


GI/M/3/K kuyruk sisteminin Yarı-Markov süreciyle analizi Analysis of the GI/M/3/K queueing system by Semi-Markov process

Hanifi Okan İŞGÜDER^{1*} 

¹İstatistik Bölümü, Fen Fakültesi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir, Türkiye.
okan.isguder@deu.edu.tr

Geliş Tarihi/Received: 24.01.2019, Kabul Tarihi/Accepted: 02.09.2019
* Yazışılan yazar/Corresponding author

doi: 10.5505/pajes.2019.36974
Araştırma Makalesi/Research Article

Öz

Bu çalışmada tekrarlı girişli, K-kapasiteli ve üç heterojen kanallı bir kuyruk sistemi incelenmiştir. Ele alınan sistemde gelişlerarası süreler birbirlerinden bağımsız olup rastgele bir dağılıma sahiptir. Her bir kanalın hizmet süresi μ_k parametrelili üstel dağılıma sahiptir. Sisteme gelen müşteri boş olan kanallardan indeks numarası en düşük olan kanalda hizmet almaya başlar. Geliş anında bütün kanallar doluysa, gelen müşteri kuyruğa katılır. Sistem kapasitesi tamamen dolduğu zaman, gelen müşteri hiçbir hizmet almadan sistemden ayrılır. Ele alınan sistem yarı-Markov süreci ile modellenmiş ve yarı-Markov sürecinin sunulan Markov zinciri elde edilmiştir. Durağan durum olasılıkları ve müşterinin kaybolma olasılığı hesaplanmıştır. Ayrıca geliş sürecine ve hizmet disiplinine göre en iyileme yapılarak kaybolma olasılığı enküçüklenmiştir. Elde edilen teorik sonuçlar, gelişlerarası sürelerin dağılımı sırasıyla üstel, Erlang ve deterministik seçilerek sayısal olarak gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Yarı-Markov süreci, Gömülü Markov zinciri, Kayıp olasılığı, Heterojen kanallar, Kuyruk sistemleri

Abstract

In this study, a queueing system of K-capacity with recurrent entry and three heterogeneous servers has been investigated. In the system discussed, inter-arrival times are independent of one another and have an arbitrary distribution. The service time of each server has an Exponential distribution with parameter μ_k . The customer who enters the system starts to receive service on the server with the lowest index number from the servers that are empty. If all servers are busy on arrival, the incoming customer joins the queue. When the system is at full capacity, the incoming customer leaves the system without receiving any service. The system under consideration was modeled using a semi-Markov process and the embedded Markov chain provided by the semi-Markov process was obtained. Steady-state probabilities and the probability of customer loss were calculated. Additionally, by performing optimization with respect to service discipline and arrival process, the loss probability is minimized. The obtained theoretical results are shown numerically for cases where the inter-arrival times followed Exponential, Erlang, and deterministic distributions.

Keywords: Semi-Markov process, Embedded Markov chain, Loss probability, Heterogeneous servers, Queueing systems

1 Giriş

Danimarkalı bilim adamı A. K. Erlang [1] tarafından 1909 yılında temeli oluşturulan stokastik servis sistemleri bugün bilimin ve teknolojinin vazgeçilmez bir unsuru olmuştur. Palm [2], Kendall [3], Gumbel [4], Takacs [5], Yao [6] gibi birçok değerli bilim adamının çalışmaları sayesinde ortaya önemli sonuçlar ve çeşitli uygulama alanları konularak teori zenginleştirilmiştir. Zaman içinde stokastik servis sistemleri teknolojinin hemen her bölgesine girmiş bir bilim haline gelmiştir. Özellikle günümüzde stokastik servis sistemleri telekomünikasyon, lojistik, stokastik envanter sistemleri ve montaj dengeleme hatları gibi mühendislik alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. İlk yıllarda stokastik servis sistemlerindeki esas problem kuyruk modellerinin temel karakteristiklerinin belirlenmesi ve performans ölçülerinin hesaplanması olmuştur. Daha sonraki yıllarda bu alandaki çalışmalar, zaman ve iş kaybının en aza indirilmesi, kesintisiz çalışma süresinin belirlenmesi, kaybolan müşteri olasılığının hesaplanması ve en küçüklenmesi gibi üstün hizmet seviyesine ulaşmayı hedefleyen göstergelerin çözümlenmesi biçiminde gelişme göstermiştir.

Heterojen kanallı kuyruk modelleri ilk defa Gumbel [4] tarafından 1960 yılında incelenmiştir. Gumbel [4] M/M/s kuyruk modelinde ortalama hizmet sürelerinin birbirinden farklı olabileceğini varsaymış ve sistemi bu varsayım altında çözümlenmiştir. Gumbel [4] çalışmasında hizmet disiplinini rastgele olarak belirlemiştir. Yani, sisteme gelen müşteri boş

olan kanallardan herhangi birinde eşit olasılıkla hizmete başlar. İlk gelen ilk hizmet alır ve sistem kapasitesi sınırsızdır.

Kuyruk sistemleri; gelişlerin dağılımına, hizmet süresinin dağılımına ve kuyruk disiplininin ne şekilde işlediğine bağlı olarak modellenir ve çözümlenir. Bu bileşenlerden herhangi biri üzerinde yapılacak olan küçük bir değişiklik bile modeli ve çözüm yöntemini tamamen değiştirebilir. Özellikle gelişler ve hizmet süresinin dağılımı modelin Markov özelliğine sahip olan ya da olmayan bir model olup olmasını belirler. Bu durum uygulanacak olan çözüm yöntemini etkiler. Hizmet disiplini üzerinde yapılacak olan değişiklikler genellikle çözüm yönteminde bir değişikliğe neden olmaz fakat sistemin modellenmesini zorlaştırabilir ve dolayısıyla çözüm yönteminin modele uygulanmasını güçleştirir. Öyle ki bazı zamanlarda varsayımları ortaya konulan kuyruk sistemi matematiksel olarak modellenebilse bile, bu modelin analitik olarak çözümünü yapmak ve sistemin performans ölçülerini hesaplamak mümkün olmayabilir.

Heterojen kanallı kuyruk sistemleri literatürde oldukça geniş bir yere sahiptir. Lin ve Elsayed [8] heterojen kanallı, sınırlı kapasiteli Markovian bir kuyruk sisteminde durağan durum olasılıklarını hesaplamak ve sistemin performansını ölçmek için bir bilgisayar programı geliştirmiştir. Fakinos [9] bekleme yerinin olmadığı heterojen kanallı M/G/k kuyruk sistemini incelemiş ve Erlang-B formülünü genelleştirmiştir. Nawijn [10] geliş sürecinin deterministik, hizmet süresinin üstel dağıldığı ve bekleme yerinin sınırlı olduğu iki heterojen kanallı kuyruk sistemini inceleyerek müşterinin kaybolma olasılığı elde

etmiştir. Alpaslan ve Shahbazov [11] gelen müşterinin boş olan kanallardan herhangi birine eşit olasılıkla girdiği heterojen kanallı $M/M/n$ kuyruk sisteminde kuyrukta ortalama bekleme süresinin EW_q , $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n$ koşulu altında, en küçük değeri aldığını ispatlamıştır. Kumar ve arkadaşları [12] heterojen kanallı $M/M/2$ kuyruk sistemini, belirli anlarda γ hızıyla Poisson dağılımına uyan felaketler ortaya çıkabileceği varsayımı altında çözümlenmiştir. Alves ve arkadaşları [13] heterojen kanallı $M/M/c$ kuyruk sisteminde, kuyrukta ortalama bekleme süresinin EW_q ve kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısının EL_q üst sınırını elde etmiştir. Choudhury ve Deka [14] iki heterojen fazlı $M/G/1$ kuyruk sisteminde kesintisiz çalışma süresinin ve bekleme süresinin dağılım fonksiyonunun Laplace-Stieltjes dönüşümünü elde etmiştir. Alpaslan [15] heterojen kanallı $GI/M/2/0$ kuyruk sisteminde kaybolma anları arasında geçen sürenin dağılım fonksiyonunu elde etmiştir.

