

## Malzeme güvenilirlik analizinde Weibull alt yüzdelliklerinin alt güven sınırının küçük örneklerle tahmini

### Estimating confidence lower bounds of Weibull lower percentiles with small samples in material reliability analysis

Meryem YALÇINKAYA<sup>1\*</sup> , Burak BİRGÖREN<sup>2</sup> 

<sup>1,2</sup>Endüstri Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale, Türkiye.  
mariemkaya@gmail.com, bbirgoren@yahoo.com

Geliş Tarihi/Received: 22.03.2019, Kabul Tarihi/Accepted: 30.07.2019

\* Yazışılan yazar/Corresponding author

doi: 10.5505/pajes.2019.40111

Araştırma Makalesi/Research Article

#### Öz

Weibull dağılımı seramik ve kompozit malzemelerin kopma mukavemeti gibi mekanik özelliklerinin modellenmesinde yaygın şekilde kullanılır. Mekanik özelliklerin %95 güven düzeyinde 1. yüzdellik ve 10. yüzdellik alt güven sınırları, diğer adıyla A-Temel ve B-Temel malzeme özellikleri, güvenilirlik çalışmalarında erken arızaları anlama ve risk azaltma için önemlidir. Bu alt sınırlar, deneylerin yüksek maliyetleri nedeniyle genellikle küçük örneklerle, dolayısıyla düşük hassasiyet düzeyleriyle tahmin edilir. Bu nedenle literatürde daha iyi tahminler gerçekleştirmeyi amaçlayan birçok kesin ve yaklaşık alt sınır tahmin yöntemi önerilmiştir. Bu çalışmada kesin yöntemlerin Monte-Carlo benzetimleriyle kapsamlı bir karşılaştırması yapılmıştır. Ayrıca, Weibull parametreleri için geliştirilen bazı yöntemler kesin alt sınır tahmininde kullanılabilir olmakla birlikte literatürde bu amaçla hiç kullanılmadığından bu karşılaştırma kapsamına alınmıştır. Çalışmada alt sınırlar, maksimum benzerlik, Menon yöntemi ve ağırlıklı/ağırlıksız en küçük kareler yöntemlerinin 25 farklı modeli (geliştirilmiş tahminleyiciler, değiştirilmiş eksenler gibi) ile tahmin edilmiş ve sonuçlar, ortalama yanlış kapsama olasılığı kriterine göre karşılaştırılmıştır. Benzetim sonuçlarına göre, hacmi 20'den küçük örneklerde maksimum benzerlik ile Faucher & Tyson ağırlık faktörlü en küçük kareler yöntemlerinin çok benzer performansla sahip olduğu, hacmi 20 ve daha büyük örneklerde ise maksimum benzerlik yönteminin her zaman daha iyi olduğu gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, performans farklarının ihmal edilebilir olduğu durumlarda hesaplama kolaylığı açısından en küçük kareler yöntemlerinin daha pratik olduğu vurgulanmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Weibull alt yüzdellikler, A-Temel ve B-Temel malzeme özellikleri, Güvenilirlik

#### Abstract

Weibull distribution is widely used in the modeling of mechanical properties such as tensile strength of ceramic and composite materials. The 95% one-sided confidence lower bounds on the 1st and 10th Weibull percentiles, namely A-basis and B-basis material properties, are important in reliability studies for understanding early failures and reducing risks. These lower bounds are generally estimated by small samples due to the high costs of the experiments, hence the precision of estimation remain low. Therefore, in the literature, many exact and approximate interval estimation methods for Weibull percentiles have been proposed for achieving better performance. In this study, a comprehensive comparison of the exact methods with Monte-Carlo simulations has been made. In addition, some methods developed for Weibull parameters are also included in this comparison since they can be used for exact lower bound estimation but have never used for this purpose in the literature. In the study, the lower bounds have been estimated by the maximum likelihood method, the Menon method and 25 different models of weighted/ unweighted least squares methods (such as improved estimators, interchanged axes), and average false coverage probabilities are used for the comparison criterion. According to the simulation results, the maximum likelihood and the weighted least squares method with Faucher & Tyson weight factors have very similar performances for sample sizes less than 8; and the maximum likelihood method has always shown the best performance for sample sizes greater than or equal to 20. However, it is emphasized that linear regression methods are more practical in terms of ease of calculation when performance differences are negligible.

**Keywords:** Weibull lower percentiles, A and B basis material properties, Reliability

## 1 Giriş

Güvenilirlik analiz çalışmalarında, Weibull dağılımı zamana göre değişen arıza hızlarını esnek bir şekilde modelleyebildiği için malzeme bilimi de dahil birçok alanda yaygın bir şekilde kullanılır [1],[2]. Literatürde ilk kez Bofors çeliklerinin akma dayanım özelliklerinin modellenmesinde kullanılan Weibull dağılımı genellikle ölçek ( $\sigma_0$ ) ve biçim ( $m$ ) olmak üzere iki parametrelili formda uygulanır [3]. İki parametrelili Weibull dağılımına sahip  $T$  rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t; \theta) = f(t; m, \sigma_0) = \frac{m}{\sigma_0} \left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^m} \quad (1)$$

$$t \geq 0, \quad m > 0, \quad \sigma_0 > 0$$

eşitliği ile gösterilir. Bazı durumlarda dağılım konum parametresinin de eklenmesi ile üç parametrelili formda kullanılır. Malzeme bilimi literatüründe ise genel olarak 2 parametrelili Weibull dağılımı kullanılır [4]-[8]. 2 parametrelili Weibull dağılımı için kümülatif olasılık fonksiyonu Eşitlik (2)'te verilmiştir.

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^m\right) \quad (2)$$

İki parametrelili Weibull dağılımına dayalı malzeme güvenilirlik hesaplamalarının yapılabilmesi için öncelikle modele ilişkin parametre ve yüzdelliklerin tahmin edilmesi gerekir. Özellikle Weibull alt yüzdelliklerin tahmini güvenilirlik analizi çalışmaları için oldukça önemlidir; çünkü alt yüzdellikler garanti analizi, hızlandırılmış ömür testleri, normal kullanım sırasında erken arızaları anlama, risk azaltma, spesifikasyon sınırlarının iyileştirilmesi, üretim maliyetlerini düşürülmesi ve

pahalı ürün hatası şikayetlerinden kaçınma gibi konularda araştırmacıya önemli bilgiler vermektedir [9]. Weibull alt yüzdelik değeri ( $t_p$ ), güvenilirlik hesaplamalarında küçük bir  $p$  hata olasılığına karşılık gelir ve bu olasılık Eşitlik (3)'teki gibi ifade edilir.

