

Ю. П. Галюк¹, А. П. Николаенко², М. Хайакава³

¹Санкт-Петербургский государственный университет

35, Университетский просп., Санкт-Петербург, Петергоф, 198504, Россия

E-mail: galyuck@paloma.spbu.ru

²Институт радиопрофики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины

12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 64085, Украина

E-mail: sasha@ire.kharkov.ua

³Институт Хайакавы, Компания сейсмического электромагнетизма,

Инкубационный центр 508 Университета электросвязи,

1-5-1 Чофугаока, Чофу, Токио, 182-8585, Япония

E-mail: hayakawa@hi-seismo-em.jp

СРАВНЕНИЕ ТОЧНОГО И ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ШУМАНОВСКОМ РЕЗОНАНСЕ ДЛЯ ПРОФИЛЯ ПРОВОДИМОСТИ С «КОЛЕНОМ»

Быстрое развитие вычислительной техники позволило решать задачу об электромагнитном резонансе в полости Земля–ионосфера с помощью прямого численного моделирования. Чаще всего используют решение с помощью двумерных телеграфных уравнений либо с помощью метода конечных элементов во временном представлении, обозначаемого аббревиатурой *FDTD*. Естественно, что численный подход использует известные модельные профили проводимости атмосферы, такие как экспоненциальный или профиль с «коленом». Однако при этом забывают, что эти профили есть не что иное, как удобная интерпретация приближенных эвристических соотношений. Поскольку точное решение задачи о постоянной распространения для такого профиля не совпадает с эвристическим, то и прямые численные решения также должны отличаться от модельных. В работе анализируются отличия приближенного решения для профиля проводимости с «коленом» от строгого решения и оценивается его точность. Ил. 3. Табл. 1. Библиогр.: 36 назв.

Ключевые слова: глобальный электромагнитный резонанс, профиль проводимости с «коленом», строгое и приближенное решения.

Благодаря быстрому развитию вычислительных ресурсов в исследованиях глобального электромагнитного резонанса используют прямое моделирование распространения радиоволн в полости Земля–ионосфера [1–14]. При этом уравнения Максвелла решают численно. Обычно применяется либо современная версия расчета с помощью двумерных искусственных линий и связанных с ними телеграфных уравнений (эту технику также называют 2ДТУ), или же метод сеток, самая популярная версия которого получила название метода конечных элементов во временном представлении. В литературе используется англоязычная аббревиатура *FDTD* – *Finite Dimension Time Domain*. Прямое численное решение связано с громадным количеством вычислений, однако его решающее преимущество состоит в универсальности. Появляется возможность моделировать реальный резонатор Земля–ионосфера со всеми его особенностями, включая глобальные неоднородности ионосферы, такие как полярная неоднородность, асимметрия день–ночь и т. д.

В последнее время особо популярной стала техника *FDTD* [7–14]. Электрические свойства атмосферы задают с помощью экспоненциального вертикального профиля проводимости или же профиля с изломом (в литературе его называют «профилем с коленом»). Профиль с коленом был разработан для получения реалистической частотной зависимости постоянной распространения СНЧ-радиоволн $\nu(f)$, которая входит в

классическое решение задачи о шумановском резонансе с помощью разложения в ряды зональных гармоник (РЗГ) (например [15, 16]). При этом оказывается, что решения, полученные с помощью РЗГ и *FDTD*, отличаются, даже если используют один и тот же источник поля и одинаковый вертикальный профиль проводимости $\sigma(h)$.

Распространение СНЧ-радиоволн в однородном резонаторе Земля–ионосфера исследуется давно и изучено достаточно хорошо. В литературе приведены представления в виде рядов зональных гармоник для полей, создаваемых естественными источниками излучения (грозовыми разрядами) как в частотном, так и во временном представлении (например, монографии [15, 16]). Для расчета спектров глобального электромагнитного резонанса (шумановского резонанса) достаточно знать комплексную постоянную распространения радиоволн $\nu(f)$. Эта функция определяется глобальными свойствами нижней ионосферы. Однако в силу неудовлетворительного знания параметров плазмы в области высот 40...100 км постоянную распространения находят не из ионосферных данных, а с помощью эвристических моделей, большая часть которых основана на экспериментальных наблюдениях. Наиболее надежной считается модель [17], которая описывает нелинейную функцию частоты $\nu(f)$. Имеются и другие модели, включая линейные [15, 16]. К сожалению, до настоящего времени по данным о шумановском резонансе не уда-

лось формально строго простроить профиль проводимости атмосферы $\sigma(h)$.

Использование высотного профиля проводимости необходимо при исследованиях возможной электрической активности атмосфер других планет. Такая активность может возбуждать глобальные электромагнитные резонансы, и поэтому желательно оценить ожидаемые резонансные частоты по известным параметрам атмосферы [5, 11, 12, 18–20]. Высотный профиль становится также необходимым, когда хотят оценить влияние различных возмущений нижней ионосферы на резонансные спектры. Такие задачи связаны с изучением космической погоды и ее проявлений на поверхности Земли [15, 16].

Само решение задачи об определении зависимости $\nu(f)$ по конкретному профилю $\sigma(h)$ оказывается сложным. Мы не станем рассматривать редкие случаи, когда профиль проводимости позволяет разрешить соответствующую задачу в известных специальных функциях, эти профили перечислены в работе [21]. В общей постановке атмосфера предполагается слоистой, изотропной и горизонтально однородной, а профиль $\sigma(h)$ задан в виде набора тонких слоев. Тогда точное решение задачи оказывается многопараметрическим. Для N слоев необходимо выписать решения волнового уравнения в каждом слое и удовлетворить $2N$ граничных условий. Так, относительно коэффициентов прохождения и отражения возникает система линейных уравнений высокого порядка [22]. Эту же задачу можно свести к дифференциальному уравнению первого порядка для импеданса поля. Но само уравнение оказывается нелинейным, и решение приходится строить численно с помощью итераций. Такой подход хорошо известен (например [22–25]), он называется приближением полного поля (*Full Wave Solution*), и его применение тоже связано с необходимостью выполнять трудоемкие вычисления, хотя и не столь обширные, как в методе *FDTD*.