Heterojen kanallı kuyruk sistemlerinin modellenmesinde hizmet disiplini özel bir öneme sahiptir. Kanalların ortalama çalışma hızları birbirinden farklı olduğu için, sisteme gelen müşterinin boş olan kanallardan hangisinde hizmete başlaması gerektiğine karar vermek gerekmektedir. Sisteme gelen müşterinin, boş olan kanallardan indeks numarası en küçük olana atanması literatürde oldukça ilgi görmüş ve Cooper [16], Matsui ve Fukuta [17], Nath ve Enns [18], Nawijn [10, 19], Pourbabai ve Sonderman [19], Yao [6, 21], Sağlam and Shahbazov [22], ve İşgüder ve Celikoglu [23] gibi birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır.

Bu çalışmada Gumbel'in [4] ortaya koymuş olduğu sistemde gelişler arası sürelerin dağılımı üzerindeki varsayım genelleştirilmiştir. Buna ek olarak hizmet disiplini ve sistem kapasitesi varsayımları üzerinde şu şekilde bir değişikliğe gidilmiştir: Sisteme gelen müşteri boş olan kanallardan indeks numarası en küçük olan kanalda hizmete başlar. İlk gelen ilk hizmet alır ve sistem kapasitesi K ile sınırlıdır. Geliş süreci üzerinde yapılan böylece bir genelleştirme sistemi Markovian olmayan bir hale dönüştürür ki; kanalların da heterojen olduğu düşünüldüğünde sistemin çözümlenmesi bir hayli zorlaştıracaktır. Hizmet disiplininin değiştirilmesi de modellemeyi oldukça zorlaştıracaktır. Bu nedenle kanal sayısı 3 ile sınırlandırılarak bu çalışmada heterojen kanallı $GI/M/3/K$ kuyruk sistemi modellenmiş ve çözümlenmiştir. Bu çalışmanın katkıları aşağıdaki gibidir:

- Yarı-Markov sürecinin çekirdek olasılıkları bulunmuş, bu olasılıkların Laplace-Stieltjes dönüşümü elde edilmiş ve bir adım geçiş olasılıkları hesaplanmıştır,
- Bir adım geçiş olasılıkları yardımıyla durağan durum olasılıkları elde edilmiş ve kaybolma olasılığı hesaplanmıştır,
- Durağan durum olasılıkları ve kaybolma olasılığı, bazı özel determinantların bir fonksiyonu olarak ifade edilebildiğinden hesaplamalarda kolaylık sağlamaktadır,
- Geliş sürecine göre en iyileme yapılarak, gelişler arası süre dağılımı deterministik olduğunda kaybolma olasılığının en küçük değere ulaştığı teorik gösterilmiş ve bu durum sayısal bir çalışma üzerinde uygulanmıştır,
- Hizmet disiplinine göre en iyileme yapılmış ve en hızlı servis kuralı uygulandığında kaybolma olasılığının en küçük değeri aldığı sayısal olarak gösterilmiştir.

Makalenin sonraki bölümleri şu şekilde düzenlenmiştir: Takip eden bölümde modelin tanımı ve varsayımları verilecektir. Sistemin temsil eden yarı-Markov sürecinin tanımı, sisteminin modellenmesi ve elde edilen modelin çözümlenerek durağan durum olasılıklarının, kaybolma olasılığının elde edilmesi üçüncü bölümde verilecektir. Dördüncü bölümde ise, elde edilen sonuçlar heterojen kanallı $GI/M/3/5$ kuyruk sistemi üzerinde uygulanacak ve kaybolma olasılığını geliş sürecine ve hizmet disiplinine göre en iyilenecektir. Ayrıca sayısal bir çalışma üzerinde elde edilen gelişler arası sürelerin farklı dağılımları için elde edilen sonuçlar karşılaştırılacaktır. Son olarak beşinci bölümde sonraki araştırmalar için önerilerden söz edilecektir.

2 $GI/M/3/K$ kuyruk modelinin varsayımları

$t_0 < t_1 < \dots$ olmak üzere t_0, t_1, \dots müşterilerin geliş anları olsun. Varsayalım ki gelişler arası süreler birbirlerinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenler olup $F(t)$ dağılım fonksiyonuna sahip olsun. $F(t)$ 'nin beklenen değeri mevcut olsun ($\alpha = \int_0^\infty [1 - F(t)]dt$). Buna ek olarak varsayalım ki her bir kanalın hizmet süresi μ_k ($k = 1, 2, 3$) parametrelili üstel dağılıma sahip olsun.

Sisteme gelen müşteri boş olan kanallardan indeks numarası en düşük olan kanala 1'e eşit olasılıkla girer ve ilk gelen ilk hizmet alır. Geliş anında bütün kanallar meşgul ise, sisteme gelen müşteri kuyruğa katılır. Sistem kapasitesi K ile sınırlıdır. Bu nedenle sistem kapasitesi tamamen dolduğu zaman, sisteme gelen müşteri hiçbir hizmet almadan sistemden ayrılır. Bu tür müşterilere kaybolan müşteriler denir. Bu tür sistemlerde kaybolan müşterilerin analizinin yapılması ve müşterinin kaybolma olasılığının hesaplanması önemli bir problemdir. Gelişler, hizmet sürecinden bağımsızdır.

2.1 Sistemi temsil eden yarı-Markov süreci

$X(t)$, t -anında sistemde bulunan müşteri sayısı ve $X_n = X(t_n - 0), n \geq 1$ olsun. Burada X_n , n -nci geliş anından hemen önce sistemde bulunan müşteri sayısıdır. İlgilenilen sistemde gelişlerarası sürelerin dağılım fonksiyonu genel ve hizmet sürelerinin dağılım fonksiyonu üstel olduğundan model yarı-Markov süreci ile analiz edilebilir. Sistemi temsil eden yarı-Markov süreci aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\xi(t) = X_n, \quad t_n \leq t < t_{n+1}, \quad n \geq 1 \quad (1)$$

$\{\xi(t), t \geq 0\}$ sürecinin çekirdek fonksiyonları her $x \geq 0$ ve $0 \leq i, j \leq K$ için aşağıdaki gibidir:

$$Q_{ij}(x) = P\{X_{n+1} = j, t_{n+1} - t_n \leq x | X_n = i\} \quad (2)$$

$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ olmak üzere her bir i, j durumu için, (2) eşitliği ile verilen çekirdek fonksiyonlar $GI/M/3/K$ kuyruk modelinin varsayımları dikkate alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$Q_{00}(x) = \int_0^x (1 - e^{-\mu_1 t}) dF(t) \quad (3)$$

$$Q_{01}(x) = \int_0^x e^{-\mu_1 t} dF(t) \quad (4)$$

$$Q_{10}(x) = \frac{1}{3} \int_0^x [2(1 - e^{-\mu_1 t})(1 - e^{-\mu_2 t}) + (1 - e^{-\mu_1 t})(1 - e^{-\mu_2 t})] dF(t)$$
$$Q_{11}(x) = \frac{1}{3} \int_0^x \{ [2e^{-\mu_1 t}(1 - e^{-\mu_2 t}) + e^{-\mu_2 t}(1 - e^{-\mu_1 t})] \} \quad (5)$$

$$+e^{-\mu_1 t}(1 - e^{-\mu_3 t}) + e^{-\mu_3 t}(1 - e^{-\mu_1 t})\}dF(t) \quad (6)$$

$$Q_{12}(x) = \frac{1}{3} \int_0^x [2(1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}) + (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_3)t})]dF(t) \quad (7)$$

$$Q_{20}(x) = \int_0^x (1 - e^{-\mu_1 t})(1 - e^{-\mu_2 t})(1 - e^{-\mu_3 t})dF(t), \quad (8)$$

