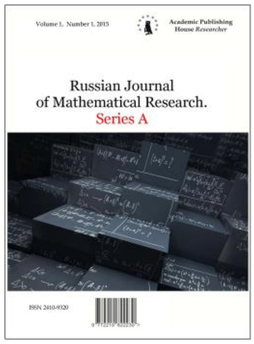
Copyright © 2019 by Academic Publishing House Researcher s.r.o.

Published in the Slovak Republic
Russian Journal of Mathematical Research. Series A
Has been issued since 2015.
E-ISSN: 2413-7529
2019, 5(1): 16-25

DOI: 10.13187/rjmr.a.2019.1.16
www.ejournal30.com



On Solutions of Differential Inclusions with Almost Convex Right-Hand Side

Rafik A. Khachatryan [a, *]

[a] Yerevan State University, Armenia

Abstract

In the paper the question of the existence of a differential inclusion $\dot{x}(t) \in a(x)$ under the initial condition $x(t_0) = x_0$ is considered. It is assumed that a multivalued mapping a continuous and the sets $a(x)$ are almost convex.
Keywords: Set-valued mapping, almost convex, differential inclusion.

1. Введение

Дифференциальным включением называется соотношение вида

$$\frac{dx}{dt} \in a(x). \tag{1}$$

Рассмотрим вопрос существования решения дифференциального включения с начальным условием $x(t_0) = x_0$. В зависимости от свойств многозначного отображения (непрерывность в том или ином смысле) решения диффереціального включения (1) обладает различными дифференциальными свойствами.

Пусть вектор функция $x(t)$ определена на интервале или отрезке $J(t_0 \in J)$ и $x(t_0) = x_0$. Она называется классическим решением, если всюду на J имеет непрерывную производную и удовлетворяет включению (1).

Вектор функция $x(t)$ называется решением Каратеодори дифференциального включения (1) на интервале J, если она на интервале J абсолютно непрерывна и почти всюду удовлетворяет включению (1).

Решение включения (1) с выпуклозначной правой частью при предположении полунепрерывности сверху многозначного отображения впервые было рассмотрено Зарембой в своей статье (Zaremba, 1934). Паратингентной производной $Dx(t_0)$ функции $x(t)$ в точке t_0 называется совокупность всех пределов:

$$\lim_{\substack{t_k \to t_0 \\ x_k \to x_0}} \frac{x(t_k) - x(s_n)}{t_k - s_n}, \quad s_n \neq t_k.$$

* Corresponding author
E-mail addresses: khachatryan.rafik@gmail.com (R.A. Khachatryan)

Заремба определял решение как непрерывную функцию, паратингентная производная $Dx(t)$ которой всюду удовлетворяет включению:

$$Dx(t) \subseteq a(x(t)) \qquad (2)$$

Верна следующая теорема.

Теорема 1 (Zaremba, 1934)**,** Пусть многозначное отображение $a: R^n \to 2^{R^n}$ с выпуклыми замкнутыми значениями полунепрерывно сверху и существует число $C > 0$ такое, что $\|y\| < C \ \forall y \in a(x)$, $x \in R^n$.

Тогда существует липшицева функция $x(t)$ с начальным условием $x(0) = x_0$, паратингентная производная $Dx(t)$, которой всюду удовлетворяет включению:

$$Dx(t) \subseteq a(x(t)), \quad t \in [0,1].$$

Дифференциальное включение с обобщенными производными (контингентными производными) было рассмотрено Вазевским (Wazewski, 1961).

Доказано, что если для любого x множество $a(x)$ – выпуклый компакт и отображение а непрерывно, то включение (2) равносильно включению в контингентциях и дифференциальному включению (1).

Для дифференциальных включений с невыпуклой правой частью первая теорема существования классического локального решения была доказана Филипповым, при условии, что правая часть удовлетворяет условию Липшица (Филипов, 1967). Затем им же была доказана теорема существования решения Каратеодори с непрерывной правой частью (Филипов, 1971). А в статье (Филипов, 1977) построен пример дифференциального включения вида (1), где многозначное отображение а с невыпуклыми значениями непрерывно, не удовлетворяет условию Липшица и включение (1) не имеет классическое решение. В настоящее время имеются достаточно содержательных и подробных монографии и статей целиком или в значительной степени излагающих проблемы существования решений (классические или в смысле Каратеодори) дифференциальных включений. К числу таких работ можно отнести: Ж.П. Обен (Aubin, Celina, 1984), А.А.Толстоногое (Толстоногов, 1986), Е.С. Половинкин (Полованский, 2015), А.Д. Иоффе (Ioffe, 2017), В.И. Благодатстких (Благодаских, Филипов, 1985), В.Д. Гельман (Барисович и др., 2005).