$$P(T \leq t_p) = p \quad (3)$$

Weibull dağılımı için  $t_p$ , Eşitlik (4)'ün çözümlenmesi ile bulunur. Eşitlik (4), Eşitlik (2)'nin logaritmik dönüşümü ile elde edilmiştir.

$$t_p = \sigma_0 [ln(1/(1-p))]^{1/m} \quad (4)$$

Araştırmacılar, ölçümler arasındaki değişkenlik nedeniyle malzeme mekanik özelliklerinin  $t_p$ 'leri hakkında daha kesin bilgilere sahip olmak ister. Bu noktada, malzeme literatüründe  $A$  ve  $B$  temel malzeme özellikleri olarak da bilinen Weibull 1. ve 10. yüzdeliklerinin %95 güven düzeyindeki alt sınırlarının tahmin edilmesi, ölçümü yapılan mekanik özellik hakkında araştırmacıya daha detaylı ve faydalı bilgiler sunar. Literatürde  $t_p$  için kesin güven aralıkları,  $\hat{m}ln(\hat{t}_p/t_p)$  değişkeninin pivot istatistik özelliği taşıdığı maksimum benzerlik (maximum likelihood (ML)), ağırlıklı YonX en küçük kareler (weighted YonX least squares (YonX-WLS)), ağırlıksız XonY en küçük kareler (unweighted XonY least squares (XonY-LS)) ve Menon (MN) yöntemleri ile hesaplanabilmektedir [8],[10],[11].

$\hat{m}ln(\hat{t}_p/t_p)$  değişkeni, Eşitlik (4)'e göre  $t_p$  ve  $\hat{t}_p$  değerlerini veren türdeş denklemlerin kombine edilmesi ile elde edilir ve Eşitlik (5)'teki gibi gösterilir [11]. Eşitlik (5)'te  $\hat{m}ln(\hat{\sigma}_0/\sigma_0)$  ve  $\hat{m}/m$  değişkenleri,  $m$  ve  $\sigma_0$ 'dan bağımsız olarak dağılmakta; dolayısıyla pivot istatistik özelliği taşımaktadır [10]. Bu durumda, iki pivot istatistiğin toplamından oluşan  $\hat{m}ln(\hat{t}_p/t_p)$  değişkeni de pivot istatistik özelliği taşıyacaktır.

$$\hat{m}ln(\hat{t}_p/t_p) = \hat{m}ln(\hat{\sigma}_0/\sigma_0) + (1 - \hat{m}/m) ln(ln(1/1-p)) \quad (5)$$

Eşitlik (6)'da gösterildiği gibi  $t_p$ 'ye ait  $1 - \alpha$  güven düzeyindeki alt güven sınırı,  $l_{p,\alpha}$ , tahmini için önce  $\hat{m}ln(\hat{t}_p/t_p)$  rassal değişkeninin benzetim yoluyla  $C_\alpha$  yüzdeliği hesaplanır.

$$P[\hat{m}ln(\hat{t}_p/t_p) \leq c_\alpha] = P[\hat{t}_p exp(-c_\alpha/\hat{m}) \leq t_p] = 1 - \alpha \quad (6)$$

Ardından Eşitlik (7) ile  $l_{p,\alpha}$  tahmini yapılır.

$$l_{p,\alpha} = \hat{t}_p exp(-c_\alpha/\hat{m}) \quad (7)$$

Malzeme deneyleri genellikle pahalı ve uzun süren deneylerdir ve numune sayısı küçük tutulur. Örnek hacmi küçüldükçe alt güven sınırı  $l_{p,\alpha}$  değeri de küçülür ve giderek yüzdelik değeri  $t_p$ 'den uzaklaşır. Özellikle örnek hacmi  $n \leq 5$  gibi çok küçük örnek hacimlerinde bu uzaklaşma mühendislik uygulamaları için tatmin edici olmayacak düzeyde yüksek olabilmektedir [12]. Literatürde  $l_{p,\alpha}$  değerini tahmin edebilmek için birçok yöntem önerilmiştir; ancak, önerilen yöntemlerin küçük örneklemdeki performanslarının kapsamlı bir karşılaştırması bulunmamaktadır. Ayrıca, literatürde Weibull şekil ve ölçek parametrelerinin güven aralıkları için önerilen XonY-LS ve MN gibi bazı yöntemler için de  $\hat{m}ln(\hat{t}_p/t_p)$  değişkeninin pivot istatistik olduğu gösterilebilir; dolayısıyla, kesin  $l_{p,\alpha}$  tahminleri yapılabilir ve tahmin performansları incelenebilir. Literatürde görülen bu

açıklar doğrultusunda bu çalışmada, kesin  $l_{p,\alpha}$  tahmini için literatürde önerilen yöntemler ve ayrıca literatürde önerilmeyip bu çalışmada bu amaçla kullanılabilen gösterilen XonY-LS ve MN gibi yöntemler ele alınmıştır. A Temel ve B Temel malzeme özelliklerinin (sırasıyla  $l_{0.01;0.05}$  ve  $l_{0.10;0.05}$ ) tahminleri için küçük örneklem hacimleri ( $3 \leq n \leq 20$ ) ve farklı Weibull şekil parametre değerlerinde kapsamlı bir benzetim çalışması yürütülmüş ve sonuçlar analiz edilmiştir. Tek yanlı güven aralıklarının kıyaslanmasında önerilen temel istatistiksel kriter yanlış kapsama olasılığıdır [13]. Bu çalışmada kriter olarak ortalama yanlış kapsama olasılığı (OYKO) seçilmiştir. Benzetim çalışmasında Weibull şekil parametresi ( $m$ ) özellikle  $1 < m < 4$  skalasında detaylandırılmıştır; çünkü bu aralıktaki  $m$  değerlerinde, Weibull dağılımı sağa ya da sola çarpık veya yaklaşık simerik şekiller alır [14]. Yapılan detaylandırma bu değişikliklerin  $l_{p,\alpha}$  tahmin sonuçlarına nasıl yansıtacağı incelenmiştir.

