

**Ю. В. Тарасов, Л. Д. Шостенко**

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины*

*12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина*

E-mail: [yutarasov@ire.kharkov.ua](mailto:yutarasov@ire.kharkov.ua)

## ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛН ЧЕРЕЗ ОТРЕЗОК ВОЛНОВОДА СО СЛУЧАЙНО-ШЕРОХОВАТЫМИ СТЕНКАМИ: ДВОЙСТВЕННАЯ ПРИРОДА ЛОКАЛИЗАЦИИ

Построена теория распространения волн в волноводных системах, боковые границы которых на конечном участке являются случайно-шероховатыми. Показано, что главную роль в формировании волноводных состояний играет градиентный механизм поверхностного рассеяния волн, в котором определяющей является острота шероховатостей, а не их амплитуда. Шероховатый участок волновода играет роль эффективного модулированного потенциального барьера, ширина которого совпадает с длиной участка, а высота зависит от средней остроты неровностей границ волновода. В такой системе возможны два типа локализации волн. Один из них проявляется в последовательной «отсечке» волноводных мод по мере заострения шероховатостей, что приводит к прореживанию спектра волновода и переходу его при достаточно большой остроте шероховатостей в «запредельный» режим. Другой механизм – это традиционная андерсоновская локализация, связанная с многократным рассеянием волноводных мод на случайных флуктуациях эффективного потенциала. Предсказано резкое (до 100 %) возрастание волнового контактанса при переходе волновода в эффективно одномодовый режим за счет градиентной перенормировки мод, которое связано с исчезновением в этом случае канала межмодового рассеяния. Ил. 3. Библиогр.: 11 назв.

**Ключевые слова:** многомодовый волновод, случайно-шероховатые границы, градиентное рассеяние, локализация волн.

Многократное рассеяние квантовых и классических волн в неупорядоченных системах лежит в основе многих интригующих физических явлений. Наиболее известными и хорошо изученными среди них являются андерсоновская локализация носителей тока и волн различного типа, квантовые поправки к проводимости (слабая локализация), переход металл–изолятор в твердотельных системах и когерентное ретро-рассеяние волн (усиление обратного рассеяния). Однако исследователи в экспериментах все чаще стали получать результаты либо не полностью соответствующие, либо вообще противоречащие традиционной теории локализации волновых состояний, вызванной неупорядоченностью систем (статья [1] и приведенные в ней ссылки). Наблюдаемые противоречия могут быть обусловлены большим числом факторов, к которым можно отнести, в частности, нетривиальную топологию среды распространения. Этот фактор проявляет себя в разнообразных явлениях: эффект Ааронова-Бома, квантовый эффект Холла, неоднородная концентрация энергии в резонаторах с неупорядоченным заполнением [2], необычный характер транспорта носителей тока в проводниках, имеющих изолированные изгибы [3] и в баллистических проводниках, границы которых деформированы случайным образом [4].

В настоящей работе решена задача о волновом транспорте через отрезок бесконечно длинного двумерного (2D) волновода, не содержащий «объемных» примесей, но имеющий случайно шероховатые боковые границы. Средняя ширина волновода предполагается произвольной. В работах [4, 5] уже решалась аналогичная задача для случая одномодового проводника со случайно-

шероховатыми границами, который с определенной точностью можно рассматривать как строго одномерную квантовую систему. В соответствии с общей теорией одномерных неупорядоченных систем, электронные состояния в таком проводнике оказывались экспоненциально локализованными при любой степени шероховатости его боковых границ.

Естественным продолжением этих исследований является изучение особенностей электронного и волнового транспорта в многомодовых волноводных системах как квантовых, так и классических. Для решения этой задачи мы используем операторную технику разделения мод, разработанную ранее в работе [6] для 2D квантовых проволок со случайным объемным потенциалом. Этот метод применим также и для проводящих систем с неоднородными границами, поскольку поверхностные неоднородности, как правило, можно трансформировать в объемные потенциалы подходящим выбором «сглаживающего» преобразования координат. В настоящей работе, однако, мы используем другой способ преобразования неоднородностей границ в объемные потенциалы, а именно переход в уравнении Гельмгольца к представлению локальных (зависящих от продольной координаты) мод поперечного квантования. Строгое разделение волноводных мод, по сути эквивалентное разделению переменных в исходном волновом уравнении, производится нами с помощью специальной операторной процедуры, которая сводится к построению ряда теории возмущений по интенсивности межмодового рассеяния. В качестве нулевого приближения при построении этой теории мы используем решение вспомогательной задачи, в которой межмодовым

рассеянием пренебрегается, но зато внутримодовое рассеяние учитывается точно.

С помощью указанной выше методики нам удалось показать, что шероховатый участок бесконечно длинного волновода может рассматриваться как эффективный случайно модулированный потенциальный барьер, средняя высота которого, определяющая число распространяющихся волноводных мод, зависит от степени остроты шероховатостей. Флуктуационная часть этого потенциального барьера приводит к двум принципиально различным типам рассеяния: когерентному внутримодовому и некогерентному межмодовому рассеянию. Межмодовое рассеяние приводит, как правило, к сильному перемешиванию модовых состояний, за исключением случаев когда поверхностные шероховатости являются экстремально плавными и когда шероховатости остры настолько, что на шероховатом участке волновода допускается распространение не более одной моды.

В работе [7] изучалось прохождение электромагнитных волн через отрезок многомодового волновода со стенками, гофрированными периодически. Было показано, что основным управляющим параметром, регулирующим прозрачность такого волновода, является острота гофрировки его границ. Даже при относительно малой амплитуде гофрировки увеличение ее остроты приводит к последовательной отсечке волноводных мод (геометрической локализации), т. е. фактически к уменьшению, вплоть до нуля, эффективной ширины волновода. В волноводах же со случайно гофрированными стенками, помимо обнаруженной ранее локализации геометрической природы, имеет место также локализация андерсоновского типа, характерная для объемно-неупорядоченных волновых систем. Интересным и неожиданным, на наш взгляд, является тот факт, что локализация геометрической природы управляется только локальной остротой профиля шероховатых волноведущих границ, тогда как локализация андерсоновского типа контролируется совместно и остротой, и продольным размером шероховатостей.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим бесконечно длинный  $2D$ -волновод с ровными параллельными стенками, на конечном участке которого (длины  $L$ ) боковые границы подвержены случайной гофрировке. Отклонения этих стенок от прямых линий мы считаем симметричными относительно центральной оси волновода (рис. 1). В работе [4] было показано, что такая модель шероховатого волновода вполне адекватно (по крайней мере, качественно) учитывает все механизмы поверхностного рассеяния. Если отклонение од-