Однако, в литературе достаточно мало работы посвящены дифференциальными включениями с обобщенными производными.

В настоящей статье рассматривается вопрос существования липшицевой функций $x(t)$, $t \in [0,1]$ с начальным условием $x(0) = x_0$, паратингентная производная которой удовлетворяет всюду включению (2). Предполагается, что множества $a(x)$ являются почти выпуклыми, а отображение а непрерывно. Оказывается, что в этом случае дифференциальное включение (1) не равносильно включению (2) и оно вообще говоря не имеет классическое решение. Доказывается существование липшицевой функции, удовлетворяющей включению (2) всюду.

Понятие почти выпуклости было введено в работах (Остапенко, 1982; Остапенко, 1983). Потребность изучения таких множеств возникла в теории диффернциальных играх (Остапенко, 1982).

2. Методы исследования

В статье применены методы выпуклого и негладкого анализа. Ключевую роль здесь играет теорема Арцела о компактности.

В дальнейшем $B_\gamma(a)$ - замкнутый шар с центром а радиуса; $M \subseteq R^n$ замкнутое множество: $diam(M)$ диаметр множества М; $conv\{M\}$ - выпуклая оболочка множества М.

Определение 1 (Остапенко, 1982). Множество $M \subseteq R^n$ удовлетворяет условию почти выпуклости с константой $B \geq 0$, если для любых

$x_j \in M$, $\lambda_j \geq 0$, $j \in J$,

где J - конечное множество индексов, таких, что $\sum_{j\in J}\lambda_j = 1$, выполняется

$\sum_{j\in J}\lambda_j x_j \in M + \theta r^2 B_1(0)$.

где $r \equiv \max_{i,j\in J}\|x_i - x_j\|$.

Заметим, что если $\theta = 0$, то M -выпуклое множество. Класс почти выпуклых множеств достаточно широк.

Пример 1. Множество $M = \{a, b\}$ состоящих из двух точек почти выпукло. Действительно, имеем

$$conv\{a,b\} \subseteq M + \frac{1}{2\|a-b\|}\|a-b\|^2 B_1(0) ,$$

т.е. в этом случае константа почти выпуклости θ можно выбрать $1/(2\|a-b\|)$ (см. Рисунок 1).

Пример 2. Дуга на окружности является почти выпуклым множеством. Это непосредственно следует из достаточного условия почти выпуклости, доказанный в (Остапенко, 1983) (см. теорема 2). Найдем константа почти выпуклости. Предположим, что дуга M меньше полуокружности и множество $Q = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ находится на этой дуге.

Пусть $A = x_1$, $B = x_k$, $d = diam(Q) = AB$. Тогда множество $conv\{Q\}$ находится на a -окрестности множества M, где a = CD (см. Рисунок 1).

Имеем

$$DC = R - \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}.$$

Теперь число θ выберем из неравенства:

$$DC \leq \theta d^2 ,$$

т.е.

$$\frac{1}{R + \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}} \leq \theta .$$

Очевидно, что этому неравенств удовлетворяет числа $\theta \geq 1/2R$. Если дуга больше полуокружности, то она почти выпукла по теореме 3 (Остапенко, 1983) с некоторой константой θ. Тогда, как видно из рисунка 1, если $Q = \{a, b\}$, то множество $conv\{Q\}$ находится в β – окрестности дуги, где $\beta = \|a-b\|/2$.

Таким образом

$$\theta \geq \frac{1}{2\|a-b\|}.$$

Значит, если $\|a-b\| \to 0$, то $\theta \to \infty$.