## 2 Literatür araştırması

Malzeme bilimi literatüründe Weibull alt yüzdelikleri için kesin alt güven sınırı ( $l_{p,\alpha}$ ) üretilmesine yönelik birçok çalışma bulunmaktadır. Fernandez-Saez ve diğ. [10], bu sınırların ML ve en küçük kareler (LS) yöntemleriyle tahmini için pivot istatistik tabloları geliştirmişlerdir. Barbero ve diğ. [15], Weibull alt yüzdelikleri için ML ve ağırlıklı en küçük kareler (WLS) yöntemlerine özgü pivot istatistiklerin ortalama ve standart sapmalarını bulan bir benzetim çalışması yapmışlardır ve en küçük standart sapma kriterine göre bu yöntemleri kıyaslamışlardır. Barbero ve diğ. [16], benzetim çalışması ile ürettikleri bir eğri  $l_{p,\alpha}$  değerlerini hesaplamışlardır. Birgören ve Dirikolu [17], Weibull  $l_{p,\alpha}$  tahmininde ML yöntemine dayalı olarak kullanıcıya güven düzeyi, hata olasılığı ve benzetim tekrar sayısını kendi belirleme imkanı veren etkin bir benzetim aracı sunmuşlardır. Birgören [12],  $l_{p,\alpha}$  tahmininde en iyi yöntemin, en küçük yanlış kapsama olasılığına sahip tahmin yöntemi olduğunu vurgulayarak bazı LS, WLS ve ML yöntemlerini karşılaştıran bir benzetim çalışması yapmıştır ve en iyi yöntemin ML yöntemi olduğunu göstermiştir. Phan ve McCool [11], tamamlanmış veriler için Weibull yüzdeliklerinin Menon (MN) tahminlerindeki yanlışlığın düzeltilmesi ve kesin güven aralıklarının oluşturulması üzerine çalışmışlardır. McCool [18], MN yöntemi ile aynı boyuttaki tamamlanmış veri kümeleri için ortak şekil parametresinden hareketle herhangi bir örneklem için yüzdelik güven aralık tahminleri üzerine çalışmışlardır.

Bu çalışmaların yanı sıra literatürde Weibull parametrelerinin kesin güven aralığı tahmini için önerilen XonY-LS, kesin  $l_{p,\alpha}$  için de kullanılabilir [8]. Ayrıca, literatürde geliştirilen bazı özel regresyon tahminleyicileri hem XonY-LS hem de YonX-WLS modellerinde kesin  $l_{p,\alpha}$  tahminleri için kullanılmamıştır [19],[20]. Bunların ortak özelliği  $\hat{m}ln(\hat{t}_p/t_p)$  istatistiğinin pivot istatistik özelliği taşımasıdır. Bunlar gelecek bölümde ayrıntılı ele alınacaktır.

Kesin tahmin yöntemlerinin yanı sıra yaklaşık alt güven sınırları üretmeye yönelik çalışmalar da vardır. Heo ve diğ. [21], moment, olasılık ağırlıklı momentler ve ML yöntemleri ile 2 ve 3 parametrelili Weibull dağılımının yüzdelik güven aralık tahminleri üzerine bir benzetim çalışması yapmışlardır. Padgett ve Tomlinson [22], Bonferroni eşitsizliği ve 6 farklı parametrik bootstrap yöntemi kullanarak Weibull dağılım yüzdeliklerinin yaklaşık alt güven sınır tahminleri üzerine çalışmışlardır. Ho ve Silva [23], Weibull regresyon üzerinde

kuracakları güvenilirlik modeli için yüzdellikler ve arızaya kadar ortalama sürenin ML tahminleyicisinin yanlışlığını düzeltmek için bir bootstrap prosedürü sunmuşlardır. Yang ve diğ. [24], Weibull parametreleri, yüzdellikleri ve fonksiyonlarının yaklaşık güven aralık tahmini için pivot tablo kullanıma gerek duymayan genel bir yöntem geliştirmişlerdir. Hudak ve Tiryakioğlu [25], çalışmalarında Weibull yüzdellik tahminleri için geometrik interpolasyona dayalı farklı bir yöntem geliştirmişlerdir. Edward ve diğ. [9], küçük örneklem hacimlerinde bir malzemenin çekme dayanımı iç bağı için kritik alt yüzdelliklerinin tahmininde bootstrap yöntemlerinin kullanırlılığı üzerine çalışmışlardır. Lv ve diğ. [26], Weibull alt yüzdelliklerin tahmini için yüzdellik yeniden parametreleme modelini önermişlerdir.

Yukarıdaki istatistiksel yöntemlerden temelde farklılaşan Bayesyen çalışmalarda, Young ve diğ. [27], bir malzemenin çekme mukavemet dağılımına ait birinci yüzdellikleri, medyan sansürleme tekniği ile entegre Bayesyen (Bayesian) bir yöntemle yaklaşık olarak tahmin etmişlerdir. Yalçinkaya ve Birgören [28], seramik ve kompozit malzemelerde arıza hızının artan bir fonksiyon olduğu bilgisini kullanarak alt güven sınırlarının Bayesyen tahmin sonuçlarını klasik (frekansçı) yaklaşımlardan ML tahminleri ile karşılaştırmıştır.

Çalışmalar kullanılan performans kriterleri açısından değerlendirildiğinde;  $\hat{m} \ln(\hat{t}_p/t_p)$  pivot istatistiğinin standart sapması [15],[16], pivot istatistiğinin ortalaması [15],[16], bağıl pivot istatistiğinin medyanı [11],[18], pivot istatistiklerin aralık uzunluğu [11], güven aralığının standart sapması [22], gerçek kapsama olasılığı [22], yanlış kapsama olasılığı [12], karesel ortalama yanlışlık (RMSB) [21], karesel ortalama hata (RMSE) [21],[23] gibi farklı kriterler kullanıldığı görülmektedir. Çalışmalara örneklem hacmi açısından bakıldığında ise bazı çalışmalarda örneklem hacminin 5 veya 6'ya kadar inildiği görülmektedir [12],[15],[18]; fakat bu çalışmalar oldukça kısıtlıdır ve genellikle 10 ve üzeri örneklem hacimleriyle çalışılmıştır [11],[21],[23],[25].

Tüm bu karşılaştırma koşullarında yöntemler, değişen örneklem hacimlerine ve kritere göre farklı performanslar sergilemiştir. Örneğin ML ile WLS karşılaştırmasında pivot istatistiğinin standart sapması ve ortalaması kriterine göre  $n < 7$  için Bergman ağırlık faktörlü WLS yönteminin [15]; moment, olasılık ağırlıklı momentler ve ML karşılaştırmasında RMSB ve bağıl RMSE kriterine göre  $m > 2$  için ML yönteminin [21]; WLS ve ML karşılaştırmasında yanlış kapsama olasılığı kriterine göre ML yönteminin [12]; bootstrap prosedürü ile ML karşılaştırmasında RMSE kriterine göre bootstrap prosedürünün [23]; MN ile ML karşılaştırmasında ise bağıl pivot istatistiğinin medyan kriterine göre MN yönteminin  $p < 0.4$  ve  $p > 0.7$  için daha iyi olduğu gösterilmiştir [11].