$$Q_{21}(x) = \int_0^x [e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}(1 - e^{-\mu_3 t}) + e^{-(\mu_1 + \mu_3)t}(1 - e^{-\mu_2 t}) + e^{-(\mu_2 + \mu_3)t}(1 - e^{-\mu_1 t})]dF(t) \quad (9)$$

$$Q_{22}(x) = \int_0^x [e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}(1 - e^{-\mu_3 t}) + e^{-(\mu_1 + \mu_3)t}(1 - e^{-\mu_2 t}) + e^{-(\mu_2 + \mu_3)t}(1 - e^{-\mu_1 t})]dF(t) \quad (10)$$

$$i + 1 \geq j \geq 3 \text{ ve } i \geq 3 \text{ için} \quad (11)$$

$$Q_{23}(x) = \int_0^x e^{-\mu t} dF(t)$$

$$Q_{ij}(x) = \int_0^x \frac{(\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-\mu t} dF(t) \quad (12)$$

$$i + 1 > 3 \text{ için} \quad (13)$$

$$Q_{i0}(x) = \int_0^x \int_0^t \frac{\mu^{i-2}}{(i-3)!} y^{i-3} e^{-\mu y} (1 - e^{-\mu_1(t-y)}) (1 - e^{-\mu_2(t-y)}) (1 - e^{-\mu_3(t-y)}) dy dF(t)$$

ve

$$Q_{i1}(x) = \int_0^x \int_0^t \frac{\mu^{i-2}}{(i-3)!} y^{i-3} e^{-\mu y} [e^{-\mu_1(t-y)}(1 - e^{-\mu_2(t-y)})(1 - e^{-\mu_3(t-y)}) + e^{-\mu_2(t-y)}(1 - e^{-\mu_1(t-y)})(1 - e^{-\mu_3(t-y)}) + e^{-\mu_3(t-y)}(1 - e^{-\mu_1(t-y)})(1 - e^{-\mu_2(t-y)})] dy dF(t) \quad (14)$$

ve

$$Q_{i2}(x) = \int_0^x \int_0^t \frac{\mu^{i-2}}{(i-3)!} y^{i-3} e^{-\mu y} [e^{-\mu_1(t-y)}e^{-\mu_2(t-y)}(1 - e^{-\mu_3(t-y)}) + e^{-\mu_1(t-y)}e^{-\mu_3(t-y)}(1 - e^{-\mu_2(t-y)}) + e^{-\mu_2(t-y)}e^{-\mu_3(t-y)}(1 - e^{-\mu_1(t-y)})] dy dF(t) \quad (15)$$

$$Q_{ij}(x) = 0, j \geq i + 1 \quad (16)$$

ve sistemde K müşteri bulunduğunda, sisteme giriş mümkün olmayacağı için her j için $Q_{K,j} = Q_{K-1,j}$ olur. $q_{ij}(s)$, $Q_{ij}(x)$ 'in Laplace-Stieltjes transformu olsun, öyle ki:

$$q_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dQ_{ij}(x), 0 \leq i, j \leq K, (Re\{s\} \geq 0) \quad (17)$$

ve

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x), Re\{s\} \geq 0 \quad (18)$$

Böylece $q(s) = [q_{ij}(s)]_0^K$ matris formunda aşağıdaki gibi elde edilir:

$$q(s) = \begin{bmatrix} q_{00}(s) & q_{01}(s) & 0 & \dots & 0 \\ q_{10}(s) & q_{11}(s) & q_{12}(s) & \dots & 0 \\ q_{20}(s) & q_{21}(s) & q_{22}(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{K-1,0}(s) & q_{K-1,1}(s) & q_{K-1,2}(s) & \dots & q_{K-1,K}(s) \\ q_{K-1,0}(s) & q_{K-1,1}(s) & q_{K-1,2}(s) & \dots & q_{K-1,K}(s) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$q(s)$ alt Hessenberg matristir ve yarı-Markov sürecinin sunulan Markov zinciridir. $p_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$ bir adım geçiş olasılıkları ve onun matris formu $P = [p_{ij}]_0^K$ olsun. Buradan p_{ij} her bir i, j için $p_{ij} = q_{ij}(0)$ eşitliğinden kolaylıkla elde edilir.

2.2 Durağan durum olasılıkları ve kaybolma olasılığı

Heterojen kanallı ve bekleme yerinin olmadığı $GI/M/n/n$ kuyruk sisteminde kaybolan müşterilerin analizi Isguder and Kocer [25] tarafından yapılmıştır. Durağan durum olasılıkları ve kaybolma olasılığı bir adım geçiş olasılıklarının fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Isguder and Kocer'in [25] çalışmasındaki sonuçlara dayanarak $GI/M/3/K$ kuyruk sistemi için durağan durum olasılıkları ve kaybolma olasılığı sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$P_n = \frac{D_{nn}(0)}{D(1, 1, \dots, 1)} \quad n = 1, 2, \dots, K \quad (20)$$

$$P_{loss} = \frac{p_{01}p_{12} \dots p_{K-1,K}}{D(1, 1, \dots, 1)} \quad (21)$$

Burada $D_{nn}(0)$, $[I - q(0)]$ matrisinin (n, n) -nci kofaktörüdür ve

$$D(1, 1, \dots, 1) = \begin{vmatrix} 1 & -p_{01} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 - p_{11} & -p_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -p_{K-1,1} & -p_{K-1,2} & \dots & -p_{K-1,K} \\ 1 & -p_{K-1,1} & -p_{K-1,2} & \dots & 1 - p_{K-1,K} \end{vmatrix} \quad (22)$$

3 Heterojen kanallı $GI/M/3/5$ Kuyruk Modeli

Bu bölümde ikinci bölümde modellenen kuyruk sistemi, sistem kapasitesi $K = 5$ alınarak analitik olarak ve sayısal olarak incelenmiştir. Bu amaçla öncelikle heterojen kanallı $GI/M/3/5$ kuyruk sistemi için $[q_{ij}(s)]_0^5$ matrisinin elemanları, (3-16) çekirdek fonksiyonlarının Laplace-Stieltjes dönüşümü alınarak bulunur. $q_{ij}(s)$, $0 \leq i, j \leq 5$ eşitlikleri Ek A'da verilmiştir (bkz. (A2-A18)).

(21) formülü yardımıyla heterojen kanallı $GI/M/3/5$ kuyruk sistemi için müşterinin kaybolma olasılığı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$P_K = \frac{p_{01}p_{12}p_{23}p_{34}p_{45}}{D(1, 1, 1, 1, 1)} \quad (23)$$

Burada,

$$D(1, 1, 1, 1, 1) = (1 - p_{44} - p_{45})\{(1 - p_{11} + p_{01})[(1 - p_{22})(1 - p_{23}) - p_{23}p_{32}] - p_{12}(1 - p_{33})(p_{21} - p_{01}) - p_{12}p_{23}(p_{31} - p_{01})\} - p_{43}[p_{34}(1 - p_{22})(1 - p_{11} + p_{01}) - p_{12}p_{34}(p_{21} - p_{01})] - p_{23}p_{34}[p_{42}(1 - p_{11} + p_{01}) + p_{12}(p_{41} - p_{01})] \quad (24)$$

(23) ve (24) eşitliklerinde yer alan bir adım geçiş olasılıkları (p_{ij} , $0 \leq i, j \leq 5$), Ek A'da verilen (A2-A18) eşitlikleri ve $p_{ij} = q_{ij}(0)$ eşitliği kullanılarak kolaylıkla elde edilebilir.

Gelişler arası süreler üstel dağılıma sahip olduğunda ve her bir kanalın ortalama hizmet süresi birbirine eşit olduğunda ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$), $GI/M/3/5$ kuyruk sistemi için elde edilen ve (23)

eşitliği ile verilen kaybolma olasılığı $M/M/3/5$ kuyruk sistemini sağlar.