Связь постоянной распространения $\nu(f)$ на фиксированной частоте f с параметрами экспоненциального профиля $\sigma(h)$ удалось установить приближенно в работе [26]. В диапазоне очень низких частот (ОНЧ; 3...30 кГц) задолго до работы [26] тоже использовали экспоненциальный профиль проводимости ионосферы [27], однако при переходе на сверхнизкие частоты (СНЧ; 3...3 000 Гц) использование модельного профиля пришлось изменить. Здесь были предложены приближенные соотношения для вычисления $\nu(f)$, в которых участвуют так называемые «электрическая» и «магнитная» высоты профиля $\sigma(h)$, а также соответствующие им высотные масштабы проводимости [26]. Нижняя, электрическая высота на данной частоте находится из условия равенства токов проводи-

мости и токов смещения. Для этого по известной частоте f вычисляется значение проводимости $\sigma_E = 2\pi f \epsilon_0$, где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. По нему на высотном профиле проводимости $\sigma(h)$ определяют искомую высоту h_E . Аналогично находят и магнитную высоту h_M , которая отвечает равенству высотного масштаба проводимости ζ_M и длины волны в плазме на данной частоте: $\sigma_M(h_M) = [4\mu_0\omega\zeta_M^2]^{-1}$, где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

С помощью характерных высот h_E и h_M и двух масштабов проводимости ζ_E и ζ_M , найденных из профиля проводимости [28], в работе [26] удалось получить реалистичные значения постоянной распространения, хорошо согласующиеся с результатами измерений сигналов СНЧ-передатчика *WTF – Wisconsin Test Facility*.

Модель [26] оказалась удобной и эффективной, поэтому возникло желание приспособить ее к вычислению параметров шумановского резонанса, для чего пришлось преодолеть два препятствия. Первое из них заключается в том, что формулы работы [26] были получены в плоском промежутке Земля–ионосфера, тогда как глобальный резонанс наблюдается в сферической полости. Это препятствие преодолели, показав, что соотношения работы [26] справедливы и для сферической Земли, если частота радиосигнала превышает единицы герц.

Вторая проблема связана с тем, что, в отличие от сигналов радиопередатчика, глобальный электромагнитный резонанс перекрывает широкую полосу частот, охватывающую примерно декаду. Перспектива обращения к графику $\sigma(h)$ при каждом новом значении частоты была вторым препятствием. Его удалось преодолеть за счет вывода формул для электрической и магнитной высот как функций частоты при заданных высоте и частоте привязки профиля. Так появились работы [18, 19], в которых оценивались глобальные резонансы на других планетах Солнечной системы, а резонатор Земля–ионосфера выступал в роли эталона, позволяющего оценить точность используемого модельного подхода.

Позднее формулы, аналогичные [18, 19], были опубликованы в работах [20, 29, 30]. Удобство приближенного решения для постоянной распространения в рамках экспоненциального профиля проводимости состоит не только в его простоте, но и в том, что оно позволяет интерпретировать наблюдения, оперируя вполне реалистичными параметрами нижней ионосферы.

Дальнейшее развитие подхода [26] состояло в усложнении аппроксимирующего профиля, в частности, был использован профиль с изломом зависимости $\sigma(h)$ на высотах между 50 и 60 км, где ионная проводимость сменяется быстро растущей

электронной проводимостью [1–6, 31, 32]. В этих работах описан способ определения $\nu(f)$, а также эффективных параметров RLC цепей, используемых в 2ДТУ. При этом снова находят две характерные высоты ионосферы и два масштаба проводимости в окрестности этих высот.

Был предложен целый набор модельных профилей проводимости с коленом [5]. Однако при этом не всегда подчеркивается, что построенное решение остается приближенным, а используемые в нем характерные высоты и высотные масштабы не обязательно соответствуют реальному профилю проводимости $\sigma(h)$.

Другими словами, пусть проводимость атмосферы описывается экспоненциальным или профилем с коленом. Если провести расчеты постоянной распространения по формулам работ [1–6, 31–34] и сопоставить их со строгими результатами приближения полного поля, то дисперсионные кривые $\nu(f)$ не совпадут. Для экспоненциального профиля эти расхождения обсуждались в работе [33], где также использовался профиль [28]. Оценивались ожидаемые резонансные частоты и добротности колебаний. Было показано, что в области шумановского резонанса точное решение отличается от результатов экспоненциальной модели. При этом резонансные частоты отличаются незначительно (от 0,15 до 1,2 %), тогда как добротности колебаний отклонялись на величины более 10 %.

Подобно экспоненциальному профилю, широко используемые модели колена остаются удобным средством конструирования эвристических зависимостей $\nu(f)$, однако и они приводят к отклонениям полученного затухания от точной зависимости, найденной в строгой постановке задачи. В настоящей работе мы оценим точность модели колена [31] и ее соответствие строгому решению. Обсуждение этого вопроса необходимо, поскольку профили с коленом широко применяют в $FDTD$ -технике. Получаемые решения, конечно, отличаются от разложений в РЗГ, если последнее использует эвристическую, а не точную зависимость $\nu(f)$, связанную с моделью колена. Далее мы продемонстрируем эти отличия и оценим их величину.