Bundan sonra gelen bölümlerde sırasıyla kesin  $l_{p,a}$  tahmininde kullanılacak yöntemler tanıtılmakta, performans kriteri olarak önerilen ortalama yanlış kapsama olasılığı açıklanmakta, yöntemlerin performans analizi için yürütülen benzetim çalışması hakkında bilgi verilmekte ve benzetimden elde edilen tahmin sonuçları değerlendirilmektedir. Sonuç bölümünde ise genel bir değerlendirme sunulmuştur.

### 3 Weibull alt yüzdellikleri alt sınır tahmininde kullanılan tahmin yöntemleri

#### 3.1 Maksimum benzerlik yöntemi

ML yöntemi, bir örneklemi oluşturan  $T_1, T_2, \dots, T_n$  rassal değişkenlerin olabilirlik fonksiyonunu,  $L(\theta)$ , en yüksek yapan anakütle parametresi,  $\theta$ 'yu bulmaya çalışır [14]. ML yönteminde Weibull dağılımının  $\hat{m}$  ve  $\hat{\sigma}_0$  değerleri, olabilirlik fonksiyonunun  $m$  ve  $\sigma_0$ 'ya göre birinci türevlerini sıfır yapan noktalara karşılık gelir;  $p$  hata olasılığına karşılık gelen  $\hat{t}_p$  değeri ise  $\hat{m}$  ve  $\hat{\sigma}_0$  değerleri üzerinden Eşitlik (4) kullanılarak hesaplanır. Weibull alt yüzdellik alt sınır  $l_{p,a}$  değeri ise,  $\hat{m} \ln(\hat{t}_p/t_p)$  rassal değişkeninin benzetimle elde edilen  $c_\alpha$  yüzdeliğinin hesaplanmasından sonra Eşitlik (7) ile bulunur [10].

#### 3.2 Ağırlıklı YonX ve ağırlıksız XonY en küçük kareler yöntemleri

$F(t) = 1 - \exp[-(t/\sigma_0)^m]$ , birikimli iki parametrelili Weibull dağılım fonksiyonunun logaritmik dönüşümü ile elde edilen Eşitlik (8),  $Y = aX + b$  biçiminde bir lineer regresyon denklemidir.

$$Y = \ln \left\{ \ln \left[ \frac{1}{(1 - F(t))} \right] \right\} = m \ln t - m \ln \sigma_0 \quad (8)$$
$$, a = m, \ln t = x, m \ln \sigma_0 = b$$

Tablo 1'de verilen  $F(t_i)$  tahminleyicilerinden biri ve Tablo 2'de verilen ağırlık faktörlerinden biri kullanıldığında  $m$  ve  $\sigma_0$ 'ın WLS tahminleyicileri sırasıyla Eşitlik (9) ve (10) çözümlenmesiyle bulunur [10].

$$\hat{m} = \frac{A - (\sum W(t_i)x_{(i)})(\sum W(t_i)y_{(i)})}{(\sum W(t_i))(\sum W(t_i)x_{(i)}^2) - (\sum W(t_i)x_{(i)})^2} \quad (9)$$

$$A = (\sum W(t_i)) (\sum W(t_i)x_{(i)}y_{(i)})$$

$$\hat{\sigma}_0 = \exp \left( \frac{-b}{\hat{m}} \right) \quad (10)$$

Parametre tahminlerinden sonra WLS'nin  $l_{p,a}$  tahminleyicisi, ML yönteminde olduğu gibi  $\hat{m} \ln(\hat{t}_p/t_p)$  benzetimi ile bulunan  $C_\alpha$  yüzdellik değerinin Eşitlik (7)'te kullanılması ile hesaplanır [8].

Bu çalışmada kullanılan  $F(t)$  tahminleyicileri, literatürde yaygınlıkla kullanılan ortalama (Eşitlik (11)), ortanca (Eşitlik (12)) ve hazen (Eşitlik (13)), ile yakın geçmişte geliştirilen ve örneklem hacmine ( $n$ ) göre Eşitlik (14) ve (15)'deki  $e$  ve  $f$  değerlerinin değişkenlik gösterdiği Değişken-1 (Eşitlik (14)) [19] ve Değişken-2 (Eşitlik (15)) [20] adlı tahminleyicilerdir. Ortalama tahminleyici, Weibull [1] tarafından yüksek hacimli sağa çarpık verilerde  $F(t_i) = i/n$  tahminleyicinin iyi çalışmamasına karşılık geliştirilmiştir [14]. Hazen tahminleyici,  $F(t_i)$ 'nin  $i / (n - 1)$  ile  $i/n$  arasında bir yerde olduğunu belirtir [14] ve  $n > 20$  hacimlerde Weibull parametrelerinin nokta tahminleri için en az yanlış tahmin sonuçları üretir [29],[30]. Ortanca tahminleyici ise genel olarak en yanlışsız tahminleyici olarak nitelendirilir [31].

Tablo 1:  $F(\sigma)$  için kullanılan tahminleyiciler.

Tahminleyici Tanımı	Tahminleyici Denklemi
Ortalama	$\hat{F}(t_i) = i/(n + 1)$ (11)
Ortanca	$\hat{F}(t_i) = (i - 0.3)/(n + 0.4)$ (12)
Hazen	$\hat{F}(t_i) = (i - 0.5)/n$ (13)
Değişken-1 [19]	$\hat{F}(t_i) = (i - e)/(n + f)$ (14)
Değişken-2 [20]	$\hat{F}(t_i) = (i - e)/(n + f)$ (15)

Literatürde, Tablo 1’de verilen tahminleyicilerin bazıları için kesin  $l_{p;a}$  tahmin çalışması bulunmamaktadır. Bu tahminleyiciler, YonX-WLS için Eşitlik (14) ve (15), XonY-LS için Tablo 1’deki tüm tahminleyicilerdir [8],[17]. Ayrıca ortalama, hazen veya ortanca tahminleyicilerini kullanan YonX-WLS ile yapılan kesin  $l_{p;a}$  tahminlerinde ele alınan en küçük örneklem hacmi 5’tir; 3’e kadar inilmemiştir [15].

Tablo 2: Ağırlık faktörleri.

Ağırlık Faktörü	Ağırlık Faktörleri Denklemi
AF-1	$W(t_i) = 1$ (16)
AF-2	$W(t_i) = 3.3 F(t_i) - 27.5 \left[ 1 - (1 - F(t_i))^{0.025} \right]$ (17)
AF-3	$W(t_i) = \left[ (1 - F(t_i)) \ln(1 - F(t_i)) \right]^2$ (18)
AF-4	$W(t_i) = \frac{\left[ (1 - F(t_i)) \ln(1 - F(t_i)) \right]^2}{\sum \left[ (1 - F(t_i)) \ln(1 - F(t_i)) \right]^2}$ (19)

Tablo 2’de ağırlık faktörleri verilmiştir. Tüm ağırlıkların eşit, diğer deyişle ağırlıksız olması (Eşitlik (16)), AF1 ile; Faucher&Tyson ağırlık faktörü (Eşitlik (17)), AF2 ile; Bergman ağırlık faktörü (Eşitlik (18)), AF3 ile son olarak Hung ağırlık faktörü (Eşitlik (19)), AF4 ile ifade edilmiştir.