H_α ortalaması aynı ve α olan gelişlerarası süre dağılımı F 'in bir sınıfı olsun ve $P_K(F)$ ise gelişlerarası süre dağılımı $F \in H_\alpha$ olacak şekilde $GI/M/3/5$ kuyruk modeli için kaybolma olasılığı olsun. Varsayalım ki $D(t)$ deterministik dağılımın, dağılım fonksiyonunu gösterebilir. Bu durumda $t \leq \alpha$ için $D(t) = 0$ olur ve $t > \alpha$ için $D(t) = 1$ olur. Buradan açık olarak görülür ki $D \in H_\alpha$ olur ve $D(t)$ 'nin Laplace-Stieltjes dönüşümü $e^{-\alpha s}$ 'dir.

Teorem 1. $F = D$ için kaybolma olasılığı $P_K(F), F \in H_\alpha$ en küçüktür.

Bu teorem Jensen eşitsizliğinden (bkz. [26], s.300) elde edilen $f(s) \geq e^{-\alpha s}$ eşitsizliği kullanılarak ispatlanır (bkz. EK B, İspat 1). Bu teoreme göre, kaybolma olasılığını en küçükleyen gelişler arası süre dağılımı deterministik dağılımdır. Buna geliş sürecine göre en iyileme denir. Benzer bir teorem bekleme yerinin olmadığı heterojen kanallı $GI/M/3$ kuyruk sistemi için İşgüder ve Kocer [27] tarafından ispatlanmıştır. Buna ek olarak hizmet disiplinine göre de en iyileme yapılabilir. Sisteme gelen müşterilerin boş olan kanallardan indeks numarası en küçük olan yerine en hızlı çalışan kanalda hizmete başladığını varsayalım. Buna kısaca en hızlı servis kuralı denir.

Teorem 2. (1, 2, 3) serisinin herhangi bir dizilimi yerine $\mu_{i_1} \geq \mu_{i_2} \geq \mu_{i_3}$ olacak şekilde (i_1, i_2, i_3) sırası ile atama yapılırsa $GI/M/3/K$ kuyruk sisteminde kaybolma olasılığı P_K en küçük olur.

Bu ispat, bir karar verme anında en hızlı olmayan bir kanala bir iş ataması durumunda, o işi daha hızlı bir kanala atayan başka bir politika olduğunu gösteren basit bir bağlantı argümanı ile yapılabilir (bkz. EK B, İspat 2). Bu teorem heterojen kanallı $M/M/m$ kuyruk sistemi için Weber [28] tarafından ispatlanmıştır. Benzer teoremler bekleme yerinin olmadığı heterojen kanallı $GI/M/n$ kuyruk sistemi için Yao [21] ve Saglam ve Shahbazov [22] tarafından ayrıca heterojen kanallı $M/M/s$ kuyruk sistemi için ise Nath ve Enns [18] tarafından ispatlanmıştır.

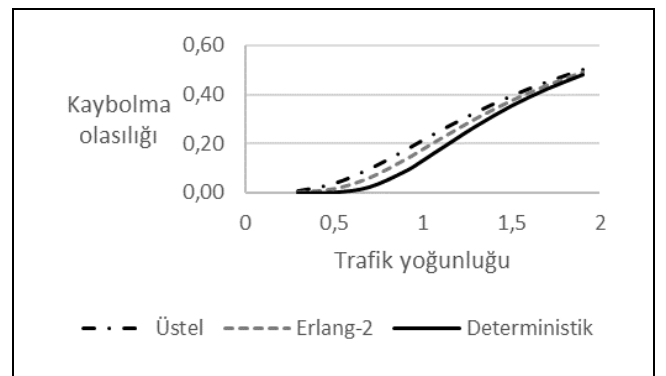
3.1 Sayısal çözümleme

Bu bölümde sayısal bir çalışma yapılarak geliş sürecine göre ve hizmet disiplinine göre kaybolma olasılığının değerleri araştırılmış ve karşılaştırılmıştır. İlk olarak farklı gelişler arası süre dağılımları için kaybolma olasılıklarının değerleri birbirleriyle karşılaştırılmış ve Teorem 1'de elde edilen sonuç sayısal olarak gösterilmiştir. İkinci durumda ise en hızlı servis kuralı varsayımı altında kaybolma olasılıkları hesaplanarak Teorem 2'de elde edilen sonuç sayısal olarak gösterilmiştir. Gelişler arası sürelerin dağılım fonksiyonu her iki durum için de sırasıyla üstel, Erlang-2 ve deterministik olarak seçilmiştir.

(23) formülüyle verilen kaybolma olasılığı, ortalama hizmet hızları sırasıyla $\mu_1 = 20, \mu_2 = 40$ ve $\mu_3 = 60$ seçilerek $M/M/3/5, E_2/M/3/5$ ve $D/M/3/5$ kuyruk sistemleri için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Burada ortalama geliş hızları (λ) sırasıyla 36, 60, 84, 108, 120, 132, 156, 180, 204 ve 228 seçilerek farklı trafik yoğunlukları için sonuçlar verilir. Tablo 1'de görüldüğü gibi trafik yoğunluğu arttıkça kaybolma olasılığı büyümektedir. Buna ek olarak Teorem 1'de ifade edildiği gibi, gelişler arası süreler deterministik dağıldığında kaybolma olasılığının değeri diğer dağılımlara göre her zaman daha küçük çıkmaktadır. Burada elde edilen sonuçlar Şekil 1'de özetlenmiştir. Ayrıca farklı parametreler için, başka bir sayısal çözümleme daha yapılmıştır (bkz. Ek C, Örnek 1).

Tablo 1: Kaybolma olasılıkları.

Trafik yoğunluğu	Kaybolma olasılığı		
	$M/M/3/5$	$E_2/M/3/5$	$D/M/3/5$
0.30	0.0059	0.0010	0.0000
0.50	0.0357	0.0145	0.0019
0.70	0.0948	0.0590	0.0237
0.90	0.1716	0.1328	0.0870
1.00	0.2120	0.1751	0.1309
1.10	0.2519	0.2181	0.1781
1.30	0.3269	0.3005	0.2712
1.50	0.3933	0.3736	0.3535
1.70	0.4507	0.4362	0.4223
1.90	0.4999	0.4892	0.4798



Şekil 1: Kaybolma olasılığının trafik yoğunluğuna göre değişimi.

Tablo 2'de trafik yoğunluğu $\rho = 0.90$ için kaybolma olasılıkları sırasıyla $M/M/3/5, E_2/M/3/5$ ve $D/M/3/5$ kuyruk sistemleri için hesaplanmıştır. Burada Teorem 2'nin sonucunu göstermek amacıyla ortalama hizmet hızlarının (20, 40, 60) mümkün bütün sıralamaları için kaybolma olasılıkları ayrı ayrı hesaplanmıştır. Tablo 2'den açık olarak görüldüğü gibi; sisteme gelen müşteri boş olan kanallardan en hızlı olanında hizmete başladığında (en hızlı servis kuralı), yani $\mu_1 = 60, \mu_2 = 40$ ve $\mu_3 = 20$ olduğunda, diğer sıralamalar içinde her zaman daha küçük bir değer alır. Farklı trafik yoğunlukları için, başka bir sayısal çözümleme daha yapılmıştır (bkz. Ek C, Örnek 2).

Tablo 1: $\rho = 0.90$ için kaybolma olasılıkları.

(20, 40, 60) serisinin mümkün bütün sıralamaları	Kaybolma olasılığı		
	$M/M/3/5$	$E_2/M/3/5$	$D/M/3/5$
$\mu_1 = 20, \mu_2 = 40, \mu_3 = 60$	0.1716	0.1328	0.0870
$\mu_1 = 20, \mu_2 = 60, \mu_3 = 40$	0.1704	0.1315	0.0860
$\mu_1 = 40, \mu_2 = 20, \mu_3 = 60$	0.1690	0.1306	0.0854
$\mu_1 = 40, \mu_2 = 60, \mu_3 = 20$	0.1659	0.1276	0.0829
$\mu_1 = 60, \mu_2 = 20, \mu_3 = 40$	0.1650	0.1268	0.0823
$\mu_1 = 60, \mu_2 = 40, \mu_3 = 20$	0.1631	0.1250	0.0807

4 Sonuçlar

Heterojen kanallı $GI/M/3/K$ kuyruk sistemi yarı-Markov süreci kullanılarak tanımlanmış ve yarı-Markov sürecinin sunulan Markov zinciri, ilgili kuyruk sistemi için elde edilmiştir. Sunulan Markov zincirinin Laplace-Stieltjes dönüşümü elde edilmiş ve bir adım geçiş olasılıkları bulunmuştur. Durağan durum olasılıkları elde edilmiş ve kaybolma olasılığı hesaplanmıştır.