ной из стенок волновода от прямой линии задано функцией  $w(z)$ , его локальная (по оси  $z$ ) ширина равна  $w(z) = w_0 + 2\xi(z)\theta(L/2 - |z|)$ . Здесь  $w_0$  означает ширину негофрированных участков I и III (рис. 1). Случайный процесс  $\xi(z)$  мы будем задавать корреляционными равенствами

$$\begin{aligned} \langle \xi(z) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(z)\xi(z') \rangle &= \sigma^2 W(z - z'), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma$  – дисперсия шероховатой границы;  $W(z)$  – функция с максимумом, равным единице, в точке  $z = 0$ , убывающая до пренебрежимо малых значений на расстоянии  $|\Delta z| \sim r_c$  (корреляционный радиус) от этой точки. Среднюю амплитуду гофрировки волновода мы будем считать малой по сравнению с его шириной:

$$\sigma \ll w_0. \quad (2)$$

В то же время остроту профиля гофрировки, характеризуемую отношением  $\sigma/r_c$ , мы будем считать произвольной.

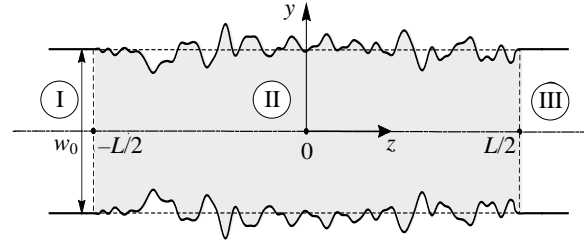


Рис. 1. Двумерный волновод с симметричной гофрировкой боковых стенок на участке  $-L/2 \leq z \leq L/2$

Рассмотрим постановку эксперимента, когда в реальном трехмерном волноводе возбуждаются волны  $TE$ -типа, а именно  $TE_{0n}$ -моды с индексами, описывающими вариацию поля вдоль осей  $x$  и  $y$ , соответственно. В этом случае все компоненты электромагнитного поля можно найти с помощью одной  $x$ -й компоненты векторного потенциала  $\vec{A}(y, z)$ , удовлетворяющего однородному волновому уравнению. Боковые границы волновода мы будем считать идеально проводящими, что для  $s$ -поляризованных волн соответствует граничным условиям Дирихле на поверхностях  $y = \pm w(z)/2$ .

Для решения задачи о возбуждении волноводной системы мы будем искать функцию Грина из уравнения

$$(\Delta + k^2)G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (3)$$

где  $\Delta$  – двумерный оператор Лапласа,  $k = \omega/c$ . В качестве первого шага выполним преобразование Фурье уравнения (3) по локально (для каждо-

го значения  $z$ ) полному набору собственных функций поперечной части лапласиана

$$|y, z; n\rangle = \left[ \frac{2}{w(z)} \right]^{1/2} \sin \left\{ \left[ \frac{y}{w(z)} + \frac{1}{2} \right] \pi n \right\}, \quad (4)$$

и представим функцию Грина в виде двойного ряда по этим функциям

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{n, n'=1}^{\infty} \langle y, z; n | G_{nn'}(z, z') | y', z'; n' \rangle. \quad (5)$$

Для модовых компонент  $G_{nm}(z, z')$  функции Грина из уравнения (3) вытекает система связанных уравнений

$$V_n(z) = \pi^2 n^2 \left[ \frac{1}{w^2(z)} - \frac{1}{w_0^2} \right] + \left( 1 + \frac{\pi^2 n^2}{3} \right) \left[ \frac{w'(z)}{2w(z)} \right]^2, \quad (7a)$$

$$U_{nm}(z) = 2B_{nm} \left\{ D_{nm} \left[ \frac{w'(z)}{w(z)} \right]^2 - \frac{1}{w(z)} \left[ w'(z) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} w'(z) \right] \right\}. \quad (7b)$$

Численные коэффициенты, фигурирующие в потенциале (7б), имеют следующий вид:

$$B_{nm} = \frac{nm}{n^2 - m^2} \cos^2 \left[ \frac{\pi}{2} (n - m) \right], \quad (8)$$

$$D_{nm} = \frac{3n^2 + m^2}{n^2 - m^2}.$$

Уравнение (6) должно быть дополнено граничными условиями на оси  $z$ . Поскольку волновод является открытой системой, в качестве граничных условий при  $z \rightarrow \pm\infty$  мы будем использовать условия излучения. Сформулировать их в аналитическом виде для многомодовой неоднородной волноводной системы в общем случае затруднительно. Однако в разд. 2 мы покажем, что все недиагональные модовые компоненты функции Грина можно линейно выразить через компоненты диагональные, и следовательно, граничные условия излучения можно *a priori* ставить только для этих компонент.

**2. Учет межмодового рассеяния.** Систему уравнений (6) можно разрешить относительно модовых компонент функции Грина при помощи операторной процедуры, разработанной в работе [6] и применимой для случая потенциалов  $V_n(z)$  и  $U_{nm}(z)$  достаточно произвольного вида. Особенности применения этой методики в задаче о функции Грина волновода с скорректированными границами описаны в работе [7]. Ключевым пунктом этой методики является введение затравочной функции Грина  $G_m^{(V)}(z, z')$  как решения уравнения (6) без учета межмодовых потенциалов:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_n^2 - V_n(z) \right] G_{mn'}(z, z') - \sum_{\substack{m=1 \\ (m \neq n)}}^{\infty} U_{nm}(z) G_{mn'}(z, z') = \delta_{nn'} \delta(z - z'), \quad (6)$$

где  $k_n^2 = k^2 - (\pi n/w_0)^2$  – продольное волновое число  $n$ -й моды на неограниченных участках;  $V_n(z)$  и  $U_{nm}(z)$  – эффективные «потенциалы», которые мы будем рассматривать как источник внутримодового и межмодового рассеяния соответственно;

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_m^2 - V_m(z) \right] G_m^{(V)}(z, z') = \delta(z - z'). \quad (9)$$

С помощью этой вспомогательной функции Грина недиагональные модовые компоненты искомой функции (5) можно выразить через диагональные с помощью операторного равенства

$$\hat{G}_{mn} = \mathbf{P}_n (1 - \hat{\mathbf{R}})^{-1} \hat{\mathbf{R}} \mathbf{P}_n \hat{G}_{nn}, \quad (10)$$

после подстановки которого в (6) для диагональных компонент  $G_{nn}(z, z')$  получается замкнутое уравнение