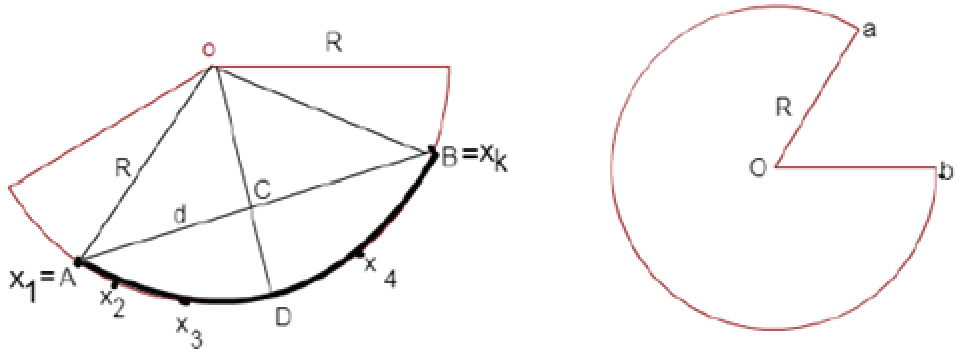


Рис. 1. Множество $conv\{Q\}$ находится на a -окрестности множества M, где a = CD

Пример 3. Окружность M с радиусом R является почти выпуклым множествим с константой $\theta \ge 1/(\sqrt{3}\,R)$. Действительно, пусть множество $Q \equiv \{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset M$ (см. Рисунок 1). Рассмотрим две случаи. Если $0 \notin conv\{Q\}$. Это означает, что множество находится в некоторой полуокружности. Тогда из примера 2 следует включение:

$$conv\{Q\} \subseteq M + \frac{1}{2R}(diam(Q))^2 B_1(0). \qquad (3)$$

Если $0 \in \operatorname{int} Q$. Тогда в $convQ$ существует некоторый остроугольный треугольник, содержащий внути себя центр окружности o. Значит, окружность описана этому треугольнику. Следовательно, длина некоторой стороны треугольника больше или равно $R\sqrt{3}$. Отсюда

$$diam(Q) \ge \sqrt{3}R.$$

Очевидно, что множество Q находится в R-окрестности множества M .

Теперь выберем число θ из условия

$$R \le \theta(diam(Q))^2 \qquad (4)$$

Это неравество имеет место, если $\theta \ge 1/(\sqrt{3}R)$. Если точка O находится на границе множества $conv\{Q\}$, то $diam(Q) = 2R$. Тогда неравенство (4) выполняется, если $\theta \ge 1/2R$. В общем случае, имея ввиду и включение (3), имеем

$$conv\{Q\} \subseteq M + \frac{1}{\sqrt{3}R}(diam(Q))^2 B_1(0).$$

Отсюда M – почти выпуклое множество с константой $1/(\sqrt{3}R)$.

В дальнейшем мы используем следующее свойство почти выпуклых множеств.

Предложение 1 (Остапенко, 1983). Теорема 3, Следствие 3). Если M почти выпуклое множество с константой θ, то для любого $\varepsilon < 1/(16\theta)$ множество $M + B_\varepsilon(0)$ почти выпукло с константой 4θ.

Напомным теперь определения многозначного отображения. Пусть 2^{R^n} совокупность всех непустых подмножеств из R^n.

Отображение $a: R^n \to 2^{R^n}$ называется полунепрерывным снизу в $x_0 \in R^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$a(x_0) \subseteq a(x) + B_\varepsilon(0) \;\; \forall x \in B_\delta(x_0).$$

Отображение $a: R^n \to 2^{R^n}$ называется полунепрерывным сверху в $x_0 \in R^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$a(x) \subseteq a(x_0) + B_\varepsilon(0)\ \forall x \in B_\delta(x_0).$$

Если отображение a полунепрерывно снизу и сверху в x_0, то оно называется непрерывным в этой точке (см. Барисович и др., 2005), Определение 1.2.43, с. 38: определение непрерывности в смысле Хаусдорфа).

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть

1) многозначное отображение $a: R^n \to 2^{R^n}$ с компактными значениями непрерывно;

2) существует число $\theta \ge 0$ такая, что для любого $x \in R^n$ множество $a(x)$ почти выпукло с констатой θ;

3) существует константа C > 0 такая, что для любого $y \in a(x)$

$$\|y\| \le C(1 + \|x\|)\quad \forall x \in R^n.$$

Тогда существует липшицевая функция $x(t)$, паратингентная производная $Dx(t)$ которой **всюду** удовлетворяет включению

$$Dx(t) \subseteq a(x(t)),\ t \in [0,1].$$

с начальным условием $x(0) = x_0$.