1. Вертикальные профили проводимости с коленом. Рассмотрим три профиля проводимости $\sigma(h)$, показанные на рис. 1. По традиции, высота, служащая аргументом функций $\sigma(h)$, отложена вдоль ординаты в км, а десятичный логарифм проводимости воздуха в См/м указан по оси абсцисс.

Жирная линия 1 на рис. 1 отвечает высотному профилю [28], его часто используют для описания проводимости регулярной ионосферы ниже 100 км. Ломаная линия со звездочками 2 – это профиль с коленом [31]. В нижней части он опи-

сывается двумя экспоненциальными зависимостями вида $\sigma(h) = \exp(-h/\zeta)$, соединяющимися на высоте колена $h_{KNEE} = 55$ км, где проводимость воздуха равна $\sigma_E = 5,5663 \cdot 10^{-10}$ См/м. Ниже колена высотный масштаб проводимости равен $\zeta_b = 8,3$ км, а выше нее он составляет $\zeta_a = 2,9$ км. В этой области располагается электрическая высота ионосферы h_E , входящая в эвристические выражения, с помощью которых находят постоянную распространения СНЧ-радиоволн. Верхняя, или магнитная высота h_M профиля 2, равна 96,5 км. Здесь проводимость будет $\sigma_M = 2,4737 \cdot 10^{-4}$ См/м, а высотный масштаб ζ_M составляет 4 км.

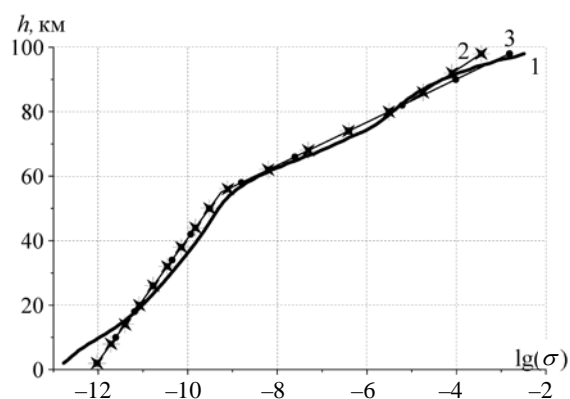


Рис. 1. Используемые профили проводимости: 1 – регулярный профиль [28]; 2 – профиль с коленом на 55 км [31]; 3 – профиль, применяемый в $FDTD$ -решении

При использовании логарифмического масштаба по оси абсцисс профиль 2 превращается в ломаную прямую, образующую колено, тогда как его верхняя часть проходит через магнитную высоту. Прямые, проведенные от электрической и магнитной высот профиля 2, пересекаются на 83 км, где образуют обратный излом. Выше 83 км используются магнитные параметры, а ниже нее – электрические, включая область колена. Ломаная прямая 3 – это упрощенный профиль, построенный исключительно по параметрам колена. Он состоит из двух прямых, пересекающихся на высоте 55 км и имеющих разный наклон. Ниже 83 км профили 2 и 3 совпадают, а выше 83 км профиль 3 продолжается электрической зависимостью с масштабом 2,9 км, поэтому он лежит несколько ниже линии 2, привязанной к магнитной высоте и масштабу 4 км.

Отметим, что, в отличие от гладкого классического профиля 1, отражающего данные аэронавтики, профили 2 и 3 – всего лишь удобная интерпретация эвристических моделей. Об этом свидетельствует хотя бы то обстоятельство, что все параметры модели колена (характерные высоты и высотные масштабы) зависят от частоты, что в реальном профиле невозможно. При этом элект-

рические параметры привязаны к частоте 10 Гц, тогда как магнитные параметры – к частоте 8 Гц.

2. Строгое решение задачи. При строгом решении задачи распространения электромагнитной волны в слоистой среде в приближении полного поля приходят к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов прохождения и отражения волны от соседних слоев. Более удобным оказывается переход от горизонтального электрического и магнитного поля к их отношению (поверхностному импедансу). Тогда задача сводится к дифференциальному уравнению первого порядка [22], решение которого строится численно с помощью специального алгоритма [23, 24]. Описание процедуры и результатов можно найти в указанных работах. Далее мы перечислим основные этапы решения.

Для собственных чисел полости Земля–ионосфера, ограниченной сверху слоистой плазмой с комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(r) = 1 + \frac{\sigma(r)}{\omega\varepsilon_0}$, из уравнений Максвелла и граничных условий на кусочно-однородных слоях можно получить следующее нелинейное уравнение первого порядка для сферического поверхностного импеданса (предполагается зависимость от времени вида $\exp[+i\omega t]$):

$$\frac{d}{dr} \delta(r) - ik\varepsilon(r)\delta^2(r) + ik + \frac{\nu(\nu+1)}{ikr^2\varepsilon(r)} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\delta(r)$ – сферический поверхностный импеданс на границе соседних слоев; ν – искомое комплексное собственное значение (постоянная распространения волны); ω – круговая частота; $\kappa = \omega/c$ – волновое число в вакууме; c – скорость света; r – радиус-вектор сферической системы координат (r, θ, φ) ; $\varepsilon(r)$ – диэлектрическая проницаемость плазмы, зависящая от высоты; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Поперечный оператор определен на интервале $[0; \infty)$, его собственные значения $\lambda = \nu(\nu+1)$. В решении используются граничные условия. Поверхностный импеданс (1) зависит от высоты. На границе Земля–воздух он равен проводимости грунта. Так как в рассматриваемом диапазоне частот Землю можно считать бесконечно проводящей, первое граничное условие примет вид $\delta(a) = 0$, a – радиус Земли. Поскольку радиоволны данной частоты ω , проникая в ионосферу, сильно затухают, свойства плазмы выше границы на несколько глубин скин-слоя не влияют на окончательный результат.