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_n^2 - V_n(z) - \hat{\mathcal{T}}_n \right] G_{nn}(z, z') = \delta(z - z'); \quad (11)$$

$$\hat{\mathcal{T}}_n = \mathbf{P}_n \hat{\mathbf{U}} (1 - \hat{\mathbf{R}})^{-1} \hat{\mathbf{R}} \mathbf{P}_n. \quad (12)$$

В формулах (10) и (12) символ  $\mathbf{P}_n$  означает проектирующий оператор, действие которого состоит в присвоении ближайшему модовому индексу любого стоящего рядом с ним оператора (независимо, слева или справа) фиксированного значения  $n$ . Оператор  $\hat{\mathbf{R}}$  учитывает перемешивание мод за счет рассеяния на потенциалах (7б). Операторы  $\hat{\mathbf{U}}$  и  $\hat{\mathbf{R}}$  определены своими матричными элементами:  $\langle z; n | \hat{\mathbf{R}} | z'; m \rangle = G_n^{(V)}(z, z') U_{nm}(z')$ ,  $\langle z; n | \hat{\mathbf{U}} | z'; m \rangle = U_{nm}(z) \delta(z - z')$ . Операторы, стоящие в выражении (12) между двумя проекторами, действуют в двумерном пространстве, состоящем из точек координатной оси  $z$  и совокупности всех

модовых индексов, за исключением выделенного индекса  $n$ .

С учетом равенства (10) решение системы не связанных между собой уравнений (11) полностью определяет искомую функцию Грина бесконечно длинного волновода, содержащего конечный гофрированный сегмент. Получение этих уравнений (11) фактически эквивалентно разделению переменных в исходном двумерном уравнении Гельмгольца при условии, что решение уравнения (9) для вспомогательной функции Грина получено независимо. Это существенно облегчает стоящую перед нами задачу, поскольку для решения одномерных уравнений к настоящему времени разработано много различных достаточно плодотворных математических методов.

Выражение для потенциала (12) можно существенно упростить в двух предельных случаях – слабого и сильного перемешивания мод. Имея в виду операторный характер этого потенциала, первый из этих случаев мы определим как предел малой (по сравнению с единицей) нормы оператора  $\hat{\mathbf{R}}$ , а второй — как предел  $\|\hat{\mathbf{R}}\| \gg 1$ .

Непосредственные оценки показывают, что в подавляющей области значений параметров задачи межмодовое рассеяние, вызванное шероховатостью границ, является очень сильным. Слабым это рассеяние может быть либо в случае крайне плавных шероховатостей ( $\Xi \ll r_c/L \ll 1$ ), либо же в области больших значений  $\Xi$ , когда на шероховатом участке волновода допускается существование не более одной протяженной моды (см. формулу (20) в разделе 3). Таким образом, считая норму оператора  $\hat{\mathbf{R}}$  большой по сравнению с единицей, выражение для потенциала (12) можно преобразовать, произведя разложение фигурирующего в нем обратного оператора в ряд Тэйлора по оператору  $\hat{\mathbf{R}}^{-1}$ , обратному оператору перемешивания мод:

$$\hat{\mathcal{T}}_n = -[\hat{G}_m^{(V)}]^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}_n (\hat{\mathbf{R}}^{-1})^k \mathbf{P}_n. \quad (13)$$

Если в правой части уравнения (13) ограничиться только слагаемым с  $k=0$ , считая норму оператора  $\hat{\mathbf{R}}^{-1}$  малой по сравнению с единицей, мы приходим к равенству

$$G_{mn}(z, z') \approx \frac{1}{2} G_n^{(V)}(z, z'). \quad (14a)$$

Если же в результате «остротной» отсечки мод в волноводе останется только одна протяженная мода ( $k=1$ ), из-за отсутствия межмодового рассеяния результат для единственного остающегося протяженного пропагатора будет следующим:

$$G_{11}(z, z') \approx G_1^{(V)}(z, z'). \quad (14b)$$

Из формулы (10) следует, что при сильном перемешивании мод ( $\|\hat{\mathbf{R}}\| \gg 1$ ) справедлива оценка

$$|G_{mn}(z, z')| \sim \|\hat{\mathbf{R}}^{-1}\| |G_{mn}(z, z')| \ll |G_{mn}(z, z')|, \quad (15)$$

из которой видно, что полная функция Грина в этом случае определяется в основном своими диагональными модовыми компонентами. При этом формулы (14) и (15) показывают, что хотя межмодовое рассеяние, вызванное шероховатостью границ волновода, является очень сильным, возникающая в результате такого рассеяния своеобразная «гомогенизация» системы поперечных мод приводит к тому, что для расчета трансмиттанта в основном приближении достаточно знать только затравочные пропагаторы, которые определяются из уравнения (9). Следствием же гомогенизации мод, возникающей из-за сильного межмодового рассеяния, является появление в правой части формулы (14a) фактора  $1/2$ .

**3. Затравочная функция Грина.** В этом разделе мы произведем расчет пробного пропагатора  $G_n^{(V)}(z, z')$  с учетом того факта, что в случае одного измерения рассеяние на как угодно слабом потенциале должно производиться с учетом интерференции многократно рассеянных волн [8]. Поскольку все моды рассматриваемого нами неоднородного волновода разделились, условие открытости на его удаленных концах может быть сформулировано для каждой из мод в отдельности. В ровных участках волновода (области I и III на рис. 1) волновое число моды с заданным индексом  $n$  равно  $k_n$ , поэтому условие открытости может быть поставлено в виде системы равенств

$$\left( \frac{d}{dz} \mp i k_n \right) G_m^{(V)}(z, z') \Big|_{z \rightarrow \pm\infty} = 0. \quad (16)$$

В такой формулировке задача определения функции  $G_m^{(V)}(z, z')$  с помощью уравнения (9) принадлежит к классу граничных задач открытого типа, для которых получить точное решение в случае более одного измерения затруднительно даже при потенциалах относительно простого вида. Преимущество же решения одномерных задач состоит в том, что каждая такая задача, будучи изначально поставленная как граничная, всегда может быть сведена к задачам причинного типа, что является критичным для выполнения конфигурационного усреднения.