### 3.3 Ağırlıklı YonX en küçük kareler modeli (YonX-WLS)

Geleneksel YonX-WLS modelinde  $Y = aX + b$  olmak üzere  $\hat{m} = a$ ;  $\hat{\sigma}_0 = \exp\left(\frac{-b}{a}\right)$ ;  $\hat{t}_p = \hat{\sigma}_0 [ln(1/(1-p))]^{1/\hat{m}}$  dir. Tablo 3’te gösterildiği gibi, YonX-WLS yöntemi için 5 farklı tahminleyici ve 4 farklı ağırlık faktörü ile 20 farklı kombinasyonda YonX-WLS yöntem modeli kurulmuştur.

Tablo 3: YonX-WLS kombinasyonları.

Tür	Kodu	Tahminleyici	Ağırlık
YonX	YonXMnA1	Ortalama	AF-1
YonX	YonXMnA2	Ortalama	AF-2
YonX	YonXMnA3	Ortalama	AF-3
YonX	YonXMnA4	Ortalama	AF-4
YonX	YonXMdA1	Ortanca	AF-1
YonX	YonXMdA2	Ortanca	AF-2
YonX	YonXMdA3	Ortanca	AF-3
YonX	YonXMdA4	Ortanca	AF-4
YonX	YonXHnA1	Hazen	AF-1
YonX	YonXHnA2	Hazen	AF-2
YonX	YonXHnA3	Hazen	AF-3
YonX	YonXHnA4	Hazen	AF-4
YonX	YonXV1A1*	Değ.-1	AF-1
YonX	YonXV1A2*	Değ.-1	AF-2
YonX	YonXV1A3*	Değ.-1	AF-3
YonX	YonXV1A4*	Değ.-1	AF-4
YonX	YonXV2A1*	Değ.-2	AF-1
YonX	YonXV2A2*	Değ.-2	AF-2
YonX	YonXV2A3*	Değ.-2	AF-3
YonX	YonXV2A4*	Değ.-2	AF-4

Tablo 3’te  $l_{p;a}$  performası ilk kez bu çalışmada değerlendirilen yöntemler “\*” ile gösterilmiştir. Tablo 3’teki kombinasyonlardan literatürde en çok kullanılanı ortalama tahminleyicili (Eşitlik (11)) YonX-LS modelidir [32]. Bununla birlikte, YonX-LS ve XonY-LS modelleri, MN ve ML yöntemleri ile yapılan Weibull parametrelerinin tahmini çalışmasında, güven aralık uzunluğu ve gerçek kapsama olasılık kriterine göre  $10 < n < 30$  örneklem hacimlerinde medyan tahminleyicili YonX-LS önerilmiştir [8]. Bu çalışmada ise ortalama yanlış kapsama olasılığı (OYKO) kriterine göre hangi kombinasyondaki YonX yönteminin, özellikle  $n=3$ , 4 gibi küçük örneklemelerde, daha etkin olacağı araştırılacaktır.

### 3.4 Ağırlıksız XonY en küçük kareler modeli (XonY-LS)

Gelenekselden farklı olarak eksenleri değiştirilmiş olan XonY-LS yönteminde  $X = cY + d$  olmak üzere  $\hat{m} = 1/c$ ,  $\hat{\sigma}_0 = \exp(d)$  ve  $\hat{t}_p = \hat{\sigma}_0 [ln(1/(1-p))]^{1/\hat{m}}$  dir. Tablo 2’de verilen X’e bağlı olarak hesaplanmış ağırlık fonksiyonlarının XonY-LS’de kullanılabilirliğine dair literatürde herhangi bir bilgiye ulaşılmadığından XonY-LS yöntemi için herhangi bir ağırlık faktörü kullanılmamıştır.

Tablo 4’te gösterildiği gibi, 5 farklı tahminleyici ve  $W(\sigma_{(i)}) = 1$  ağırlık faktörü ile 5 farklı kombinasyonda XonY-LS yöntem modeli kurulmuştur. Ele alınan kombinasyonlardan tahminlerde genellikle medyan tahminleyicili XonY-LS modeli tercih edilir [31]. YonX-LS ve XonY-LS modelleri, MN ve ML yöntemleri ile yapılan Weibull parametrelerinin tahmini çalışmasında ortalama tahminleyicili XonY-LS yöntemi,  $n \leq 10$  için yanlışlık ve gerçek kapsama olasılığı kriterine daha iyi sonuçlar vermiştir. Bununla birlikte,  $n \geq 30$  için metodların çoğu eş değer düzeyde iyi performans sergilese de medyan tahminleyicili XonY-LS modeli diğerlerine nazaran daha küçük yanlışlıkta  $m$  tahmini yapabilmıştır [8]. XonY-LS yönteminde konuların çizilmesinden kaynaklanan yanlışlıklar literatürde tartışılmaktadır; bakınız [14]. Tablo 4’teki yöntemlerin hiçbirinin literatürde  $l_{p;a}$  tahmin performansı değerlendirilmemiştir.

Tablo 4: XonY-LS kombinasyonları.

Tür	Kodu	Tahminleyici	Ağırlık
XonY	XonYMnA1*	Ortalama	AF-1
XonY	XonYMdA1*	Ortanca	AF-1
XonY	XonYHnA1*	Hazen	AF-1
XonY	XonYV1A1*	Değ.-1	AF-1
XonY	XonYV2A1*	Değ.-2	AF-1

\*  $l_{p;a}$  performası ilk kez bu çalışmada değerlendirilen yöntemler.