Доказательство. Доказательство аналогично теореме Зарембы. Отметим ключевые моменты доказательства. Разобьем отрезок $[0,1]$ на 2^m (m-натуральное число) частей и положим $\delta = 2^{-m}$. Запишем вместо соотношения (1) разностное включение

$$x_\delta(t+\delta) \in x_\delta(t) + \delta a(x_\delta(t)), \qquad (5)$$

$$t = 0, \delta, 2\delta, \ldots, (2^m - 1)\delta.$$

Решение $x_\delta(t)$ разностного включения (3) построим шаг за шагом. Положим $x_\delta(0) = x_0$. В первом шаге в качестве $x_\delta(\delta)$ выберем произвольный элемент множества $x_\delta(0) + \delta a(x_\delta(0))$. Во втором шаге в качестве $x_\delta(2\delta)$ выберем такой элемент множества $x_\delta(\delta) + \delta a(x_\delta(\delta))$, что

$$\left\| \frac{x_\delta(\delta) - x_\delta(0)}{\delta} - \frac{x_\delta(2\delta) - x_\delta(\delta)}{\delta} \right\| = \min_{u \in x_\delta(\delta) + \delta a(x_\delta(\delta))} \left\| \frac{x_\delta(\delta) - x_\delta(0)}{\delta} - \frac{u - x_\delta(\delta)}{\delta} \right\| \qquad (6)$$

Аналогично, построим точки $x_\delta(3\delta), \ldots, x_\delta(1)$.

Доопределим $x_\delta(t)$ для всех [0,1], построив линейную интерполяцию:

$$x_\delta(t) = x_\delta(k\delta) + (t - k\delta) \cdot \frac{x_\delta((k+1)\delta) - x_\delta(k\delta)}{\delta},\quad t \in [k\delta, (k+1)\delta],$$

$$k = 0, 1, \ldots, (2^m - 1).$$

Из разностного включения (5) следует, что

$$\|x_\delta(t+\delta)\| \le (1 + \delta C)\|x_\delta(t)\| + \delta C$$

Отсюда получим

$$\|x_\delta(t)\| \le e^{Ct}(1 + \|x_0\|) - 1 \le e^C(1 + \|x_0\|) - 1 \equiv \nu.$$

Значит, для любого $y \in a(x_\delta(t))$

$$\|y\| \le C(1 + \|x_\delta(t)\|) \le C(1 + v) \equiv L$$

Поэтому

$$\|x_\delta(t+\delta)-x_\delta(t)\| \le \delta L, \; t=0,\delta... \tag{7}$$

Отсюда

$$\|x_\delta(t_1)-x_\delta(t_2)\| \le L|t_1-t_2|, \; \forall t_1,t_2 \in [0,1].$$

Поэтому в силу теоремы Арцела из последовательности $\{x_\delta(t)\}$ функций можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности можно предполагать, что сама последовательность $x_\delta(.)$ сходится к некоторой функции $x_0(.)$, причем

$$\gamma(\delta)=\max_{0\le t\le 1}\|x_\delta(t)-x_0(t)\| \to 0.$$

Покажем, что предельная функция $x_0(t)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L. В самом деле,

$$\|x_0(t_1)-x_0(t_2)\| \le \|x_0(t_1)-x_\delta(t_1)\| +$$
$$+\|x_\delta(t_1)-x_\delta(t_2)\| + \|x_\delta(t_2)-x_0(t_2)\| \le$$
$$\le \gamma(\delta)+L|t_1-t_2|+\gamma(\delta).$$

Устремляя δ к нулю, получим требуемый результат.

Так как

$$\|x_\delta(t)-x_0(t_0)\| \le \|x_\delta(t)-x_\delta(t_0)\| +$$
$$+\|x_\delta(t_0)-x_0(t_0)\| \le L|t-t_0|+\gamma(\delta),$$

то в силу полунепрерывности сверху отображения a спаведливо включение

$$a(x_\delta(t)) \subseteq a(x_0(t_0))+\varepsilon B_1(0)$$

как только разность $|t-t_0|$ и δ достаточно малы. Предположим, что это включение выполняется, если выполнены следующие условия $|t-t_0|<\gamma$, $\delta<\delta_0$.

Покажем, что паратингентная производная $Dx(t)$ удовлетворяет включению (2) всюду на отрезке [0,1]. Пусть $t_0 \in (0,1)$ и t_1,t_2-фиксированные точки, имеющие вид $t_1=k_1\delta_1$, $t_2=k_2\delta_1$, $\delta_1<\delta$, причем

$$|t_1-t_0|<\gamma, \; |t_2-t_0|<\gamma.$$

Так как $\delta=2^{-m}$, то при $\delta<\delta_1$ точки t_1,t_2 будут входить в разбиение отрезка [0,1].