Перейти от граничной задачи, поставленной в форме уравнений (9) и (16), к решению соответствующих задач Коши можно, представив искомую функцию Грина в форме [9]

$$\begin{aligned}
 G_n^{(V)}(z, z') &= \\
 &= \mathcal{W}_n^{-1}(z') [\psi_+(z|n)\psi_-(z'|n)\theta(z-z') + \\
 &+ \psi_+(z'|n)\psi_-(z|n)\theta(z'-z)], \quad (17)
 \end{aligned}$$

где функции  $\psi_{\pm}(z|n)$  являются решениями двух вспомогательных задач для однородного уравнения (9), граничные условия для каждой из которых ставятся только на одном («+» или «-») соответственно индексу) конце рассматриваемого интервала;  $\mathcal{W}_n(z)$  – вронскиан этих решений [9]. Представив потенциал (7а) в виде суммы постоянной части (среднего значения) и переменного, нулевого в среднем слагаемого,  $V_n(z) = \langle V_n(z) \rangle + \Delta V_n(z)$ , уравнения для функций  $\psi_{\pm}(z|n)$  на шероховатом отрезке волновода можно привести к виду

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \tilde{k}_n^2 - \Delta V_n(z) \right] \psi_{\pm}(z|n) = 0, \quad (18)$$

где  $\tilde{k}_n^2 = k_n^2 - \langle V_n(z) \rangle$  – перенормированная модовая «энергия». Перенормировка возникает из-за отличия от нуля средней величины квадратичного по  $\xi'(z)$  слагаемого в потенциале (7а), которая при выполненном условии (2) с хорошей точностью представляется выражением

$$\langle V_n(z) \rangle \approx \left( 1 + \frac{\pi^2 n^2}{3} \right) \left( \frac{\Xi}{w_0} \right)^2. \quad (19)$$

Здесь мы ввели безразмерный параметр  $\Xi = \langle \xi'^2(z) \rangle^{1/2} \sim \sigma/r_c$ , характеризующий среднюю остроту шероховатостей. С точки зрения квантовой механики потенциал (19) можно рассматривать как прямоугольный потенциальный барьер, который совместно с модулирующим слагаемым  $\Delta V_n(z)$  представляет собой реализацию так называемого энтропийного барьера [10] в  $n$ -м «канале» волноведущей системы.

С учетом слагаемого (19) модовая энергия, даже будучи положительной в ровных участках волновода ( $k_n^2 > 0$ ), в шероховатой его части может изменить свой знак ( $\tilde{k}_n^2 < 0$ ). Это означает, что данная мода, даже если она распространяется в контактных участках волновода, в шероховатом его участке может трансформироваться в закритическую моду, не переносящую волновой энергии. Таким образом, число распространяющихся мод при переходе из гладкой в шероховатую часть волновода снижается от исходного значения  $N_{c0} = [k w_0 / \pi]$  (квадратные скобки означают целую часть заключенного в них числа) до величины

$$N_c(\Xi) = \left[ \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(k w_0)^2 - \Xi^2}{1 + \Xi^2/3}} \right], \quad (20)$$

существенно зависящей от степени остроты шероховатостей. Для каждой моды с фиксированным индексом  $n$  существует свое значение «остротного» параметра  $\Xi = \Xi_n^{(c-off)}$ , при котором данная мода «отсекается». Это значение находится из равенства  $\tilde{k}_n^2 = 0$ . При определенном критическом значении параметра  $\Xi$ , равном

$$\Xi_{cr} = \Xi_1^{(c-off)} = \sqrt{\frac{(k w_0 / \pi)^2 - 1}{1/3 + 1/\pi^2}}, \quad (21)$$

перенос энергии через шероховатый участок волновода вообще становится невозможным, так как волновод превращается в «запредельный».

Функции  $\psi_{\pm}(z|n)$  для тех мод, которые на шероховатом участке являются распространяющимися, при  $|z| \leq L/2$  мы будем искать в виде суммы модулированных экспонент  $\exp(\pm i \tilde{k}_n z)$ , а в гладких контактах – в виде такой суперпозиции «бегущих» гармоник  $\exp(\pm i k_n z)$ , которая удовлетворяет условиям (16):

$$\begin{aligned}
 \psi_+^{(I)}(z|n) &= e^{i k_n(z+L/2)} + r_+^{(n)} e^{-i k_n(z+L/2)}, \\
 \psi_+^{(II)}(z|n) &= \pi_+(z/n) e^{i \tilde{k}_n z} - i \gamma_+(z/n) e^{-i \tilde{k}_n z}, \\
 \psi_+^{(III)}(z|n) &= t_+^{(n)} e^{i k_n(z-L/2)}, \\
 \psi_-^{(I)}(z|n) &= t_-^{(n)} e^{-i k_n(z+L/2)}, \\
 \psi_-^{(II)}(z|n) &= \pi_-(z/n) e^{-i \tilde{k}_n z} - i \gamma_-(z/n) e^{i \tilde{k}_n z}, \\
 \psi_-^{(III)}(z|n) &= e^{-i k_n(z-L/2)} + r_-^{(n)} e^{i k_n(z-L/2)}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Соотношение между амплитудными факторами, стоящими при экспонентах в (22), можно найти из условий «сшивки» решений в точках  $z = \pm L/2$ , считая непрерывными в этих точках сами функции  $\psi_{\pm}(z|n)$  и их  $z$ -производные.

Факторы  $\pi_{\pm}(z|n)$  и  $\gamma_{\pm}(z|n)$  в (22) могут быть относительно просто найдены, если рассеяние на флуктуирующей части потенциала является слабым. В качестве критерия слабости мы примем требование плавности этих факторов по сравнению с экспонентами, при которых они стоят. Такое условие существенно облегчает расчеты даже с учетом многократности рассеяния на потенциале  $\Delta V_n(z)$ , поскольку оно дает возможность перейти от дифференциальных уравнений второго порядка для функций  $\pi_{\pm}(z|n)$  и  $\gamma_{\pm}(z|n)$  к уравнениям первого порядка. Эти уравнения можно представить в виде

$$\pm \pi'_\pm(z/n) + i\eta(z/n)\pi_\pm(z/n) + \zeta_\pm^*(z/n)\gamma_\pm(z/n) = 0, \quad (23)$$

$$\pm \gamma'_\pm(z/n) - i\eta(z/n)\gamma_\pm(z/n) + \zeta_\pm(z/n)\pi_\pm(z/n) = 0,$$

где нами введены эффективные случайные поля следующего вида:

$$\eta(z/n) = \frac{1}{2\tilde{k}_n} \int_{z-l_n}^{z+l_n} \frac{dz'}{2l_n} \Delta V_n(z'), \quad (24a)$$

$$\zeta_\pm(z/n) = \frac{1}{2\tilde{k}_n} \int_{z-l_n}^{z+l_n} \frac{dz'}{2l_n} e^{\pm 2i\tilde{k}_n z'} \Delta V_n(z'). \quad (24б)$$