### 3.5 Menon yöntemi

Menon (MN) yönteminde iki parametrelili Weibull değişkeni  $T$ , logaritmik fonksiyonla ölçek ( $\xi$ ) ve lokasyon ( $\delta$ ) parametrelili Gumbel dağılımı takip eden  $Z = \ln(T)$  rastgele değişkenine dönüştürülür. Gumbel dağılımı için Eşitlik (20)’de ve Weibull dağılımı için Eşitlik (2)’de verilen birikimli dağılım fonksiyonları ile  $m = 1/\xi$  ve  $\sigma_0 = \exp(\delta)$  bağlantı denklemleri elde edilir [33].

$$F(z) = 1 - \exp(-e^{(z-\delta)/\xi}) \quad (20)$$

Weibull alt yüzdeliklerinin Menon yöntemi ile tahmininde öncelikle Gumbel dağılımı takip eden  $Z = \ln(T)$  için ölçek ( $\xi$ ) ve lokasyon ( $\delta$ ) parametrelerinin tahmin edilmesi gerekir. Bunun için momentler yöntemi kapsamında Eşitlik (21) ve (22) kullanılarak  $\hat{\xi}$  ve  $\hat{\delta}$  tahmini değerleri hesaplanır [33].

$$\xi = (\sqrt{6}/\pi)s_z = 0.7797s_z \quad (21)$$

$$\delta = \gamma\xi + E(z) \quad (22)$$

Eşitlik (21)'de verilen  $s_z$ ,  $Z$ 'lerin standart sapmasını; Eşitlik (22)'de verilen  $\gamma$ , Euler sabitini ( $\gamma=0.57721$ ) ve  $E(z)$  ise  $Z$ 'lerin beklenen değerini ifade etmektedir.  $\bar{z}$ ,  $Z$ 'lerin ortalaması olmak üzere beklenen değer  $E(Z)$ , Eşitlik (23) ile bulunur [33].

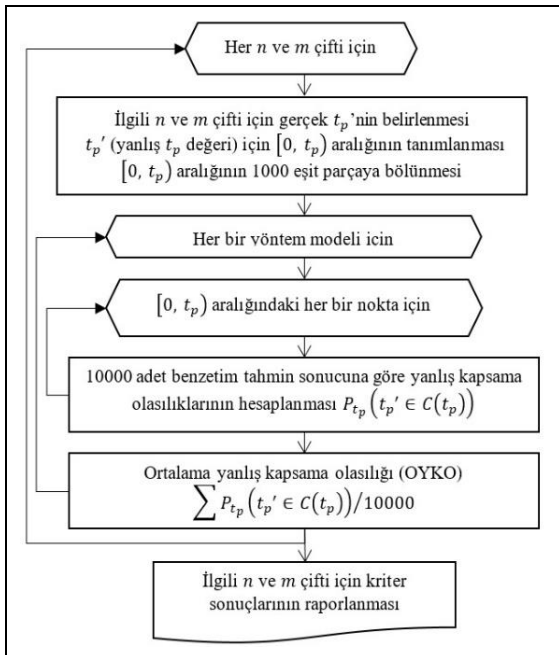
$$E(z) = \bar{z} - 0.4501 * s_z \quad (23)$$

$\xi$  ve  $\delta$  tahminleri sonrası bu değerlerin  $\hat{m} = 1/\xi$  ve  $\hat{\sigma}_0 = \exp(\delta)$  eşitliklerinde kullanılması ile Weibull dağılımına ait ölçek ( $\sigma_0$ ) ve şekil ( $m$ ) parametreleri tahmin edilir.  $l_{p,a}$  tahminleyicisi ise,  $\hat{m} \ln(\hat{t}_p/t_p)$ 'nin benzetimi ile elde edilen  $C_\alpha$  yüzdelik değerinin Eşitlik (7)'de kullanılması ile hesaplanır [11].

Literatürde, MN yöntemi ile yapılmış bir adet kesin  $l_{p,a}$  tahmin çalışması mevcuttur [11]; ancak, bu çalışmanın benzetim kısmında, veri dağılım yapısına şeklini veren  $m$  için bir detaylandırma ve inceleme söz konusu değildir. Ayrıca, tahminlerde kullandıkları örneklem hacmi en az 5'tir, istatistiksel açıdan yeterli görülen  $n=3$ 'e kadar indirilmemiştir. MN yöntemi bu çalışmaya,  $3 \leq n \leq 20$  örneklem hacminde ve farklı  $m$ 'lerde tahmin performansı incelenmek üzere dahil edilmiştir.

### 3.6 Karşılaştırma performans kriteri : ortalama yanlış kapsama olasılığı

Çift taraflı güven aralığı çalışmalarında genellikle, aralık uzunluğu bir performans kriteri olarak kullanılmaktadır. Ancak, bu çalışmada tek taraflı bir güven aralığının alt sınırı tahmin edilmektedir. Tek taraflı güven aralığı çalışmalarında genellikle yanlış kapsama olasılıklarının kullanılması önerilmektedir [34]. Bu çalışmada yöntemler, hesaplama adımları Şekil 1'de gösterilen ortalama yanlış kapsama olasılığı kriteri (OYKO) ile karşılaştırılmıştır.



Şekil 1: Ortalama yanlış kapsama olasılığı (OYKO) kriteri için hesaplama işlem akışı.

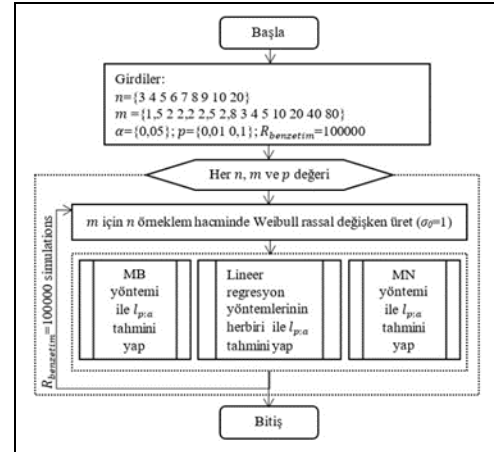
Bir  $t_p$  parametresinin tek taraflı aralık tahmini  $C(t_p) = [l_{p,a}, \infty]$  ile gösterilsin.  $C(t_p)$ 'in yanlış kapsama olasılığı hem  $t_p$  (gerçek  $t_p$  değeri) hem de  $t_p'$ 'nin (yanlış  $t_p$  değerinin) bir fonksiyonu olarak Eşitlik (24)'deki gibi tanımlanır [13]. OYKO kriteri ise  $[0, t_p]$  aralığında tanımlı her bir  $t_p'$ 'nin yanlış kapsama olasılıklarının ortalaması ile hesaplanır.

$$P_{t_p}(t_p' \in C(t_p), t_p' < t_p) \text{ eğer } C(t_p) = [l_{p,a}, \infty] \quad (24)$$

Kriterde amaç, tahmini güven aralıklarının yanlış değerleri kapsama olasılıklarını ölçmektir. Dolayısıyla kritere göre en iyi yöntem, en küçük ortalamayı veren yöntem olacaktır. Ayrıca şunu da belirtmek gerekir ki; bir tahmini aralığın küçük bir yanlış kapsama olasılığına sahip olması demek o aralık genişliğinin az yanlış değer içerecek kadar dar bir boyutta olması anlamına gelmektedir [13].