Высота, на которую проникают волны, зависит от частоты, но не превышает 100 км. Поэтому, начиная с этой высоты, плазму можно считать однородной по радиусу: при $r \geq r_1$, то

$\varepsilon(r) = \text{const}$. На высоте $r_1 = a + 100$ км используется поверхностный импеданс однородной по высоте хорошо проводящей плазмы, равный $\delta(r_1) = [\varepsilon(r_1)]^{-1/2}$, где $|\varepsilon(r_1)| \gg 1$. Это второе граничное условие.

Фактически задача на комплексные собственные значения сводится к решению нелинейного уравнения $\delta(a, \lambda) = 0$ относительно параметра λ , где функция $\delta(a, \lambda)$ получается путем численного интегрирования уравнения (1) сверху вниз от высоты r_1 до высоты $r = a$. Функция $\delta(a, \lambda)$ является аналитической, поэтому ее корни можно находить с помощью итераций.

Пусть λ^l обозначает l -е приближение к искомому собственному числу λ , тогда $l+1$ приближение по Ньютону равно

$$\lambda^{l+1} = \lambda^l - \frac{\delta(a; \lambda^l)}{\frac{\partial}{\partial \lambda} \delta(a; \lambda^l)}. \quad (2)$$

После получения λ^l интегрирование повторяется при этом новом собственном числе и получается следующая итерация λ^{l+1} и т. д. Процесс останавливается, когда разность нового и старого значений собственных чисел оказывается меньше 10^{-7} . Значение производной $\frac{\partial}{\partial \lambda} \delta(a; \lambda)$ находится путем интегрирования дифференциального уравнения для функции $\delta_1(r) \equiv \frac{\partial}{\partial \lambda} \delta(r, \lambda)$ совместно с функцией $\delta(r)$. Уравнение для этой функции и начальное значение при $r = r_1$ получают, дифференцируя (1) по параметру λ :

$$\frac{d}{dr} \delta_1(r) - 2ik\varepsilon(r)\delta(r)\delta_1(r) + \frac{1}{ikr^2\varepsilon(r)} = 0 \quad (3)$$

и

$$\delta_1(r_1) = 0. \quad (4)$$

Начальная высота r_1 выбиралась перебором: строились решения для нескольких значений r_1 , а затем остановились на значении 100 км, поскольку окончательный результат с относительной точностью 10^{-7} не изменяется при дальнейшем увеличении начальной высоты. Изложенный способ решения позволил получить не только собственное число нулевой (распространяющейся) моды, но и следующих, запертых или местных мод. Как известно, метод Ньютона сходится к ближайшему относительно начального приближения корню, поэтому в этом случае применяют метод исключения уже найденных корней с помощью теоремы Безу. Вместо исходной функции $\varphi(\lambda) = 0$ используется связанная с ней

$$\text{функция } \varphi_n = \frac{\varphi}{\prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)}, \text{ где } \lambda_i - \text{уже известные}$$

корни функции φ , а n – число этих корней. Легко

видеть, что функция φ_n имеет те же корни, что и исходная функция φ , за исключением n первых значений.

При расчете составляющих поля используются, кроме собственных чисел, еще и так называемые нормировочные интегралы. При нашей схеме расчета эти множители не требуют дополнительных вычислений, поскольку

$$N^0 = ika^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \delta(a; \lambda) = ika^2 \delta_1(a). \quad (5)$$

Через нормировочный интеграл (5) выражается нижняя, емкостная высота резонатора [1–4]:

$$H_C(f) \cong \int_0^\infty \frac{dh}{1 - i\sigma(h)/\omega\epsilon_0} = ika^2 \delta_1(a). \quad (6)$$

Ее также можно назвать электрической высотой, поскольку

$$H_C(\theta) = \frac{\int_0^\infty E_r(r, \theta) dr}{E_r(a, \theta)}. \quad (7)$$

Верхняя, индуктивная H_L высота вводится аналогичным способом:

$$H_L(\theta)(\theta) = \frac{\int_0^\infty \frac{r}{a} H_\varphi(r, \theta) dr}{H_\varphi(r, \theta)}. \quad (8)$$

Для вычисления индуктивной высоты используется соотношение $\nu(\nu + 1) = H_L / H_C$. Эти высоты по физическому смыслу полностью аналогичны электрической и магнитной высотам, используемым в работах [1–5, 15, 16, 18–20, 23–26, 29–34]. Однако высоты H_C и H_L находят из строгого решения для непрерывного профиля, поэтому и обозначения для них отличаются от h_E и h_M , используемых в эвристических формулах (9)–(13), поскольку там частотные зависимости характерных высот постулируются, а не находятся из конкретного профиля.

3. Постоянная распространения СНЧ-радиоволн. Высотный профиль проводимости атмосферы не зависит от частоты. Профиль колена, как и экспоненциальные модели, используемые при расчете постоянной распространения, есть не что иное, как удобная интерпретация эвристических зависимостей $\nu(f)$. Напрасно надеяться, что приближенные соотношения для модели колена или для экспоненциальной модели дадут ту же самую комплексную постоянную распространения, что и строгое решение задачи даже тогда, когда используется один и тот же профиль проводимости, например профиль 2 на рис. 1.

На рис. 2 показаны основные элементы решения рассматриваемой задачи. Кривая 1 (рис. 2, а) показывает изменения проводимости атмосферы в области высот 0...150 км, присущие

модели колена [31]. Вблизи 55 км хорошо виден изгиб и здесь располагается реальная часть электрической высоты h_E . Верхняя часть профиля привязана к магнитной высоте h_M , лежащей на 96,5 км. Магнитный высотный масштаб отличается от электрического, поэтому кривая 1 имеет дополнительный изгиб близ 83 км. Чтобы его подчеркнуть, на рисунке тонкими линиями продолжены электрический (линия с точками) и магнитный (линия с крестиками) профили.