Geliş sürecine göre en iyileme yapılarak, gelişler arası süre dağılımı deterministik olduğunda kaybolma olasılığının en küçük değere ulaştığı gösterilmiş ve bu durum sayısal bir çalışma üzerinde uygulanmıştır. Buna ek olarak hizmet disiplinine göre en iyileme yapılmış ve en hızlı servis kuralı uygulandığında kaybolma olasılığının en küçük değeri aldığı sayısal olarak gösterilmiştir.

Bu çalışmada ele alınan kuyruk sisteminde kanal sayısı 3 ile sınırlandırılmıştır. $GI/M/3/K$ kuyruk sistemi için ortaya konulan varsayımlar aynı kalmak üzere, kanal sayısının c olması durumunda ortaya çıkacak olan heterojen kanallı $GI/M/c/K$ kuyruk sisteminin modellenmesi bir sonraki çalışma olarak düşünülebilir. Buna ek olarak durağan durumda, sistemde bulunan ortalama müşteri sayısı, kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısı ve kuyrukta ortalama bekleme süresi gibi sistemin performans ölçüleri sayısal olarak $GI/M/3/5$ kuyruk sistemi için kolaylıkla hesaplanabilir. Fakat heterojen kanallı $GI/M/c/K$ kuyruk sistemi için performans ölçülerinin genel formda ifade edilmesi hem zor hem de önemli bir problem olarak karşımızda durmaktadır. Ayrıca bu çalışmada elde edilen sonuçlar yalnızca kuyruk problemlerinin çözümünde değil mühendislik alanında pek çok uygulaması olan güvenilirlik analizi problemlerinin çözümünde de kullanılabilir. Özellikle Gürcan ve diğ. [29] çalışmış olduğu n -den k -çıkışlı F sistemi ve benzeri güvenilirlik analizi problemlerinin genelleştirilmesinde kullanılabilir.

5 Kaynaklar

- [1] Erlang AK. "The theory of probabilities and telephone conversations". *Nyt Tidsskrift for Matematik*, 20(B), 33-39, 1909.
- [2] Palm C. "Intensitätsschwankungen im Fernspreverkehr". *Ericsson Techniks*, 44(39), 1-189, 1943.
- [3] Kendall DG. "Some problems in the theory of queues". *Journal of the Royal Statistical Society Series B (Methodological)*, 13(2), 151-185, 1960.
- [4] Gumbel M. "Waiting lines with heterogeneous servers". *Operations Research*, 8(4), 219-225, 1960.
- [5] Takacs L. "On the generalization of Erlang's formula". *Acta Mathematica Hungarica*, 7(3), 419-433, 1956.
- [6] Yao DD. "Convexity properties of the overflow in an ordered-entry system with heterogeneous servers". *Operations Research Letters*, 5(3), 145-147, 1986.
- [7] Neuts FM, Takahashi Y. "Asymptotic behavior of the stationary distributions in the $GI/PH/c$ queue with heterogeneous servers". *Probability Theory and Related Fields*, 57(4), 441-452, 1981.
- [8] Lin BW, Elsayed EA. "A general solution for multichannel queueing systems with ordered entry". *Computers & Operations Research*, 5(4), 504-511, 1978.
- [9] Fakinos D. "The blocking system with heterogeneous servers". *The Journal of the Operational Research Society*, 31(10), 388-394, 1980.
- [10] Nawijn MW. "On a two-server finite queueing system with ordered entry and deterministic arrivals". *European Journal of Operational Research*, 18(3), 388-395, 1984.
- [11] Alpaslan F, Shahbazov A. "An analysis and optimization of stochastic service with heterogeneous channel and poisson arrival". *Pure and Applied Matematika Sciences*, 43(2), 15-20, 1996.
- [12] Kumar BK, Madheswari SP, Venkatakrishnan KS. "Transient solution of an $M/M/2$ queue with heterogeneous servers subject to catastrophes". *International Journal of Information and Management Sciences*, 18(1), 63-80, 2007.
- [13] Alves FSQ, Yehia HC, Pedrosa LAC, Cruz FRB, Kerbache L. "Upper bounds on performance measures of heterogeneous $M/M/c$ queues". *Mathematical Problems in Engineering*, Vol: 2011 Article ID 702834, doi:10.1155/2011/702834, 2011.
- [14] Choudhury G, Deka M. "A single server queueing system with two phases of service subject to server breakdown and Bernoulli vacation". *Applied Mathematical Modelling*, 36(12), 6050-6060, 2012.
- [15] Alpaslan F. "A queueing model with two heterogeneous servers and overflow". *Pure and Applied Matematika Sciences*, 55(1), 1-8, 2002.
- [16] Cooper, RB. "Queues with ordered servers that work at different rates". *Opsearch*, 13(2), 69-78, 1976.
- [17] Matsui M, Fukuta J. "On a multichannel queueing system with ordered entry and heterogeneous servers". *AIIE Transactions*, 9(2), 209-214, 1977.
- [18] Nath G, Enns E. "Optimal service rates in the multiserver loss system with heterogeneous servers". *Journal of Applied Probability*, 18(3), 776-781, 1981.
- [19] Nawijn MW. "A note on many-server queueing systems with ordered entry, with an application to conveyor theory". *Journal of Applied Probability*, 20(1), 144-152, 1983.
- [20] Pourbabai B, Sonderman D. "Service utilization factors in queueing loss systems with ordered entry and heterogeneous servers". *Journal of Applied Probability*, 23(1), 236-242, 1986.
- [21] Yao DD. "The Arrangement of servers in an ordered-entry system". *Operations Research*, 35(5), 759-763, 1987.
- [22] Saglam V, Shahbazov A. "Minimizing loss probability in queueing systems with heterogeneous servers". *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 31(2), 199-206, 2007.
- [23] İşgüder HO, Celikoglu CC. "Minimizing the loss probability in $GI/M/3/0$ queueing system with ordered entry". *Scientific Research and Essays*, 7(8), 963-968, 2012.
- [24] İşgüder HO, Kocer UK, Celikoglu CC. "Generalization of the Takacs' formula for $GI/M/n/0$ queueing system with heterogeneous servers". *Proceedings of the World Congress on Engineering I*, London, UK, 6-8 July 2011.
- [25] İşgüder HO, Kocer UU. "Analysis of $GI/M/n/n$ queueing system with ordered entry and no waiting line". *Applied Mathematical Modelling*, 38(3), 1024-1032, 2014.
- [26] Shahbazov A. *Olasılık Teorisine Giriş*. 1. Baskı. İstanbul, Türkiye, Birsen, 2005.
- [27] İşgüder HO, Kocer UU. "Optimization of loss probability for $GI/M/3/0$ queueing system with heterogeneous servers". *Anadolu University Journal of Science and Technology: B-Theoretical Sciences*, 1(1), 73-89, 2011.
- [28] Weber R. "On a conjecture about assigning jobs to processors of differing speeds". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(1), 166-170, 1993.
- [29] Gürcan M, Güral Y, Gokdere G. "Analysis of Repairable k-out-of-n System model using inter-arrival failure times" *CMES 2018 The Third International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, ITM Web of Conferences 22*, 01054, 17 October 2018, <https://doi.org/10.1051/itmconf/20182201054>.