Интервал  $l_n$  в выражениях (24) может быть выбран произвольным, но обязательно удовлетворяющим паре неравенств  $\tilde{k}_n^{-1} \ll l_n \ll L_{sc}(n)$ , где  $L_{sc}(n)$  – характерный пространственный масштаб вариации факторов  $\pi_\pm(z|n)$  и  $\gamma_\pm(z|n)$ . Граничные условия к уравнениям (23) следуют из сшивки полей  $\psi_\pm(z|n)$  вместе с их производными в точках  $z = \pm L/2$ , соответственно индексу,

$$\pi_\pm(\pm L/2/n) = \frac{1}{2} \left( \frac{k_n}{\tilde{k}_n} + 1 \right) t_\pm^{(n)} e^{-i\tilde{k}_n L/2}, \quad (25a)$$

$$\gamma_\pm(\pm L/2/n) = \frac{1}{2i} \left( \frac{k_n}{\tilde{k}_n} - 1 \right) t_\pm^{(n)} e^{i\tilde{k}_n L/2}. \quad (25б)$$

Вронскиан решений (22) вычисляется непосредственно и при слабом рассеяния имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n^{(I)}(z) &= 2ik_n t_-^{(n)}, \\ \mathcal{W}_n^{(II)}(z) &= 2i\tilde{k}_n [\pi_+(z|n)\pi_-(z|n) + \\ &+ \gamma_+(z|n)\gamma_-(z|n)], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\mathcal{W}_n^{(III)}(z) = 2ik_n t_+^{(n)}.$$

Из-за отсутствия в уравнении (18) первой пространственной производной по  $z$  вронскиан не должен зависеть от координаты, из чего немедленно следует равенство  $t_+^{(n)} = t_-^{(n)} = \mathfrak{T}^{(n)}$ . Как видно из представления (22), квадрат модуля величины  $\mathfrak{T}^{(n)}$  имеет смысл коэффициента прохождения шероховатого участка волновода. В нашем рассмотрении этот коэффициент возник в ходе решения вспомогательной задачи для затравочной, а не для точной функции Грина, и поэтому мы будем именовать его далее затравочным коэффициентом прохождения для моды  $n$ .

Для него из условия постоянства вронскиана (26) следует соотношение

$$\left| \mathfrak{T}^{(n)} \right|^2 = \frac{(1 - |\Gamma_+(z|n)|^2)(1 - |\Gamma_-(z|n)|^2)}{|1 + \Gamma_+(z|n)\Gamma_-(z|n)|^2}. \quad (27)$$

Функции  $\Gamma_\pm(z/n) = \gamma_\pm(z/n)/\pi_\pm(z/n)$  представляют собой амплитудные коэффициенты отражения мод, возбуждаемых на «+»/«-» конце волновода, от интервалов  $(\pm L/2, z)$ , «заполненных» потенциалом  $\Delta V_n(z)$ . Эти функции находятся из уравнений Риккати

$$\begin{aligned} \pm \Gamma'_\pm(z/n) &= 2i\eta(z/n)\Gamma_\pm(z/n) + \\ &+ \zeta_\pm^*(z/n)\Gamma_\pm^2(z/n) - \zeta_\pm(z/n) \end{aligned} \quad (28)$$

и граничных условий

$$\Gamma_\pm(\pm L/2/n) = -i\mathcal{R}_n e^{i\tilde{k}_n L}, \quad (29)$$

где  $\mathcal{R}_n$  – амплитудный коэффициент отражения «квантовой частицы» от потенциальной ступеньки высотой  $\langle V_n(z) \rangle$ :  $\mathcal{R}_n = (k_n - \tilde{k}_n)/(k_n + \tilde{k}_n)$ .

Пробная функция Грина, если выразить ее через функции  $\pi_\pm(z|n)$  и  $\gamma_\pm(z|n)$ , позволяет произвести конфигурационное усреднение любого ее статистического момента при помощи некоторой специальной вычислительной процедуры, детали которой читатель может найти, например, в работе [4]. В результате усреднения статистические моменты функции Грина выражаются через бинарные корреляторы полей  $\eta(z/n)$  и  $\zeta_\pm(z/n)$ :

$$\langle \eta(z/n)\eta(z'/n) \rangle = \frac{1}{L_f^{(eff)}(n)} F_{l_n}(z - z'), \quad (30a)$$

$$\langle \zeta_\pm(z/n)\zeta_\pm^*(z'/n) \rangle = \frac{1}{L_b^{(eff)}(n)} F_{l_n}(z - z'), \quad (30б)$$

$$F_{l_n}(z) = \frac{1}{2l_n} \left( 1 - \frac{|z|}{2l_n} \right) \theta(1 - |z|/2l_n). \quad (30в)$$

Средние от остальных бинарных произведений случайных полей с асимптотической точностью равны нулю. Фигурирующие в (30) величины  $L_{f,b}^{(eff)}(n)$  представляют собой длины экстинкции  $n$ -й моды, обусловленные рассеянием «вперед» ( $f$ ) и «назад» ( $b$ ). Они связаны с фурье-образом корреляционной функции шероховатостей  $\tilde{W}(q)$  формулами

$$\frac{1}{L_f^{(eff)}(n)} = 4 \frac{\pi^4 n^4 \sigma^2}{w_0^6 \tilde{k}_n^2} \tilde{W}(0) + \frac{1}{2\tilde{k}_n^2} \left( 1 + \frac{\pi^2 n^2}{3} \right)^2 \left( \frac{\sigma}{w_0} \right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} q^4 \tilde{W}^2(q), \quad (31a)$$

$$\frac{1}{L_b^{(eff)}(n)} = 4 \frac{\pi^4 n^4 \sigma^2}{w_0^6 \tilde{k}_n^2} \tilde{W}(2\tilde{k}_n) + \frac{1}{2\tilde{k}_n^2} \left( 1 + \frac{\pi^2 n^2}{3} \right)^2 \left( \frac{\sigma}{w_0} \right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} (q^2 - \tilde{k}_n^2)^2 \tilde{W}(q + \tilde{k}_n) \tilde{W}(q - \tilde{k}_n). \quad (31б)$$