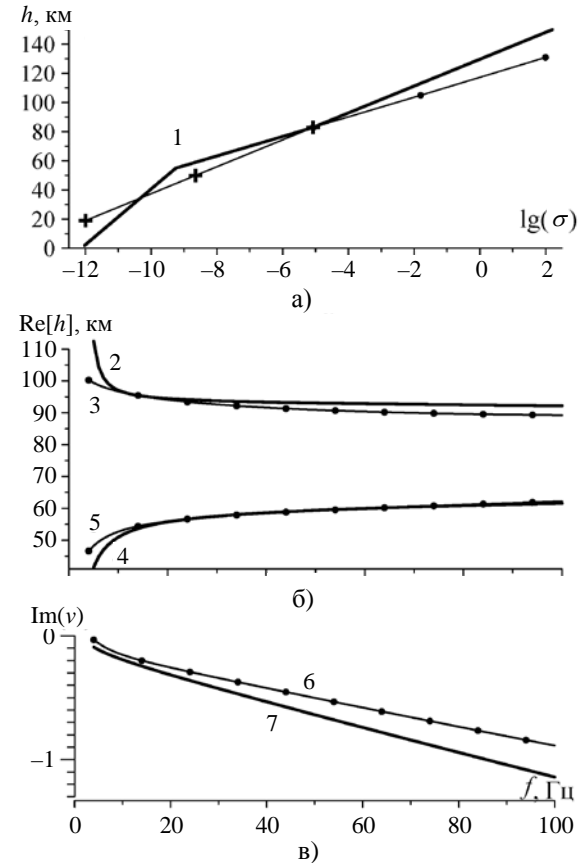


Рис. 2. Этапы решения: 1 – профиль проводимости; 2 – $\text{Re}[h_M]$ в эвристической модели; 3 – $\text{Re}[H_L]$ в строгом решении; 4 – $\text{Re}[h_E]$ в эвристической модели; 5 – $\text{Re}[h_C]$ в точном решении; 6 и 7 – затухание СНЧ-радиоволн в эвристической модели и точном решении

На рис. 2, б показаны зависимости от частоты, отложенной вдоль общей абсциссы. Кривые 2–5 показывают реальные части характерных высот: кривая 2 – $\text{Re}[h_M(f)]$, кривая 3 – $\text{Re}[H_L(f)]$, кривая 4 – $\text{Re}[h_E(f)]$ и кривая 5 – $\text{Re}[H_C(f)]$, полученных в эвристическом и строгом решении.

На рис. 2, в представлена частотная зависимость затухания радиоволн $\text{Im} \nu(f)$. Кривая 6 рассчитана по формулам (9)–(13). С помощью непрерывного высотного профиля проводимости получена кривая 7, отвечающая точному решению в приближении полного поля.

Модель колена (значения всех параметров приведены в таблице) дает следующие эврис-

тические зависимости. Комплексные электрическая и магнитная высоты h_E и h_M зависят от частоты f следующим образом:

$$h_E(f) = h_{KNEE} + \zeta_a \ln(f / f_{KNEE}) + \ln \left[1 + (f_{KNEE} / f)^2 \right] (\zeta_a - \zeta_b) / 2 + i \left[\zeta_a \pi / 2 - (\zeta_a - \zeta_b) \arctg(f_{KNEE} / f) \right]; \quad (9)$$

$$h_M(f) = h_m^* - \zeta_m \ln(f / f_m^*) - i \zeta_m(f) \pi / 2. \quad (10)$$

Здесь h_{KNEE} и f_{KNEE} – высота и частота колена. Нижний излом кривой 1 на рис. 2, а удовлетворяет условию $\sigma(h_{KNEE}) = \sigma_{KNEE} = 2\pi f_{KNEE} \varepsilon_0$, где диэлектрическая проницаемость вакуума $\varepsilon_0 = 8,859 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; ζ_a и ζ_b – масштабы проводимости выше и ниже колена. Из-за их различия профиль терпит излом на высоте колена 55 км.

Параметры профиля с коленом

Частота колена f_{KNEE} , Гц	10
Высота колена h_{KNEE} , км	55
Масштаб проводимости выше колена ζ_a , км	2,9
Масштаб проводимости ниже колена ζ_b , км	8,3
Магнитная высота привязки h_m^* , км	96,5
Магнитная частота привязки f_m^* , Гц	8
Магнитный масштаб на частоте привязки ζ_m^* , км	4
Параметр частотной зависимости магнитного масштаба f_m^* , Гц	8
Параметр частотной зависимости магнитного масштаба b_m , км	20

В окрестности магнитной высоты 96,5 км профиль определяется параметрами h_m^* , f_m^* , ζ_m^* и b_m , а масштаб ζ_m зависит от частоты

$$\zeta_M = \zeta_m^* + b_m(1/f - 1/f_m^*), \quad (11)$$

Профиль в окрестности магнитной высоты описывается одной экспонентой, которая в координатах рис. 2 выглядит прямой линией. Электрический и магнитный профили пересекаются на высоте 83 км.