Имеем

$$\frac{x_\delta(t_2)-x_\delta(t_1)}{t_2-t_1}=\sum_{t_1,t_1+\delta,\dots,t_2-\delta}\frac{\delta}{t_2-t_1}\cdot\frac{x_\delta(t+\delta)-x_\delta(t)}{\delta}.$$

Для достаточно малых δ имеем

$$y_t \equiv \frac{x_\delta(t+\delta)-x_\delta(t)}{\delta} \in a(x_0(t_0))+\varepsilon B_1(0), \; \forall t=t_1,t_1+\delta,\dots,t_2-\delta.$$

Так как множество $a(x_0(t_0))$ почти выпукло с константой θ, то по предложению 1 при $\varepsilon<1/(16\theta)$ множество $a(x_0(t_0))+\varepsilon B_1(0)$ почти выпукло с константой 4θ. Поэтому согласно определению 1 почти выпуклости имеем

$$\frac{x_\delta(t_2)-x_\delta(t_1)}{t_2-t_1} \in a(x_0(t_0))+\varepsilon B_1(0)+4\theta\max_{t,p}\|y_t-y_p\|^2 B_1(0) \tag{8}$$

Так как отображение a непрерывно по Хаусдорфу, то оно равномерно непрерывно на компактном множестве $B_\nu(0)$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\Delta > 0$ такое, что если $x', x'' \in B_\nu(0)$, то

$$\|x' - x''\| < \Delta \Rightarrow a(x') \subseteq a(x'') + B_\varepsilon(0).$$

Отсюда, если положим $x' = x_\delta(t+\delta)$, $x'' = x_\delta(t)$, то из неравенства (7) следует, что при $\delta < \Delta/L$

$$\|x_\delta(t+\delta) - x_\delta(t)\| < \Delta$$

и поэтому из соотношения (6) получим

$$\|y_{t+\delta} - y_t\| \le \varepsilon,\ t = t_1, t_1+\delta, \ldots, t_2 - \delta.$$

Отсюда для произвольных $t, p = t_1, t_1+\delta, \ldots, t_2 - \delta$ справедливо неравенство

$$\|y_t - y_p\| \le \varepsilon |t_1 - t_2|.$$

Поэтому, если $2\nu < \varepsilon$, то

$$\|y_t - y_p\|^2 \le (t_2 - t_1)^2 \varepsilon^2 < \varepsilon^4 \qquad (9)$$

Имеем

$$\frac{x_0(t_2) - x_0(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x_0(t_2) - x_0(t_1)}{t_2 - t_1} + \frac{x_\delta(t_2) - x_\delta(t_1)}{t_2 - t_1} +$$

$$+ \frac{x_\delta(t_2) - x_0(t_1)}{t_2 - t_1}. \qquad (10)$$

Выберем теперь число δ настолько малым, что первое и третье слагаемое в (10) были по модулю меньше ε. Теперь имея ввиду соотношения (8)-(10), получим

$$\frac{x_0(t_2) - x_0(t_1)}{t_2 - t_1} \in a(x_0(t_0)) + 3\varepsilon B_1(0) + 4\theta\varepsilon^4 B_1(0).$$

Отсюда, поскольку ε произвольно, получим

$$Dx_0(t_0) \subseteq a(x_0(t_0)).$$

Аналогично рассматриваются случаи, когда $t_0 = 0$ или $t_0 = 1$.

3. Обсуждение результатов

Итак основным результатом статьи является следующая теорема, в которой доказывается существования решения дифференциального включения с паратингентной производной в случае, когда правая часть $a(x)$ дифференциального включения (1) принимает почти выпуклые значения, а многозначное отображение $a: R^n \to 2^{R^n}$ непрерывно по Хаусдорфу.

Замечание 1. Если ослабить условие непрерывности отображения a, то утверждение теоремы 2 становится неверным. Действительно, пусть

$$x \in R^1,\ a(0) = \{-1, 1\},\ a(x) = -signx.$$

Тогда отображение а полунепрерывно сверху, множества $a(x)$ **почти выпуклы** (пример 1), но решение с начальным условием $x(0) = 0$ не существует при $t > 0$ (см. пример Благодаских, Филипов, 1985: 243).

Замечание 2. Отметим, что в условиях теоремы 2 включение 2 в паратингенциях **не равносильно** дифференциальному включению (1).