**4. Прохождение волн через шероховатый участок волновода.** Транспортные свойства неупорядоченного отрезка волновода мы будем характеризовать его полным трансмиттансом, который является аналогом безразмерного кондактанса для квантовых систем:

$$T(L) = \sum_{m,n} |t_{mn}(L)|^2. \quad (32)$$

Здесь  $t_{mn}(L)$  – амплитудные коэффициенты прохождения из моды  $n$  на входе в моду  $m$  на выходе из отрезка. В работе [11] показано, что коэффициенты прохождения выражаются через функции Грина с помощью формулы

$$t_{mn}(L) = 2i\sqrt{k_m k_n} G_{mn}(L/2, -L/2). \quad (33)$$

Пренебрегая в условиях сильного модового перемешивания межмодовыми компонентами функции Грина, а также учитывая своеобразное поведение этой функции при переходе от многомодового к одномодовому состоянию волновода (см. формулы (14)), выражение для трансмиттанса (34) мы можем представить в виде

$$T(L) = 4 \sum_n' k_n^2 |G_{nn}(L/2, -L/2)|^2 = \frac{1}{4} \sum_n' |\mathfrak{T}^{(n)}|^2. \quad (34)$$

Штрих у знаков суммы в этой формуле символизирует тот факт, что в случае  $N_c(\Xi) = 1$  коэффициент прохождения должен удваиваться, а трансмиттанс, соответственно, – учетверяться.

Усреднение полного трансмиттанса сводится к усреднению затравочных коэффициентов прохождения каждой из протяженных мод. Учитывая тот факт, что правая часть равенства (27) не зависит от переменной  $z$ , при усреднении мы можем выбрать значение этой переменной на правом конце интервала  $L$ , воспользовавшись при этом граничными условиями (29):

$$\begin{aligned} \left\langle |\mathfrak{T}^{(n)}|^2 \right\rangle &= (1 - \mathcal{R}_n^2) \sum_{l,m=0}^{\infty} i^{l-m} \mathcal{R}_n^l \mathcal{R}_n^{*m} \times \\ &\times \exp \left[ i(l-m)\tilde{k}_n L - 2(l-m)^2 \frac{L}{L_f^{(eff)}(n)} \right] \times \\ &\times \left\langle \left[ 1 - |\tilde{\Gamma}_-(L/2/n)|^2 \right] \tilde{\Gamma}_-(L/2/n) \tilde{\Gamma}_-^{*1}(L/2/n) \right\rangle, \\ \tilde{\Gamma}_{\pm}(z/n) &= \Gamma_{\pm}(z/n) \exp \left[ \pm 2i \int_z^{L/2} \eta(z_1 | n) dz_1 \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

*Баллистический режим волнового транспорта.* Баллистическим мы будем называть режим, соответствующий неравенству  $L_f^{(eff)}(n) \gg L$ , которое позволяет пренебречь вторым слагаемым в показателе экспоненты формулы (35). В этом режиме функция  $\tilde{\Gamma}_-(z/n)$  изменяется на протяжении интервала  $L$  незначительно, и поэтому значе-

ние этой функции в точке  $z = L/2$ , фигурирующее в (35), можно приближенно заменить ее «начальным» значением  $\tilde{\Gamma}_-(-L/2/n) = -i\mathcal{R}_n \exp(i\tilde{k}_n L)$ . Вычисляя затем двойную сумму по  $l$  и  $m$ , получаем результат, совпадающий по форме с результатом, полученным в работе [7] для периодически гофрированного волновода:

$$\left\langle |\mathfrak{T}^{(n)}|^2 \right\rangle_{ball} = \left| 1 - \mathcal{R}_n^2 \exp(2i\tilde{k}_n L) \right|^{-2} (1 - \mathcal{R}_n^2)^2. \quad (36)$$

В квантовой задаче такой результат соответствует прохождению частицей прямоугольного потенциального барьера высоты  $\langle V_n(z) \rangle$  и ширины  $L$ .

*В поисках диффузионного режима.* Далее мы рассмотрим режим, соответствующий условию  $L_f^{(eff)}(n) \ll L$ . С точки зрения кинетической теории для этого режима применимо название «диффузионный». Однако, как будет показано далее, характерная для диффузионного транспорта степенная зависимость коэффициента прохождения от размеров системы в этом пределе отсутствует, и поэтому термин диффузионный к такому режиму применим довольно условно. Более подходящим для него, на наш взгляд, является название «некогерентный» ( $n$ -с) режим, поскольку из-за рассеяния фаза волны на длине сегмента  $L$  не сохраняется. В этом предельном случае можно пренебречь вкладом слагаемых с  $m \neq n$  в формуле (35) и привести ее к виду

$$\begin{aligned} \left\langle |\mathfrak{T}^{(n)}|^2 \right\rangle_{n-c} &= (1 - \mathcal{R}_n^2) \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{R}_n^{2l} \times \\ &\times \left\langle \left[ \tilde{\Gamma}_-(L/2/n) \right]^{2l} \left[ 1 - |\tilde{\Gamma}_-(L/2/n)|^2 \right]^l \right\rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

Усредняя выражение (37) с помощью методики, описанной в работе [4], приходим к результату:

$$\begin{aligned} \left\langle |\mathfrak{T}^{(n)}|^2 \right\rangle_{n-c} &= \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda \operatorname{th} \pi\lambda}{\operatorname{ch} \pi\lambda} \left[ P_{-1/2+i\lambda} \left( \frac{1 + \mathcal{R}_n^2}{1 - \mathcal{R}_n^2} \right) \right] \times \\ &\times \exp \left[ - \left( \frac{1}{4} + \lambda^2 \right) \frac{L}{L_b^{(eff)}(n)} \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

В случае  $\tilde{k}_n r_c \gg 1$  длина рассеяния «назад», а значит, и длина локализации  $n$ -й моды существенно превосходит длину рассеяния «вперед», которая теперь играет роль модовой длины дефазировки. В этом случае вполне допустимым является выполнение неравенств  $L_f^{(eff)}(n) \ll L \ll L_b^{(eff)}(n)$ , при которых из (38) следует приближенное выражение



$$\left\langle |\mathfrak{T}^{(n)}|^2 \right\rangle_{n-c} = \frac{1 - \mathcal{R}_n^2}{1 + \mathcal{R}_n^2}. \quad (39)$$