## 4 Benzetim çalışması ve sonuçları

Tahmin yöntemlerin  $l_{p,a}$  tahmin performanslarını kapsamlı bir şekilde inceleyip analiz etmek için 100,000 tekrar kullanan bir Monte Carlo benzetimi yapılmıştır. Benzetimde kullanılacak girdiler ve yöntemler, prosedür akışı içerisinde Şekil 2'de özetlenmiştir.



Şekil 2: Benzetim prosedür akışı.

Örneklem hacmi ve şekil parametresine göre değişen ortalama yanlış kapsama olasılıkları (OYKO'lar) A temel malzeme özelliği ( $I_{0,01;0,05}$ ) için Tablo 5'te; B temel malzeme özelliği ( $I_{0,10;0,05}$ ) için ise Tablo 6'da özetlenmiştir. Tablo 5 ve 6'da, tablo büyüklüğünü kısıtlamak amacıyla ML, MN ile birlikte en küçük OYKO değerine sahip 2 tane en küçük kareler modeli listelenmiştir; yöntemlerin performansları her  $n$  ve  $m$  için değişiklik gösterdiğinden her satırda ikiden fazla en küçük kareler modeli bulunmaktadır. Tablo 5 ve 6'da her  $n$  ve  $m$  için en küçük OYKO değeri veren yöntem ve aldığı değer koyu renkle işaretlenmiştir. Tablo 5 ve 6'da gösterildiği gibi, A ve B temel malzeme özelliği için sırasıyla  $n \leq 7$  ve  $n \leq 9$  olduğunda, ML yöntemi ile YonX-WLS modellerinin performans üstünlükleri  $n$  ve  $m$ 'nin farklı değerlerine göre yer yer değişmektedir. Performanstaki bu değişimler, özellikle küçük örneklemelerin yüksek  $m$  değerleri için 0.001 gibi oldukça küçük OYKO farkları ile gerçekleşmektedir. Örneklem hacminin artması ( $n > 7$ ) ile ML yöntemi, beklenildiği gibi, diğer tahmin yöntemlere göre daha iyi performans sergilemeye başlamıştır. Genel olarak, yöntemlere ait OYKO farkları,  $n$  değeri arttıkça ve  $m$  değeri azaldıkça artmaktadır; tersi durumda da azalmaktadır.

Tablo 5: A temel malzeme özelliği ( $l_{0.01;0.05}$ ) için OYKO sonuçları.

$l_{0.10;0.05}$		Weibull şekil parametresi $m$											
n	method	1.5	2	2.2	2.5	2.8	3	4	5	10	20	40	80
3	ML	0.907	0.890	0.884	0.874	0.865	0.854	0.820	0.787	0.639	0.451	0.281	0.160
	MN	0.911	0.895	0.890	0.879	0.871	0.860	0.828	0.795	0.650	0.464	0.292	0.167
	YonXMdA4	0.909	0.892	0.886	0.875	0.867	0.856	0.823	0.790	0.643	0.456	0.285	0.163
	YonXV2A3	0.907	0.890	0.884	0.873	0.865	0.854	0.820	0.787	0.639	0.452	0.282	0.161
4	ML	0.887	0.862	0.850	0.834	0.816	0.806	0.752	0.702	0.518	0.332	0.192	0.104
	MN	0.887	0.862	0.850	0.834	0.817	0.807	0.754	0.705	0.524	0.339	0.197	0.108
	YonXMdA3	0.886	0.860	0.848	0.832	0.814	0.805	0.751	0.701	0.518	0.334	0.193	0.105
	YonXMnA1	0.885	0.860	0.848	0.832	0.814	0.804	0.751	0.702	0.520	0.337	0.196	0.107
	YonXV2A2	0.885	0.860	0.847	0.831	0.813	0.803	0.749	0.699	0.515	0.331	0.191	0.104
5	ML	0.865	0.827	0.812	0.791	0.770	0.755	0.690	0.632	0.437	0.265	0.148	0.079
	MN	0.866	0.829	0.814	0.794	0.773	0.759	0.696	0.639	0.448	0.276	0.156	0.083
	YonXHnA2	0.865	0.828	0.812	0.791	0.770	0.756	0.691	0.634	0.439	0.268	0.150	0.080
	YonXMnA1	0.864	0.827	0.812	0.792	0.771	0.756	0.693	0.636	0.445	0.274	0.155	0.083
	YonXV1A1	0.864	0.826	0.811	0.790	0.769	0.754	0.690	0.633	0.440	0.270	0.152	0.081
6	ML	0.843	0.799	0.780	0.755	0.731	0.714	0.641	0.578	0.384	0.227	0.124	0.065
	MN	0.846	0.803	0.784	0.760	0.737	0.722	0.651	0.590	0.398	0.239	0.132	0.070
	YonXMdA2	0.841	0.797	0.778	0.753	0.728	0.712	0.639	0.577	0.384	0.227	0.124	0.065
	YonXV2A2	0.842	0.798	0.779	0.754	0.729	0.713	0.640	0.578	0.384	0.228	0.124	0.065
7	ML	0.823	0.773	0.753	0.724	0.697	0.679	0.601	0.537	0.347	0.200	0.108	0.057
	MN	0.825	0.778	0.759	0.731	0.704	0.687	0.613	0.550	0.362	0.212	0.116	0.061
	YonXHnA2	0.821	0.771	0.751	0.722	0.696	0.677	0.600	0.536	0.347	0.200	0.109	0.057
	YonXMdA2	0.820	0.770	0.750	0.721	0.694	0.676	0.599	0.535	0.346	0.200	0.109	0.057
8	ML	0.806	0.747	0.726	0.695	0.665	0.648	0.566	0.501	0.315	0.179	0.096	0.050
	MN	0.812	0.756	0.737	0.707	0.680	0.663	0.585	0.522	0.335	0.193	0.105	0.055
	YonXMnA2	0.806	0.747	0.727	0.695	0.667	0.649	0.568	0.504	0.319	0.182	0.098	0.051
	YonXV2A2	0.805	0.746	0.726	0.695	0.667	0.649	0.569	0.505	0.320	0.183	0.098	0.051
9	ML	0.787	0.724	0.701	0.669	0.639	0.618	0.537	0.471	0.291	0.164	0.087	0.045
	MN	0.794	0.736	0.714	0.684	0.655	0.635	0.556	0.492	0.311	0.178	0.095	0.050
	YonXMdA2	0.787	0.725	0.702	0.670	0.640	0.619	0.539	0.473	0.293	0.166	0.088	0.046
	YonXMnA2	0.788	0.725	0.703	0.671	0.641	0.620	0.540	0.474	0.294	0.166	0.089	0.046
10	ML	0.770	0.705	0.681	0.646	0.615	0.594	0.512	0.447	0.272	0.152	0.080	0.042
	MN	0.781	0.720	0.699	0.666	0.635	0.615	0.537	0.472	0.294	0.166	0.089	0.046
	YonXHnA2	0.768	0.703	0.680	0.645	0.614	0.593	0.511	0.446	0.272	0.152	0.081	0.042
	YonXMnA2	0.768	0.703	0.680	0.645	0.614	0.593	0.512	0.447	0.273	0.153	0.081	0.042
	YonXV2A2	0.768	0.704	0.680	0.645	0.614	0.593	0.512	0.447	0.273	0.152	0.081	0.042
20	ML	0.645	0.560	0.532	0.496	0.463	0.443	0.364	0.308	0.174	0.094	0.048	0.025
	MN	0.683	0.602	0.575	0.540	0.507	0.487	0.406	0.347	0.201	0.109	0.057	0.029
	YonXMnA2	0.653	0.569	0.541	0.505	0.472	0.452	0.373	0.316	0.179	0.096	0.050	0.026
	YonXV1A2	0.653	0.569	0.541	0.505	0.472	0.452	0.372	0.315	0.179	0.096	0.050	0.026