Действительно, пусть $a(x) = \{-1, 1\} \cup \{2\}$, $\forall x \in R^1$. Отображение a непрерывно, а для каждого x множество $a(x)$ почти выпукло с константой $\theta = 1/2$. Рассмотрим дифференциальное включение (1) с начальным условием $x(0) = 0$ на отрезке [0,3]. Липшицева функция

$$x(t) = \begin{cases} t & если \quad t \in [0,1], \\ 2 - t & если \quad t \in [1,2], \\ 2t - 4 & если \quad t \in [2,3] \end{cases}$$

на отрезке [0,3] удовлетворяет дифференциальному включению $\frac{d}{dx} x(t) \in a(x)$ почти всюду.

Однако включение (2) не выполняется всюду, поскольку например $1.5 \in Dx(2)$, и поэтому $Dx(2) \subseteq a(x(2))$.

Решение включения (2) в паратингентциях будет например функция

$$y(t) = \begin{cases} t & если\ t \in [0,1] \\ 2 - t & если\ t \in [1,3] \end{cases}$$

Действительно имеем

$$Dy(t) = \begin{cases} 1 & если \quad t \in [0,1), \\ -1 & если \quad t \in (1,3], \\ [-1,1] & если \quad t = 1 \end{cases}$$

поэтому всюду на отрезке [0,3] им:еет место включение

$Dy(t) \subseteq a(y(t)),\ y(0) = 0$,

Замечание 3. В примере 3 (см. Филипов, 1977: 1076) многозначное отображение $a : R^2 \to 2^{R^2}$ непрерывно, для каждого x множество $a(x)$ либо дуга на окружности либо окружность, (т.е. множества $a(x)$ почти выпуклы согласно примеру 2), и показано, что дифференциальное включение вида (1) с начальным условием $x(0) = 0$ не имеет классическое решение. Таким образом существует пример дифференциального включения вида (1), где отображение a непрерывно, значения $a(x)$ почти выпуклы, но включение (1) не имеет классическое решение.

4. Заключение

Результаты статьи могут быть применены в теории дифференциалных играх и в задачах оптимального управления.

Литература

Барисович и др., 2005 – *Барисович Ю.Г., Гелкьман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введеные в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Ком. Книга, М., 2005, 215 с.

Благодаских, Филипов, 1985 – *Благодаских В.А., Филипов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальные управления. *Тр. МИАН СССР*. 1985. 169: 194-252.

Остапенко, 1982 – *Остапенко В.В.* Приближенное решение задач сближения – уклонения. Препринт-82-16. Институт Кибернетики АН УССР, Киев, 1982, 27 с.

Остапенко, 1983 – *Остапенко В.В.* Об одном условии почти выпуклости. *Украинский мат. журнал*. 1983. 35(2): 169-172.

Полованский, 2015 – *Полованский Е.С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. Физматлит., М., 2015, 524 с.

Понтрягин, 1980 – *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования. *Мат. сб. Новая сер*. 1980. 112(3): 307-330.

Толстоногов, 1986 – *Толстоногов А.А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Наука, Новосибирск, 1986, 296 с.

Филипов, 1967 – *Филипов А.Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика.* 1967. 3: 16-26.

Филипов, 1971 – *Филипов А.Ф.* О существовании решений многозначных дифференциальных уравнений. *Мат. Заметки.* 1971. 10-19: 307-319.

Филипов, 1977 – *Филипов А.Ф.* Об условиях существования решений многозначных дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения.* 1977. 13(6): 1070-1078.

Aubin, Celina, 1984 – *Aubin J.P. Celina A.* Differential inclussions, N.Y., Berlin, Spinger-Ver1, 1984, 342 p.

Devi, 1972 – *Devi J.I.* Properties of the solitions set a generaliset differencial equation. *Bull Austral, Math. Soc.* 1972. 6(3): 379-398.

Ioffe, 2017 – *Ioffe A.D.* Variational Analysis of Regular Mappinds, Theory and Applications. Springer Monographs of Mathematics, 2017, 476 p.

Wazewski, 1961 – *Wazewski T.* Sur une conditions equivalente a I' equation an condicent. *Bull Acad. Polpm. Sct Math., Austronom Phys.* 1961. 9(12): 865-867.

Zaremba, 1934 – *Zaremba S.K.* Sur une extention de la notion d'equation differential. S.R. Acad. Sct. Paris. 1934. 199(10): 545-548.