Оно отличается от формулы (36) отсутствием осциллирующего множителя, описывающего интерференцию волн, отраженных от концов шероховатого сегмента, но в то же время не содержит явной зависимости от  $L$ . Результат (39) означает, что хотя  $n$ -я мода не является уже в полной мере баллистической, она все еще может не быть андерсоновски локализованной. И только если наряду с неравенством  $L_b^{(eff)}(n) \ll L$  выполняется и неравенство  $L_b^{(eff)}(n) \ll L$ , интеграл (38) демонстрирует экспоненциальное уменьшение трансмиттанса с длиной шероховатого участка волновода, что характерно для транспорта через локализованные по Андерсону состояния:

$$\left\langle |\mathfrak{T}^{(n)}|^2 \right\rangle_{n-c} = 2\sqrt{\pi}(1 - \mathcal{R}_n^2)K^2(\mathcal{R}_n) \left[ \frac{L_b^{(eff)}(n)}{L} \right]^{3/2} \times \exp\left[ -\frac{L}{4L_b^{(eff)}(n)} \right] \equiv \left\langle |\mathfrak{T}^{(n)}|^2 \right\rangle_{loc}. \quad (40)$$

**5. Численный анализ и обсуждение результатов.** Предельные формулы (36), (39) и (40), хоть и дают общее качественное представление о поведении полного коэффициента прохождения через случайно-шероховатый волновод, тем не менее, не создают достаточно наглядного представления о его зависимости от степени остроты шероховатостей. Для получения более детальной информации в этом разделе мы проведем численный анализ формулы (35), не ограничиваясь рассмотренными выше предельными случаями.

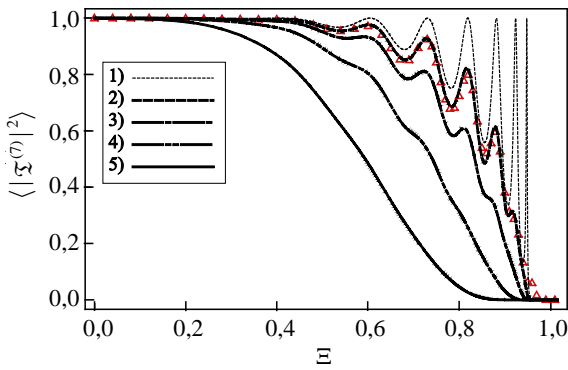


Рис. 2. Зависимость затравочного трансмиттанса от остроты шероховатостей для прямого (кривая 1) и модулированного барьера  $V_n(z)$  при  $L/r_c = 3\,000$  (кривая 2),  $1\,000$  (кривая 3),  $300$  (кривая 4),  $80$  (кривая 5);  $L = 2w_0$ ,  $N_{c0} = 8$

На рис. 2 приведены графики среднего затравочного трансмиттанса для отдельной протяженной волноводной моды ( $n = 7$ ), построенные по формуле (35). На верхнем графике (кри-

вая 1) показана зависимость, следующая из асимптотической формулы (36). Эта формула получена в пределе  $L/L_{f,b}^{(eff)}(n) \rightarrow 0$ , что предполагает полную когерентность и отсутствие андерсоновской локализации в пределах шероховатого участка. Для реальных волноводов, однако, такая зависимость является идеализированной, поскольку при ее получении мы пренебрегли флуктуационной частью потенциала в уравнении (9) и удержали лишь его среднее значение. Осцилляции на кривой 1 демонстрируют резонансный характер такого прохождения через состояния, которые образуются за счет интерференции волн при их многократном отражении от границ шероховатого участка за счет спектрального несоответствия шероховатой и ровной частей волновода (резонансы Фабри-Перо).

Учет случайной модуляции потенциального барьера функцией  $\Delta V_n(z)$  из уравнения (18) вызывает пространственное затухание вышеуказанных резонансных состояний (андерсоновская локализация). При этом длины рассеяния существенно зависят от корреляционных свойств функции, задающей профиль шероховатостей (см. формулы (31)). При  $\Xi > \sqrt{\sigma/w_0}$  для этих длин справедлива оценочная формула

$$L_{f,b}^{(eff)}(n) \sim \frac{\tilde{k}_n^2}{r_c} \left( \frac{w_0}{\pi n} \right)^4 \frac{1}{\Xi^4}, \quad (41)$$

из которой видно, что при стремлении параметра  $\Xi$  к точке отсечки  $\Xi_n^{(c-off)}$  слева длина локализации уменьшается (формально — стремится к нулю) и становится меньше длины шероховатого сегмента. Резонансные осцилляции трансмиттанса при этом уменьшаются по амплитуде (кривые 2–5 на рис. 2) и сходят на нет с ростом длины  $r_c$  при каждом фиксированном значении параметра  $\Xi$ . При этом, несмотря на существенные флуктуации потенциала  $V_n(z)$ , трансмиттанс в пределе  $r_c \rightarrow 0$  оказывается таким же, как и в случае прямоугольного потенциала, равного  $\langle V_n(z) \rangle$ .

При достижении точки отсечки  $\Xi = \Xi_7^{(c-off)}$  представленная на рис. 2 мода трансформируется из распространяющейся в моду *evanescent*-типа. Такие моды локализованы на характерном масштабе порядка продольной длины волны ( $L_{loc} \sim \tilde{k}_n^{-1}$ ). Механизм этой локализации существенно отличается от механизма локализации Андерсона. Отсечка волноводных мод, т. е. их трансформация из мод с протяженной структурой в моды *evanescent*-типа — явление, не связанное с беспорядком и имеющее чисто гео-



метрическую природу. Локализация такого типа имеет место не только в неупорядоченных волноводных системах, но и в системах вполне регулярных, в частности, в волноводах с периодически гофрированными стенками, детальный анализ которых выполнен в работе [7].

На рис. 3 показана зависимость от параметра  $\Xi$  полного трансмиттанса (34). Верхняя кривая соответствует идеализированному случаю  $r_c \rightarrow 0$ , когда все протяженные моды подвергаются действию только усредненных потенциалов и заведомо являются баллистическими. Ее огибающая ведет себя ступенчатым образом, отражая тем самым эффект «остротной» отсечки мод, описываемый формулой (20).