Постоянная распространения $\nu(f)$ получается в эвристической модели из стандартного выражения

$$\nu(\nu + 1) = (ka)^2 h_M / h_E, \quad (12)$$

что эквивалентно уравнению

$$\nu(f) = \left[1/4 + (ka)^2 h_M / h_E \right]^{1/2} - 1/2. \quad (13)$$

При используемой зависимости от времени $\exp(+i\omega t)$ знак корня в уравнении (13) положительный, что обеспечивает затухание распространяющихся радиоволн. Используемые в формулах (9)–(13) параметры приведены в таблице, они подбирались так, чтобы наилучшим образом соответствовать наблюдениям шумановского резонанса [31].

Мы используем в расчетах один и тот же профиль проводимости (кривая 1 рис. 2), введен-

ный в модели колена [31]. Поэтому в идеальном случае расчеты по эвристическим формулам (9)–(13) должны были бы совпасть со строгим решением электродинамической задачи (1)–(8). Как видно из рис. 2, это не так. Действительная часть постоянной распространения, найденная по эвристическим формулам, близка к точному значению, но ее мнимая часть (затухание радиоволн) существенно отличается. В точном решении затухание оказывается выше. Подобный результат уже отмечался в работе [33], но он относился к экспоненциальному профилю [17], а не к модели колена [31].

4. Модельные спектры шумановского резонанса. Частотные зависимости постоянной распространения позволяют рассчитать спектры глобальных резонансов при произвольном расположении наблюдателя и источника. Удобнее всего использовать равномерное распределение мировых гроз по земному шару [34], поскольку в этом случае результаты вообще не зависят от расстояния наблюдатель–источник.

На рис. 3 приведены энергетические спектры вертикального электрического поля, вычисленные для равномерного распределения гроз по Земле. Спектр 1 получен для точной постоянной распространения, а спектр 2 рассчитан с помощью эвристических формул.

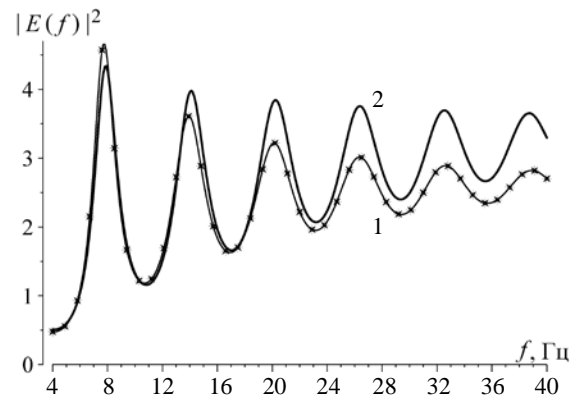


Рис. 3. Энергетические спектры вертикального электрического поля, рассчитанные при однородном распределении мировых гроз по Земле. Кривая 1 – точное решение для профиля 1; кривая 2 – решение, полученное для того же профиля, но в рамках эвристического подхода [31]

Графики близки друг к другу, однако заметны отличия. Высота и ширина спектральных пиков отличаются, особенно на высших модах колебаний. Отличия спектров на 40 Гц достигают 20–30 %, что обусловлено девиациями затухания показанного кривыми 6 и 7 на рис. 2.

5. Обсуждение результатов. Как видно из рис. 2, точная и эвристическая зависимости затухания заметно отличаются друг от друга. Как профиль 1, так и любая другая модель колена в приближении полного поля дает результаты, от-

личные от эвристических зависимостей $\nu(f)$, «опирающихся» на те же профили.

Отличия в реальной части постоянной распространения (фазовой скорости радиоволн) при этом незначительны, поэтому все модели довольно хорошо описывают наблюдаемые экспериментально пиковые частоты в спектрах шумановского резонанса, что уже отмечалось в работе [33]. Что же касается мнимой части постоянной распространения, то здесь отличия оказываются более заметными.

Пусть в резонаторе Земля–ионосфера проводимость описывается профилем 1 рис. 2, тогда отклонения энергетических спектров могут сыграть отрицательную роль, если результаты наблюдений интерпретируются с помощью спектров, вычисленных с помощью эвристических формул. Например, пусть по наблюдаемым и расчетным спектрам шумановского резонанса находят спектр источника. Тогда применение эвристической модели при прочих равных условиях превратит «белый» спектр источника в «красный» и занижит амплитуду тока источника. Аналогично, если использовать эвристические спектры в решении обратной задачи [35, 36], то окажется, что расстояние от наблюдателя до источника меньше истинного. Это исказит глобальное распределение мировых гроз, получаемое с помощью радиотомографии по данным шумановского резонанса.

Еще раз подчеркнем, что модель колена [31] не оперирует реальным профилем проводимости. В ней постулируются четыре оптимальные функции частоты: электрическая и магнитная высоты $h_E(f)$ и $h_M(f)$, а также электрический и магнитный высотные масштабы проводимости $\zeta_E(f)$ и $\zeta_M(f)$. Эти параметры, конечно, можно отнести к некоторому профилю проводимости воздуха, однако из этого не следует, что полученная таким образом зависимость $\sigma(h)$ обеспечит получение эвристической функции $\nu(f)$ при построении точного решения.

Очевидно, что выбор таких четырех функций частоты для конкретного профиля оказывается деликатной задачей, поскольку сам профиль проводимости $\sigma(h)$ от частоты не зависит.

Выводы. Профиль с коленом [31], как и экспоненциальный профиль [26], есть всего лишь удобный приближенный способ вычисления постоянной распространения $\nu(f)$, к реальной ионосфере он имеет отдаленное отношение. При сопоставлении расчетных данных, полученных с помощью разложений в ряд зональных гармоник, и по прямым методам расчета *FDTD* или 2ДТУ, необходимо использовать одинаковые реалистичные модели резонатора. При этом следует отказаться от эвристических формул и использовать строгое решение.

Использование эвристических формул при расчете постоянной распространения приведут к отклонениям от результатов прямых численных методов даже при использовании одного и того же профиля проводимости и одинаковых источников поля.