Ek A

(19) eşitliği ile verilen $q(s)$ matrisi, heterojen kanallı $GI/M/3/5$ kuyruk sistemi için aşağıdaki gibi yazılır:

$$q(s) = \begin{bmatrix} q_{00}(s) & q_{01}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{10}(s) & q_{11}(s) & q_{12}(s) & 0 & 0 & 0 \\ q_{20}(s) & q_{21}(s) & q_{22}(s) & q_{23}(s) & 0 & 0 \\ q_{30}(s) & q_{31}(s) & q_{32}(s) & q_{33}(s) & q_{34}(s) & 0 \\ q_{40}(s) & q_{41}(s) & q_{42}(s) & q_{43}(s) & q_{44}(s) & q_{45}(s) \\ q_{40}(s) & q_{41}(s) & q_{42}(s) & q_{43}(s) & q_{44}(s) & q_{45}(s) \end{bmatrix} \quad (A1)$$

$q_{ij}(s)$ eşitlikleri, $Q_{ij}(x)$ ($0 \leq i, j \leq 5$) çekirdek fonksiyonlarının Laplace-Stieltjes dönüşümü olup aşağıdaki gibidir:

$$q_{00}(s) = f(s) - f(s + \mu_1) \quad (A2)$$

$$q_{01}(s) = f(s + \mu_1) \quad (A3)$$

$$q_{10}(s) = f(s) - f(s + \mu_1) - \frac{2}{3}f(s + \mu_2) - \frac{1}{3}f(s + \mu_3) + \frac{2}{3}f(s + \mu_1 + \mu_2) + \frac{1}{3}f(s + \mu_1 + \mu_3) \quad (A4)$$

$$q_{11}(s) = f(s + \mu_1) + \frac{2}{3}f(s + \mu_2) + \frac{1}{3}f(s + \mu_3) - \frac{4}{3}f(s + \mu_1 + \mu_2) - \frac{2}{3}f(s + \mu_1 + \mu_3) \quad (A5)$$

$$q_{12}(s) = \frac{2}{3}f(s + \mu_1 + \mu_2) + \frac{1}{3}f(s + \mu_1 + \mu_3) \quad (A6)$$

$$q_{20}(s) = f(s) - f(s + \mu_1) - f(s + \mu_2) - f(s + \mu_3) + f(s + \mu_1 + \mu_2) + f(s + \mu_1 + \mu_3) + f(s + \mu_2 + \mu_3) - f(s + \mu) \quad (A7)$$

$$q_{21}(s) = f(s + \mu_1) + f(s + \mu_2) + f(s + \mu_3) - 2[f(s + \mu_1 + \mu_2) + f(s + \mu_1 + \mu_3) + f(s + \mu_2 + \mu_3)] + 3f(s + \mu) \quad (A8)$$

$$q_{22}(s) = f(s + \mu_1 + \mu_2) + f(s + \mu_1 + \mu_3) + f(s + \mu_2 + \mu_3) - 3f(s + \mu) \quad (A9)$$

$$q_{23}(s) = q_{34}(s) = q_{45}(s) = f(s + \mu) \quad (A10)$$

$$q_{30}(s) = f(s) - f(s + \mu) - \frac{\mu}{\mu_2 + \mu_3} [f(s + \mu_1) - f(s + \mu)] - \frac{\mu}{\mu_1 + \mu_3} [f(s + \mu_2) - f(s + \mu)]$$

$$- \frac{\mu}{\mu_1 + \mu_2} [f(s + \mu_3) - f(s + \mu)] + \frac{\mu}{\mu_3} [f(s + \mu_1 + \mu_2) - f(s + \mu)] + \frac{\mu}{\mu_2} [f(s + \mu_1 + \mu_3) - f(s + \mu)] + \frac{\mu}{\mu_1} [f(s + \mu_2 + \mu_3) - f(s + \mu)] - \mu f^2(s + \mu) \quad (A11)$$

$$q_{31}(s) = \frac{\mu}{\mu_2 + \mu_3} [f(s + \mu_1) - f(s + \mu)] + \frac{\mu}{\mu_1 + \mu_3} [f(s + \mu_2) - f(s + \mu)] \quad (A12)$$

$$+ \frac{\mu}{\mu_1 + \mu_2} [f(s + \mu_3) - f(s + \mu)] - \frac{2\mu}{\mu_3} [f(s + \mu_1 + \mu_2) - f(s + \mu)] - \frac{2\mu}{\mu_2} [f(s + \mu_1 + \mu_3) - f(s + \mu)] - \frac{2\mu}{\mu_1} [f(s + \mu_2 + \mu_3) - f(s + \mu)] + 3\mu f^2(s + \mu)$$

$$q_{32}(s) = \frac{\mu}{\mu_3} [f(s + \mu_1 + \mu_2) - f(s + \mu)] + \frac{\mu}{\mu_2} [f(s + \mu_1 + \mu_3) - f(s + \mu)] + \frac{\mu}{\mu_1} [f(s + \mu_2 + \mu_3) - f(s + \mu)] - 3\mu f^2(s + \mu) \quad (A13)$$

$$q_{33}(s) = q_{44}(s) = \mu f^2(s + \mu) \quad (A14)$$

$$q_{40}(s) = f(s) - f(s + \mu) - \frac{\mu^2}{(\mu_2 + \mu_3)^2} [f(s + \mu_1) - f(s + \mu)] - (\mu_2 + \mu_3) f^2(s + \mu) - \frac{\mu^2}{(\mu_1 + \mu_3)^2} [f(s + \mu_2) - f(s + \mu)] - (\mu_1 + \mu_3) f^2(s + \mu) - \frac{\mu^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} [f(s + \mu_3) - f(s + \mu)] - (\mu_1 + \mu_2) f^2(s + \mu) + \frac{\mu^2}{\mu_3} [f(s + \mu_1 + \mu_2) - f(s + \mu)] - \mu_3 f^2(s + \mu) + \frac{\mu^2}{\mu_2} [f(s + \mu_1 + \mu_3) - f(s + \mu)] - \mu_2 f^2(s + \mu) + \frac{\mu^2}{\mu_1} [f(s + \mu_2 + \mu_3) - f(s + \mu)] - \mu_1 f^2(s + \mu) - \frac{\mu^2}{2} f^3(s + \mu) \quad (A15)$$

$$q_{41}(s) = \frac{\mu^2}{(\mu_2 + \mu_3)^2} [f(s + \mu_1) - f(s + \mu) - (\mu_2 + \mu_3) f^2(s + \mu)] + \frac{\mu^2}{(\mu_1 + \mu_3)^2} [f(s + \mu_2) - f(s + \mu) - (\mu_1 + \mu_3) f^2(s + \mu)] + \frac{\mu^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} [f(s + \mu_3) - f(s + \mu) - (\mu_1 + \mu_2) f^2(s + \mu)] - \frac{2\mu^2}{\mu_3} [f(s + \mu_1 + \mu_2) - f(s + \mu) - \mu_3 f^2(s + \mu)] - \frac{2\mu^2}{\mu_2} [f(s + \mu_1 + \mu_3) - f(s + \mu) - \mu_2 f^2(s + \mu)] - \frac{2\mu^2}{\mu_1} [f(s + \mu_2 + \mu_3) - f(s + \mu) - \mu_1 f^2(s + \mu)] + \frac{3\mu^2}{2} f^3(s + \mu) \quad (A16)$$

$$q_{42}(s) = \frac{\mu^2}{\mu_3^2} [f(s + \mu_1 + \mu_2) - f(s + \mu) - \mu_3 f^2(s + \mu)] + \frac{\mu^2}{\mu_2^2} [f(s + \mu_1 + \mu_3) - f(s + \mu) - \mu_2 f^2(s + \mu)] + \frac{\mu^2}{\mu_1^2} [f(s + \mu_2 + \mu_3) - f(s + \mu) - \mu_1 f^2(s + \mu)] - \frac{3\mu^2}{2} f^3(s + \mu) \quad (A17)$$

$$q_{43}(s) = \frac{\mu}{2} f^3(s + \mu) \quad (A18)$$

Ek B

İspat 1. (23) eşitliği ile verilen kaybolma olasılığının formülünü göz önüne alalım. $f_1 = f(\mu_1)$, $f_2 = f(\mu_2)$, $f_3 = f(\mu_3)$, $f_{12} = f(\mu_1 + \mu_2)$, $f_{13} = f(\mu_1 + \mu_3)$, $f_{23} = f(\mu_2 + \mu_3)$, $f = f(\mu)$, $f^2 = f^2(\mu)$ ve $f^3 = f^3(\mu)$ olmak üzere (23) formülünü pay ve paydası 6 sayısı ile çarpılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P_K = \frac{f_1(4f_{12} + 2f_{13})(f)^3}{6 \cdot D(1, 1, 1, 1, 1)} \quad (B1)$$

