise de Descartes*. Paris: Vrin, 1975.

MERSENNE. M. *Harmonie Universelle*. Paris: Sébastien Cramoisy, 1636.

MILHAUD, G. *Descartes Savant*. Paris: Librairie Félix Alcan, 1921.

PAPPUS. *La collection mathématique*. Paris: A. Blanchard. 1982.

PATY, M. Mathesis universalis e inteligibilidade em Descartes. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*. S. 3, v. 8, n. 1, jan.-jun. 1998, p. 9-57.

PHILONENKO, A. *Reler Descartes*. Tradução de Fernando Oliveira. Lisboa: Inst. Piaget, 1996.

RABUEL, C. *Commentaires sur la Géométrie de monsieur Descartes*. Lyon: Marcellin Duplain, 1730.

SASAKI, C. *Descartes` Mathematical Thought*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

SCHUSTER, J. *Descartes and the Scientific Revolution, 1618-1634*. Ph.D. Thesis. Ann Arbor: Princeton University, 1977. Vol. 1.

SCHUSTER, J. *Descartes and the Scientific Revolution, 1618-1634*. Ph.D. Thesis. Ann Arbor: Princeton University, 1977. Vol. 2.

SCHUSTER, J. Full circle: Cartesian dynamics, optics and the tennis ball model, 1628-33. In: GAUKROGER, S.; SCHUSTER, J.; SUTTON, J. *Descartes' Natural philosophy*. London: Routledge, 2000, p. 258- 757.

SCOTT, J. F. *The Scientific Work of René Descartes*. London: Taylor & Francis, 1952.

SERFATI, M. Les compas Cartésiens. *Archives de Philosophie*. V. 56, n. 3, jul.-sep. 1993, p. 197-230.

SERFATI, M. *Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes*. Paris: APMEP, 1992.

SHEA, W. La science de Descartes. *Laval Théologique et Philosophique*. V. 53, n. 3, oct. 1997, p. 531-549.

SHEA, W. *The Magic of Numbers and Motion*. Canton: Science History Publications, 1991.

SMITH, D. *The geometry of René Descartes*. New York: Dover, 1954.

TANNERY. P. *Géométrie Grecque: Comment Son Histoire Nous Est Parvenue Et Ce Que Nous En Savons.* Paris: Gauthier-Villars, 1887.

TOURNADRE, G. *L'orientation de la science cartésienne*. Paris: Vrin, 1982.

VIÈTE, F. Introduction to the analytical art. In: KLEIN, J. *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. New York: Dover, 1968.

VIÈTE, F. *L' algèbre nouvelle de M. Viète*. Trad. en français par A. Vasset. Paris: Pierre Rocolet, 1630.

VUILLEMIN, J. *Mathématiques et Métaphysique Chez Descartes*. Paris: Presses Universitaires de France, 1960.

WEBER, J. P. *La Constitution du texte des Regulae*. Paris: Société d'Édition d'Enseignement Supérieur, 1964.

WEBER, J. P. La méthode de Descartes d'après les Regulae. In: *Archives de Philosophie*. Paris, v. 35, 1972, p. 51-60.

WILLIAMS, B. *Descartes: the project of pure enquiry*. New York: Penguin, 1978.