Библиографический список

1. Кириллов В. В. Параметры волновода Земля–ионосфера на СНЧ / В. В. Кириллов // Проблемы дифракции и распространения радиоволн. – 1993. – 25. – С. 35–52.
2. Кириллов В. В. Электромагнитные волны с диапазоне СНЧ в волноводе Земля–ионосфера / В. В. Кириллов, В. Н. Копейкин, В. К. Муштак // Геомагнетизм и Аэронавигация. – 1997. – 37, № 3. – С. 114–120.
3. Кириллов В. В. Двумерная теория распространения электромагнитных волн СНЧ диапазона в волноводе Земля–ионосфера / В. В. Кириллов // Изв. вузов. Радиофизика. – 1996. – 39, № 12. – С. 1103–1112.
4. Кириллов В. В. Решение двумерных телеграфных уравнений с анизотропными параметрами / В. В. Кириллов, В. Н. Копейкин // Изв. вузов. Радиофизика. – 2002. – 45, № 12. – С. 1011–1024.
5. Pechony O. Schumann resonance parameters calculated with a partially uniform knee model on Earth, Venus, Mars, and Titan / O. Pechony, C. Price // Radio Sci. – 2004. – 39, Iss. 5. – P. RS5007(10 p.).
6. Pechony O. Modeling and Simulations of Schumann Resonance Parameters Observed at the Mitzpe Ramon Field Station: Ph.D. Thesis / O. Pechony; Tel-Aviv University. – Tel-Aviv: 2007. – 92 p.
7. Finite difference analyses of Schumann resonance and reconstruction of lightning distribution / Y. Ando, M. Hayakawa, A. V. Shvets, A. P. Nickolaenko // Radio Sci. – 2005. – 40, Iss. 2. – P. RS2002 (17 p.).
8. A numerical simulation of Earth's electromagnetic cavity with the Transmission Line Matrix method: Schumann resonances / J. A. Morente, G. J. Molina-Cuberos, J. A. Port et al. // J. Geophys. Res. – 2002. – 108, N A5. – P. 1195(11 p.).
9. Yang H. Power variations of Schumann resonances related to El Nino and La Nina phenomena / H. Yang, V. P. Pasko // Geophys. Res. Lett. – 2007. – 34, Iss. 11. – P. L11102 (5 p.).
10. Yang H. Three-dimensional finite-difference time domain modeling of the Earth-ionosphere cavity resonances / H. Yang, V. P. Pasko // Geophys. Res. Lett. – 2005. – 32, Iss. 3. – P. L03114 (4 p.).
11. Yang H. Three-dimensional finite difference time-domain modeling of the Schumann resonance parameters on Titan, Venus, and Mars / H. Yang, V. P. Pasko, Y. Yair // Radio Sci. – 2006. – 41, Iss. 2. – P. RS2S03 (10 p.).
12. Schumann resonances as a tool to study the lower ionospheric structure of Mars / G. J. Molina-Cuberos, J. A. Morente, B. P. Besser et al. // Radio. Sci. – 2006. – 41, Iss. 1. – P. RS1003 (8 p.).
13. Study of Schumann resonances based on magnetotelluric records from the western Mediterranean and Antarctica / S. Toledo-Redondo, A. Salinas, J. Porti et al. // J. Geophys. Res. – 2010. – 115, Iss. D22. – P. 114–124.
14. Parallel 3D-TLM algorithm for simulation of the Earth-ionosphere cavity / S. Toledo-Redondo, A. Salinas, J. A. Morente-Molinera et al. // J. of Computational Phys. – 2013. – 236. – P. 367–379.
15. Nickolaenko A. P. Resonances in the Earth-ionosphere cavity / A. P. Nickolaenko, M. Hayakawa. – Dordrecht-Boston-L.: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 380 p.
16. Nickolaenko A. Schumann resonance for tyros (Essentials of Global Electromagnetic Resonance in the Earth–Ionosphere Cavity) / A. P. Nickolaenko, M. Hayakawa. – Tokyo-Heidelberg-N. Y.-Dordrecht-L.: Springer Geophysics, 2014. – Ser. XI. – 348 p.