Jensen eşitsizliğinden elde edilen $f(s) \geq e^{-as}$ eşitsizliği (B1) formülünün hem pay hem de paydasına uygulayalım. Öncelikle ilgili eşitsizliği (B1) formülünün payına uygularsak,

$$f(\mu_1)[4f(\mu_1 + \mu_2) + 2f(\mu_1 + \mu_3)][f(\mu)]^3 \geq e^{-a\mu_1}[4e^{-a(\mu_1 + \mu_2)} + 2e^{-a(\mu_1 + \mu_3)}](e^{-a\mu})^3,$$

elde edilir. Yukarıda verilen son eşitsizliğe göre gelişlerarası süreler deterministik olduğu zaman, (B1) eşitliğinin payı diğer dağılımlar arasında her zaman daha küçük değerini alacaktır. Benzer şekilde (B1) eşitliğinin paydasının derterministik dağılım için her zaman daha küçük kaldığını göstermek gerekmektedir. Bunun için kolaylık açısından B1 formülünün paydasında yer alan $6 \cdot D(1, 1, 1, 1, 1)$ 'i aşağıdaki gibi ifade edelim:

$$6 \cdot D(1, 1, 1, 1, 1) = 2 \cdot (D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5) \cdot D_6 + D_7 + D_8 + D_9 + D_{10} + D_{11}(D_{12} + D_{13}) \quad (B2)$$

burada $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}$ ve D_{13} terimleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$D_1 = -6ff_{12} - 2f_2f_{12} - 2f_3f_{12} - 3ff_{13} - f_2f_{13} - f_3f_{13},$$

$$D_2 = 2 \cdot (-2f_{12} - f_{13})(-f_{12} - f_{13} - f_{23}),$$

$$D_3 = (3 - 2f_2 - f_3)[-f - 3(f)^2] + (-f)(-f_{12} - f_{13} - f_{23}),$$

$$D_4 = (-\mu f) \left(-3f^2 - \frac{f}{\mu_1} - \frac{f}{\mu_2} - \frac{f}{\mu_3} \right)$$

$$D_5 = -\frac{\mu f f_{23}}{\mu_1} - \frac{\mu f f_{13}}{\mu_2} - \frac{\mu f f_{12}}{\mu_3}$$

$$D_6 = (1 - f - \mu f^2)$$

$$D_7 = -\mu f f^3(3 + 9f + f_{12} + f_2f_{13} + 2f_2f_{23} + f_3f_{23} + 6ff_{12} + 3ff_{13})$$

$$D_8 = (-\mu f f^3)(-3f(f_2 + f_3) - f_{13} - 3f_{23} - 2f_2 - f_3 - f_3f_{12})$$

$$D_9 = -(f)^2 \left(\frac{2f_{23}}{\mu_1^2} + \frac{2f_{13}}{\mu_2^2} + \frac{2f_{12}}{\mu_3^2} \right)$$

$$D_{10} = (-f)^2 \left(-\frac{2f}{\mu_1^2} - \frac{2f^2}{\mu_1} - \frac{2f}{\mu_2^2} - \frac{2f^2}{\mu_2} - \frac{2f}{\mu_3^2} - \frac{2f^2}{\mu_3} - 3f^3 \right)$$

$$D_{11} = 2[-(f)^2f_{12} - (f)^2f_{13}]$$

$$D_{12} = -f^2 \left(\frac{2\mu^2 f}{\mu_1^2} + \frac{2\mu^2 f^2}{\mu_1} + \frac{2\mu^2 f}{\mu_2^2} + \frac{2\mu^2 f^2}{\mu_2} + \frac{2\mu^2 f}{\mu_3^2} + \frac{2\mu^2 f^2}{\mu_3} + \frac{\mu^2 f_3}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\mu^2 f_2}{\mu_1 + \mu_3} + \frac{\mu^2 f_1}{\mu_2 + \mu_3} + \frac{3\mu^2 f^3}{2} \right)$$

$$D_{13} = (-f^2) \left(-f_1 - \frac{2\mu^2 f_{23}}{\mu_1^2} - \frac{2\mu^2 f_{13}}{\mu_2^2} - \frac{2\mu^2 f_{12}}{\mu_3^2} - \frac{\mu^2 f}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{\mu^2(\mu_1 + \mu_2)f^2}{\mu_1^2 + \mu_2^2} - \frac{\mu^2 f}{\mu_1 + \mu_3} - \frac{\mu^2(\mu_1 + \mu_3)f^2}{\mu_1^2 + \mu_3^2} - \frac{\mu^2 f}{\mu_2 + \mu_3} - \frac{\mu^2(\mu_2 + \mu_3)f^2}{\mu_2^2 + \mu_3^2} \right).$$

$f(s) \geq e^{-as}$ eşitsizliğini yeniden dikkate alalım ve $D_1 = -6ff_{12} - 2f_2f_{12} - 2f_3f_{12} - 3ff_{13} - f_2f_{13} - f_3f_{13}$ terimine bu eşitsizliği uygulayalım. Bu durumda:

$$-6ff_{12} - 2f_2f_{12} - 2f_3f_{12} - 3ff_{13} - f_2f_{13} - f_3f_{13} \leq -6e^{-a\mu}e^{-a(\mu_1 + \mu_2)} - 2e^{-a\mu_2}e^{-a(\mu_1 + \mu_2)} - 2e^{-a\mu_3}e^{-a(\mu_1 + \mu_2)} - 3e^{-a\mu}e^{-a(\mu_1 + \mu_3)} - e^{-a\mu_2}e^{-a(\mu_1 + \mu_3)} - e^{-a\mu_3}e^{-a(\mu_1 + \mu_3)},$$

elde edilir. (B2) eşitliğinde yer alan $D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}$ ve D_{13} terimleri için de $f(s) \geq e^{-as}$ eşitsizliği benzer şekilde uygulandığında (B1) eşitliğinin paydası, deterministik dağılım için her zaman daha büyük değer olacaktır. Burada (B1) formülünün paydasındaki bütün terimlerin içinde yer alan $f(s)$ 'lerin başında -1 çarpanının bulunduğuna dikkat edilmelidir.

Sonuç olarak deterministik dağılım için (B1) formülünün payı diğer dağılımlara göre her zaman daha küçük ya da eşit kalırken, paydası ise diğer dağılımlara göre her zaman daha büyük ya da eşit kalmaktadır. Sonuç olarak ortalaması aynı ve α olan gelişlerarası süre dağılımları içinden, deterministik dağılım kaybolma olasılığının değerini her zaman en küçükleyecektir. İspat tamamlanmıştır.

İspat 2. Bu ispat, bir karar verme anında en hızlı olmayan bir kanala bir iş ataması durumunda, o işi daha hızlı bir kanala atayan başka bir politika olduğunu gösteren basit bir bağlantı argümanı ile yapılabilir. Bu argüman çeşitli şekillerde ifade edilebilir. Burada Sistemin yarı-Markov süreci ile tanımlandığı göz önünde bulundurulmalıdır. Yarı-Markov sürecine göre sistemin durumu müşterinin geliş anından hemen önce kontrol edilir, dolayısıyla sistemden ayrılan müşteri ile doğrudan ilgilenilmez. Bu sisteme göre sisteme gelen müşteriler boş olan kanallardan sıra numarası en düşük olan kanala 1'e eşit olasılıkla atanır. Varsayalım ki $\alpha + \sum_{i=1}^3 \mu_i = 1$ olsun ve $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3$ olsun. Varsayalım ki π' kanalları hızlarına göre büyükten küçüğe sıralayan bir kural olsun, yani $\pi' = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$. Bu durumda en hızlı servis kuralı uygulanmış olur. π ise yalnızca iki kanala ait sıra numarasını birbiriyle değiştirmekle elde edilebilecek sıralamalardan herhangi bir tanesi olsun ve bunun dışında π' ile tamamen özdeş olsun.