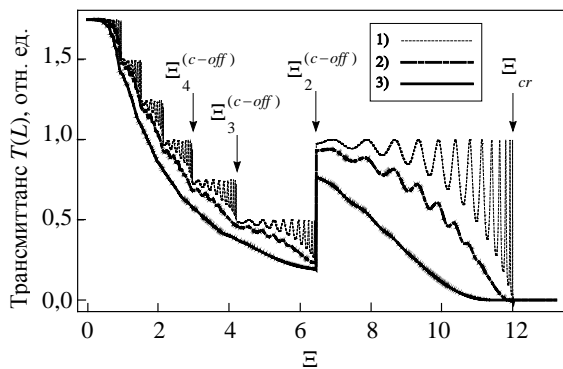


Рис. 3. Зависимость полного трансмиттанса от остроты шероховатостей. Кривая 1 соответствует прямоугольному барьеру, остальные учитывают случайную модуляцию потенциала:  $L/r_c = 3\ 000$  (кривая 2),  $1\ 000$  (кривая 3);  $L = 2w_0$ ,  $N_{c0} = 8$

Однако если в идеальных волноводах с ровными боковыми стенками скачки трансмиттанса, связанные с отсечкой мод за счет изменения поперечных размеров волновода или частоты источника излучения, строго равны единице, в нашем случае они оказываются ровно в 4 раза меньше, за исключением последней неотсеченной моды с индексом  $n = 1$ . Перед переходом волновода в одномодовый режим трансмиттанс демонстрирует своеобразный провал, заметно увеличиваясь в одномодовом режиме по сравнению с двумодовым и даже трехмодовым трансмиттансом. Такое поведение трансмиттанса является одним из проявлений принципиального различия многомодовых и одномодовых неупорядоченных волноводов, которое состоит в критической важности учета в последних интерференции волн при их многократном рассеянии.

#### Библиографический список

1. *Nguyen B. P.* Anomalously suppressed localization in the two-channel Anderson model / B. P. Nguyen, K. Kim // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 2012. – 24, N 13. – 135303 (6 p.).

2. *Cavity Quantum Electrodynamics with Anderson-Localized Modes* / L. Sapienza, H. Thyrestrup, S. Stobbe et al. // *Science.* – 2010. – 327, N 5971. – P. 1352–1355.
3. *Propagation around a Bend in a Multichannel Electron Waveguide* / G. Timp, H. U. Baranger, P. de Vegvar et al. // *Phys. Rev. Lett.* – 1988. – 60, N 20. – P. 2081–2084.
4. *Makarov N. M.* Electron localization in narrow surface-corrugated conducting channels: Manifestation of competing scattering mechanisms / N. M. Makarov, Yu. V. Tarasov // *Phys. Rev. B.* – 2001. – 64, N 23. – 235306 (14 p.).
5. *Makarov N. M.* Conductance of a single-mode electron waveguide with statistically identical rough boundaries / N. M. Makarov, Yu. V. Tarasov // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 1998. – 10, N 7. – P. 1523–1538.
6. *Tarasov Yu. V.* Elastic scattering as a cause of quantum dephasing: the conductance of two-dimensional imperfect conductors / Yu. V. Tarasov // *Waves Random Media.* – 2000. – 10, N 4. – P. 395–415.
7. *Goryashko V. O.* The sharpness-induced mode stopping and spectrum rarefaction in waveguides with periodically corrugated walls / V. O. Goryashko, Yu. V. Tarasov, L. D. Shostenko // *Waves in Random and Complex Media.* – 2013. – 23, N 2. – P. 89–113.
8. *Лифшиц И. М.* Введение в теорию неупорядоченных систем / И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур. – М.: Наука, 1982. – 360 с.
9. *Courant R.* *Methods of Mathematical Physics: in 2 vol.* Vol. 1 / R. Courant, D. Hilbert. – N. Y.: Interscience Publ., Inc., 1953. – 560 с.
10. *Zwanzig R.* Diffusion past an entropy barrier / R. Zwanzig // *J. Phys. Chem.* – 1992. – 96, N 10 – P. 3926–3930.
11. *Douglas Stone S.* What is measured when you measure a resistance?—The Landauer formula revisited / S. Douglas Stone, A. Szafer // *IBM J. Res. Develop.* – 1988. – 32, N 3. – P. 384–413.

Рукопись поступила 17.09.2014.

Yu. V. Tarasov, L. D. Shostenko

### WAVE PROPAGATION THROUGH A WAVEGUIDE SEGMENT WITH RANDOMLY CORRUGATED WALLS: DUAL NATURE OF THE LOCALIZATION

A theory of wave propagation in waveguides incorporating a finite-length segment with randomly corrugated side boundaries is developed. We have shown that the dominant role in the waveguide state formation is played by the so-called gradient scattering mechanism, which is associated with surface asperity sharpness but not with their amplitude. The corrugated portion of the waveguide may be regarded as the modulated potential barrier, whose width is coincident with the length of the corrugated region whereas the height is determined by the corrugation sharpness. There are two possible types of wave localization in such a system. The first one manifests itself through the sharpness-induced mode cut-off which leads to rarefaction of the entire (combined) waveguide spectrum, so that at some critical level of the asperity sharpness the waveguide becomes the evanescent-mode one. The other type of localization is a localization of Anderson nature. It is associated with multiple scattering of waves by random fluctuations of the effective potential. We have predicted a jump of the full transmittance of the waveguide at its transition to single-mode regime due to the mode cut-off. This phenomenon is associated with the absence of the inter-mode scattering in the single-mode regime.

**Key words:** multimode waveguide, randomly rough boundaries, gradient scattering, wave localization

Ю. В. Тарасов, Л. Д. Шостенко

ПРОХОДЖЕННЯ ХВИЛЬ  
ЧЕРЕЗ ВІДРІЗОК ХВИЛЕВОДУ  
З ВИПАДКОВО-ШОРСТКИМИ СТІНКАМИ:  
ДВОЇСТА ПРИРОДА ЛОКАЛІЗАЦІЇ

Побудовано теорію поширення хвиль у хвилеводних системах, бічні межі яких на скінченній ділянці є випадково-шорсткими. Показано, що головну роль у формуванні хвилеводних станів відіграє градієнтний механізм поверхневого розсіяння хвиль, у якому визначальною є гострота нерівностей стінок, а не їх амплітуда. Шорстка ділянка хвилеводу відіграє роль ефективного модульованого потенційного бар'єру, ширина якого співпадає з довжиною

ділянки, а висота залежить від середньої гостроти нерівностей бічних меж. У такій системі є два можливі типи локалізації хвиль. Один з них проявляється у послідовному «відсіченні» хвилеводних мод в міру загострення шорсткостей, що призводить до проріджування спектру хвилеводу та його переходу в «поза межний» режим при достатньо великій гостроті шорсткостей. Інший механізм – це традиційна андерсонівська локалізація, пов'язана з багатократним розсіянням хвилеводних мод на випадкових флуктуаціях ефективного потенціалу. Передбачено різке (до 100 %) зростання хвильового кондактансу під час переходу хвилеводу в ефективно одномодовий режим внаслідок градієнтного перенормування мод, яке пов'язане зі зникненням у цьому випадку каналу міжмодового розсіяння.

**Ключові слова:** багатомодовий хвилевід, випадково-шорсткі межі, градієнтне розсіяння, локалізація хвиль.