17. Ishaq M. Method of obtaining radiowave propagation parameters for the Earth–ionosphere duct at ELF / M. Ishaq, D. Jones LI. // *Electronic Lett.* – 1977. – 13, N 2. – P. 254–255.
18. Николаенко А. П. О возможности существования глобальных электромагнитных резонансов на планетах Солнечной системы / А. П. Николаенко, Л. М. Рабинович // *Космические исслед.* – 1982. – 20, № 1. – С. 82–89.
19. Николаенко А. П. О применимости сверхнизко-частотных глобальных резонансов для исследования грозовой активности Венеры / А. П. Николаенко, Л. М. Рабинович // *Космические исслед.* – 1987. – 25, № 2. – С. 301–306.
20. Sentman D. D. Electrical conductivity of Jupiter Shallow interior and the formation of a resonant planetary-ionospheric cavity / D. D. Sentman // *ICARUS.* – 1990. – 88. – P. 3–86.
21. Блюх П. В. Глобальные электромагнитные резонансы в полости Земля–ионосфера / П. В. Блюх, А. П. Николаенко, Ю. Ф. Филиппов. – К.: Наук. думка, 1977. – 199 с.
22. Wait J. R. *Electromagnetic Waves in Stratified Media.* Oxford / J. R. Wait. – N. Y.-Toronto: Pergamon Press, 1970. – 608 p.
23. Гюннинен Э. М. Поле вертикального электрического диполя над сферической землей с неоднородной по высоте ионосферой / Э. М. Гюннинен, Ю. П. Галюк // *Проблемы дифракции и распространения радиоволн.* – Л.: ЛГУ, 1972. – Вып. 11. – С. 109–120.
24. О резонансных явлениях в полости Земля–ионосфера / П. В. Блюх, Ю. П. Галюк, Э. М. Гюннинен и др. // *Изв. вузов. Радиофизика.* – 1977. – 20, № 4. – С. 501–509.
25. Галюк Ю. П. Определение характеристик распространения СДВ-полей в волноводе Земля–неоднородная по высоте анизотропная ионосфера / Ю. П. Галюк, В. И. Иванов // *Проблемы дифракции и распространения радиоволн.* – Л.: ЛГУ, 1978. – Вып. 16. – С. 148–153.
26. Greifinger C. Approximate method for determining ELF eigenvalues in the Earth–ionosphere waveguide / C. Greifinger, P. Greifinger // *Radio Sci.* – 1978. – 13. – P. 831–837.
27. Wait J. R. Characteristics of the Earth–ionosphere waveguide for VLF radio waves / J. R. Wait, K. P. Spies // *NBS Technical Note N 300.* – 1964. – 33 p.
28. Cole R. K. Electrification in the Earth's atmosphere from altitudes between 0 and 100 kilometers / R. K. Cole, E. T. Pierce // *J. Geophys. Res.* – 1965. – 70, N 11. – P. 2735–2749.
29. Sentman D. D. Approximate Schumann resonance parameters for two–scale–height ionosphere / D. D. Sentman // *J. Atmos. Terr. Phys.* – 1990. – 52, N 1. – P. 35–46.
30. Fullekrug M. Dispersion relation for spherical electromagnetic resonances in the atmosphere / M. Fullekrug // *Phys. Lett. A.* – 2000. – 275, N 1. – P. 80–89.
31. Mushtak V. C. Propagation parameters for uniform models of the Earth-ionosphere waveguide / V. C. Mushtak, E. Williams // *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* – 2002. – 64, Iss. 18. – P. 1989–2001.
32. Greifinger P. S. On modeling the lower characteristic ELF altitude from aeronautical data / P. S. Greifinger, V. C. Mushtak, E. R. Williams // *Radio Sci.* – 2007. – 42, Iss. 2. – P. RS2S12 (12 p.).
33. Джонс Д. Расчет электромагнитного резонанса полости Земля–ионосфера по методу полного поля и с помощью упрощенной модели / Д. Джонс, М. Кнотт // *Радиофизика и электрон.*: сб. науч. тр. / Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – X., 2003. – 8, № 1. – С. 55–66.
34. Williams E. R. Distinguishing ionospheric models using Schumann resonance spectra / E. R. Williams, V. C. Mushtak, A. P. Nickolaenko // *J. Geophys. Res.* – 2006. – 111. – P. D16107 (12 p.).
35. Shvets A. V. Variations of the global lightning distribution revealed from three station Schumann resonance measurements / A. V. Shvets, Y. Hobara, M. Hayakawa // *J. Geophys. Res.* – 2010. – 115. – P. A12316 (15 p.).
36. Shvets A. V. Global lightning activity on the basis of inversions of natural elf electromagnetic data observed at multiple stations around the world / A. V. Shvets, M. Hayakawa // *Surv. Geophys.* – 2011. – 32, N 6. – P. 705–732.

Рукопись поступила 05.03.2015.

Yu. P. Galuk, A. P. Nickolaenko, M. Hayakawa

COMPARISON OF EXACT AND APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE SCHUMANN RESONANCE PROBLEM FOR THE KNEE CONDUCTIVITY PROFILE

The rapid development of computer technology allows for the direct numerical solution of the electromagnetic resonance problem in the Earth–ionosphere cavity. Either the two-dimensional telegraph equations (2DTU) or the finite element method in the time domain (FDTD) techniques are used. The direct solutions apply the same models of the conductivity profile of atmosphere as those applied in ordinary solutions. However, it is forgotten that these profiles are nothing else, but a convenient interpretation for the approximate heuristic relations for deriving the propagation constant. Since the full wave solution of the electromagnetic problem for such a profile does not coincide with the approximate one, the direct numerical solutions must also deviate from the heuristic one. We apply the knee conductivity profile in the rigorous full wave solution and in the approximate solution and evaluate their deviations.

Key words: global electromagnetic resonance, the knee profile, rigorous and approximate solutions.

Ю. П. Галюк, О. П. Николаенко, М. Хайакава

ПОРІВНЯННЯ ТОЧНОГО ТА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ШУМАНІВСЬКИЙ РЕЗОНАНС ДЛЯ ПРОФІЛЮ ПРОВІДНОСТІ З «КОЛІНОМ»

Швидкий розвиток обчислювальної техніки дозволив чисельно розв'язувати задачу про електромагнітні резонанси в порожнині Земля–іоносфера. Найчастіше вживають розв'язання за допомогою двовимірних телеграфних рівнянь або метод кінцевих елементів у часовому просторі, що позначається аббревіатурою FDTD. Очевидно, що при чисельному моделюванні використовують відомі моделі профілю провідності атмосфери, наприклад експоненціальну або модель з «коліном». Однак при цьому забувають, що ці профілі є тільки зручною інтерпретацією наближених евристичних співвідношень. Оскільки точний розв'язок задачі про сталу поширення в наближенні повного поля для такого профілю не збігається з евристичним, то й прямі чисельні розв'язки повинні також відрізнятися від модельних. У роботі аналізується відмінність наближеного розв'язку для профілю з коліном від точного рішення та оцінюється його точність.

Ключові слова: глобальний електромагнітний резонанс, профіль провідності з коліном, точний та наближений розв'язки.