Müşterinin sisteme geliş anında bütün kanallar boş ise π' kuralının, π kuralından stokastik olarak daha avantajlı olduğu

açıktır. Varsayalım ki müşterinin geliş anında sistemde bir kişi vardır. Bu kişi birinci, ikinci ya da üçüncü sıradaki kanallardan birisinde olabilir. Böyle bir durumda π' kuralına göre sisteme gelen müşteri anılan sırayla, ya 2. kanala, ya 1. kanala ya da yine 1. kanala girecektir. Sonuç olarak (μ_1, μ_2) , (μ_2, μ_1) ve (μ_3, μ_1) biçiminde bir durum ortaya çıkacaktır. Yani π' kuralına göre müşterinin geliş anında sistemde 1 kişi varsa sistem hiçbir zaman $\mu_2 + \mu_3$ hızıyla hizmet vermeyecektir. Bu durum π kuralının bütün farklı sıralamaları için sırasıyla ya (μ_2, μ_1) , (μ_1, μ_2) , (μ_3, μ_2) şeklinde, ya (μ_3, μ_2) , (μ_2, μ_3) , (μ_1, μ_3) şeklinde ya da (μ_1, μ_3) , (μ_3, μ_1) , (μ_2, μ_1) , şeklinde olacaktır. Buradan açık olarak görülür ki bu durumda da, π' kuralı π kuralından stokastik olarak daha avantajlıdır. Eğer müşterinin geliş anında sistemde 2 müşteri var ise sisteme gelen müşteri boş olan kanala gireceği için ve sistemde 3 ya da daha fazla müşteri varsa gelen müşteri kuyruğa gireceği için π' ile π arasında hiçbir fark olmayacaktır. Bu karşılaştırmalara göre; n -nci gözlem anından hemen sonra sistemdeki iş sayısının, π' altında π den daha büyük olmadığı açıktır. Dolayısıyla en hızlı servis kuralı (π' kuralı) uygulandığında P_K olasılığı diğer kurallara göre hesaplanan değerlerden her zaman küçük ya da en fazla bu değerlere eşit olacaktır. İspat tamamlanmıştır.

Ek C

Örnek 1. (23) formülüyle verilen kaybolma olasılığı, ortalama hizmet hızları sırasıyla $\mu_1 = 15$, $\mu_2 = 10$ ve $\mu_3 = 17$ seçilerek $M/M/3/5$, $E_2/M/3/5$ ve $D/M/3/5$ kuyruk sistemleri için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Burada ortalama geliş hızları (λ) sırasıyla 12.6, 21, 29.4, 37.8, 42, 46.2, 54.6, 63, 71.4 ve 79.8 seçilerek farklı trafik yoğunlukları sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo C1: Kaybolma olasılıkları.

Trafik yoğunluğu	Kaybolma olasılığı		
	$M/M/3/5$	$E_2/M/3/5$	$D/M/3/5$
0.30	0.0045	0.0007	0.0000
0.50	0.0311	0.0120	0.0015
0.70	0.0882	0.0540	0.0211
0.90	0.1650	0.1272	0.0831
1.00	0.2058	0.1699	0.1271
1.10	0.2463	0.2134	0.1748
1.30	0.3226	0.2971	0.2690
1.50	0.3901	0.3712	0.3521
1.70	0.4484	0.4345	0.4217
1.90	0.4982	0.4880	0.4793

Tablo C1 dikkatle incelendiğinde Teorem 1'de ifade edildiği gibi, gelişlerarası süreler deterministik dağıldığında kaybolma

olasılığının değeri diğer dağılımlara göre her zaman daha küçük çıkmaktadır.

Örnek 2. Örnek 1 de verilen parametreler göz önüne alınarak Teorem 2'yi sayısal olarak açıklamak amacıyla ortalama hizmet hızlarının (15, 10, 17) mümkün bütün sıralamaları için kaybolma olasılıkları, trafik yoğunluklarının sırasıyla 0.30, 0.50 ve 0.90 olduğu durumlar için ayrı ayrı hesaplanmış ve aşağıda verilen tablolarla özetlenmiştir.

Tablo C2: $\rho = 0.30$ için kaybolma olasılıkları.

(15, 10, 17) serisinin mümkün bütün sıralamaları	Kaybolma olasılığı		
	$M/M/3/5$	$E_2/M/3/5$	$D/M/3/5$
$\mu_1 = 15, \mu_2 = 10, \mu_3 = 17$	0.0045	0.0006	0.0000
$\mu_1 = 15, \mu_2 = 17, \mu_3 = 10$	0.0043	0.0006	0.0000
$\mu_1 = 10, \mu_2 = 15, \mu_3 = 17$	0.0051	0.0008	0.0000
$\mu_1 = 10, \mu_2 = 17, \mu_3 = 15$	0.0050	0.0008	0.0000
$\mu_1 = 17, \mu_2 = 10, \mu_3 = 15$	0.0043	0.0006	0.0000
$\mu_1 = 17, \mu_2 = 15, \mu_3 = 10$	0.0041	0.0005	0.0000

Tablo C3: $\rho = 0.50$ için kaybolma olasılıkları.

(15, 10, 17) serisinin mümkün bütün sıralamaları	Kaybolma olasılığı		
	$M/M/3/5$	$E_2/M/3/5$	$D/M/3/5$
$\mu_1 = 15, \mu_2 = 10, \mu_3 = 17$	0.0311	0.0120	0.0015
$\mu_1 = 15, \mu_2 = 17, \mu_3 = 10$	0.0301	0.0114	0.0013
$\mu_1 = 10, \mu_2 = 15, \mu_3 = 17$	0.0328	0.0130	0.0016
$\mu_1 = 10, \mu_2 = 17, \mu_3 = 15$	0.0325	0.0128	0.0016
$\mu_1 = 17, \mu_2 = 10, \mu_3 = 15$	0.0302	0.0115	0.0013
$\mu_1 = 17, \mu_2 = 15, \mu_3 = 10$	0.0294	0.0111	0.0012

Tablo C4: $\rho = 0.90$ için kaybolma olasılıkları.

(15, 10, 17) serisinin mümkün bütün sıralamaları	Kaybolma olasılığı		
	$M/M/3/5$	$E_2/M/3/5$	$D/M/3/5$
$\mu_1 = 15, \mu_2 = 10, \mu_3 = 17$	0.1650	0.1272	0.0831
$\mu_1 = 15, \mu_2 = 17, \mu_3 = 10$	0.1633	0.1256	0.0817
$\mu_1 = 10, \mu_2 = 15, \mu_3 = 17$	0.1670	0.1290	0.0844
$\mu_1 = 10, \mu_2 = 17, \mu_3 = 15$	0.1666	0.1286	0.0840
$\mu_1 = 17, \mu_2 = 10, \mu_3 = 15$	0.1637	0.1260	0.0821
$\mu_1 = 17, \mu_2 = 15, \mu_3 = 10$	0.1625	0.1248	0.0811

Tablo C1 ve Tablo C2 ve Tablo C3'den açık olarak görüldüğü gibi; sisteme gelen müşteri boş olan kanallardan en hızlı olanında hizmete başladığında (en hızlı servis kuralı), yani $\mu_1 = 17, \mu_2 = 15$ ve $\mu_3 = 10$ olduğunda, diğer sıralamalar içinde her zaman daha küçük bir değer alır.