References

Aubin, Celina, 1984 – *Aubin J.P. Celina A.* (1984). Differential inclussions, N.Y., Berlin, Spinger-Ver1. 342 p.

Barisovich i dr., 2005 – *Barisovich Yu.G., Gelk'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V.* (2005). Vvedenye v teoriyu mnogoznachnykh otobrazhenii i differentsial'nykh vklyuchenii [Introduced into the theory of multivalued mappings and differential inclusions]. Kom. Kniga, M. 15 p. [in Russian]

Blagodaskikh, Filipov, 1985 – *Blagodaskikh V.A., Filipov A.F.* (1985). Differentsial'nye vklyucheniya i optimal'nye upravleniya [Differential inclusions and optimal controls]. Tr. MIAN SSSR. 169: 194-252. [in Russian]

Devi, 1972 – *Devi J.I.* (1972). Properties of the solitions set a generaliset differencial equation. *Bull Austral, Math. Soc.* 6(3): 379-398.

Filipov, 1967 – *Filipov A.F.* (1967). Klassicheskie resheniya differentsial'nykh uravnenii s mnogoznachnoi pravoi chast'yu [Classical solutions of differential equations with a multi-valued right-hand side]. *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Matematika, mekhanika.* 3: 16-26. [in Russian]

Filipov, 1971 – *Filipov A.F.* (1971). O sushchestvovanii reshenii mnogoznachnykh differentsial'nykh uravnenii [On the existence of solutions of multivalued differential equations]. *Mat. Zametki.* 10-19: 307-319. [in Russian]

Filipov, 1977 – *Filipov A.F.* (1977). Ob usloviyakh sushchestvovaniya reshenii mnogoznachnykh differentsial'nykh uravnenii [On the conditions for the existence of solutions of multivalued differential equations]. *Differentsial'nye uravneniya.* 13(6): 1070-1078. [in Russian]

Ioffe, 2017 – *Ioffe A.D.* (2017). Variational Analysis of Regular Mappinds, Theory and Applications. Springer Monographs of Mathematics. 476 p.

Ostapenko, 1982 – *Ostapenko V.V.* (1982). Priblizhennoe reshenie zadach sblizheniya – ukloneniya [An approximate solution to the problems of approximation – evasion]. Preprint-82-16. Institut Kibernetiki AN USSR, Kiev, 27 p. [in Russian]

Ostapenko, 1983 – *Ostapenko V.V.* (1983). Ob odnom uslovii pochti vypuklosti [On one condition of almost convexity]. *Ukrainskii mat. zhurnal.* 35(2): 169-172. [in Russian]

Polovanskii, 2015 – *Polovanskii E.S.* (2015). Mnogoznachnyi analiz i differentsial'nye vklyucheniya [Multivalued analysis and differential inclusions]. Fizmatlit., M. 524 p. [in Russian]

Pontryagin, 1980 – *Pontryagin L.S.* (1980). Lineinye differentsial'nye igry presledovaniya [Linear differential pursuit games]. *Mat. sb. Novaya ser.* 112(3): 307-330. [in Russian]

Tolstonogov, 1986 – *Tolstonogov A.A.* (1986). Differentsial'nye vklyucheniya v banakhovom prostranstve [Differential inclusions in a Banach space]. Nauka, Novosibirsk. 296 p. [in Russian]

Wazewski, 1961 – *Wazewski T.* (1961). Sur une conditions equivalente a I' equation an condicent. *Bull Acad. Polpm. Sct Math., Austronom Phys.* 9(12): 865-867.

Zaremba, 1934 – *Zaremba S.K.* (1934). Sur une extention de la notion d'equation differential. S.R. Acad. Sct. Paris. 199(10): 545-548.

О решениях дифференциальных включений с почти выпуклой правой частью

Рафик Агасиевич Хачатрян [a], *

[a] Ереванский государственный университет, Армения

Аннотация. В статье рассматривается вопрос существования решения включения вида $Dx(t) \subseteq a(x(t))$ при начальном условии $x(t_0) = x_0$, где $Dx(t)$ – паратингентная производная функции $x(t)$. Предполагается, что многозначное отображение a непрерывно, а множества $a(x)$ почти выпуклы.

Ключевые слова: Многозначное отображение, почти выпуклость, дифференциальное включение.

* Корреспондирующий автор
Адреса электронной почты: khachatryan.rafik@gmail.com (Р.А. Хачатрян)