Tablo 6: B temel malzeme özelliği ( $l_{0.1;0.05}$ ) için OYKO sonuçları.

$l_{0.10;0.05}$		Weibull şekil parametresi $m$											
n	method	1.5	2	2.2	2.5	2.8	3	4	5	10	20	40	80
3	ML	0.851	0.815	0.801	0.779	0.761	0.743	0.682	0.627	0.442	0.274	0.155	0.083
	MN	0.862	0.827	0.814	0.793	0.776	0.758	0.699	0.646	0.461	0.289	0.165	0.089
	YonXMdA3	0.858	0.823	0.809	0.789	0.771	0.753	0.693	0.639	0.455	0.284	0.161	0.087
	YonXV2A2	0.858	0.822	0.809	0.788	0.770	0.752	0.692	0.638	0.453	0.283	0.161	0.086
4	ML	0.809	0.757	0.736	0.708	0.679	0.663	0.585	0.522	0.337	0.196	0.106	0.056
	MN	0.808	0.757	0.736	0.707	0.679	0.663	0.586	0.525	0.341	0.199	0.109	0.057
	YonXHnA1	0.808	0.757	0.736	0.708	0.680	0.663	0.586	0.525	0.340	0.199	0.108	0.057
	YonXV2A1	0.808	0.757	0.737	0.708	0.680	0.664	0.587	0.526	0.342	0.200	0.109	0.057
	YonXV2A2	0.809	0.757	0.736	0.708	0.679	0.663	0.585	0.523	0.338	0.197	0.107	0.056

Tablo 7'nin devamı.

$l_{0.10;0.05}$		Weibull şekil parametresi $m$											
n	method	1.5	2	2.2	2.5	2.8	3	4	5	10	20	40	80
5	ML	0.766	0.700	0.676	0.643	0.613	0.593	0.512	0.449	0.275	0.154	0.082	0.043
	MN	0.773	0.709	0.685	0.654	0.624	0.605	0.525	0.462	0.287	0.163	0.087	0.045
	YonXMnA2	0.766	0.701	0.676	0.644	0.613	0.594	0.513	0.450	0.277	0.156	0.083	0.043
	YonXMnA3	0.767	0.703	0.678	0.646	0.616	0.596	0.515	0.452	0.279	0.157	0.084	0.043
	YonXV2A1	0.765	0.701	0.677	0.645	0.615	0.596	0.516	0.453	0.281	0.158	0.085	0.044
6	ML	0.729	0.658	0.630	0.595	0.564	0.543	0.461	0.399	0.238	0.131	0.069	0.036
	MN	0.738	0.669	0.641	0.608	0.577	0.557	0.477	0.415	0.250	0.139	0.074	0.038
	YonXMdA2	0.727	0.655	0.628	0.593	0.562	0.542	0.460	0.399	0.238	0.132	0.069	0.036
	YonXMnA4	0.728	0.657	0.630	0.595	0.564	0.544	0.462	0.401	0.240	0.132	0.070	0.036
7	ML	0.695	0.620	0.592	0.555	0.523	0.502	0.422	0.362	0.212	0.115	0.060	0.031
	MN	0.706	0.633	0.608	0.571	0.539	0.519	0.438	0.378	0.225	0.123	0.065	0.033
	YonXMdA2	0.696	0.621	0.594	0.557	0.524	0.504	0.423	0.364	0.214	0.116	0.061	0.031
	YonXMnA2	0.694	0.619	0.592	0.555	0.523	0.503	0.422	0.363	0.213	0.116	0.061	0.031
8	ML	0.662	0.581	0.554	0.517	0.484	0.466	0.386	0.329	0.189	0.102	0.053	0.027
	MN	0.680	0.600	0.575	0.538	0.506	0.488	0.407	0.350	0.204	0.111	0.058	0.030
	YonXMdA2	0.669	0.588	0.562	0.524	0.492	0.473	0.393	0.336	0.193	0.104	0.055	0.028
	YonXMnA2	0.668	0.586	0.560	0.523	0.491	0.472	0.392	0.335	0.193	0.104	0.054	0.028
9	ML	0.642	0.560	0.532	0.495	0.463	0.442	0.366	0.309	0.176	0.094	0.049	0.025
	MN	0.656	0.576	0.549	0.513	0.481	0.460	0.383	0.326	0.188	0.102	0.053	0.027
	YonXMdA2	0.643	0.561	0.533	0.497	0.464	0.443	0.367	0.311	0.177	0.095	0.049	0.025
	YonXMnA2	0.639	0.558	0.530	0.494	0.462	0.441	0.365	0.309	0.176	0.095	0.049	0.025
10	ML	0.618	0.535	0.508	0.471	0.438	0.418	0.343	0.290	0.163	0.087	0.045	0.023
	MN	0.642	0.561	0.535	0.498	0.465	0.444	0.369	0.313	0.179	0.096	0.050	0.026
	YonXHnA2	0.620	0.537	0.510	0.472	0.440	0.420	0.345	0.291	0.164	0.088	0.045	0.023
	YonXMdA2	0.618	0.535	0.508	0.471	0.438	0.419	0.344	0.290	0.164	0.087	0.045	0.023
20	ML	0.477	0.394	0.369	0.337	0.309	0.293	0.233	0.193	0.104	0.054	0.028	0.014
	MN	0.512	0.428	0.402	0.369	0.340	0.323	0.259	0.215	0.117	0.062	0.032	0.016
	YonXMdA2	0.479	0.397	0.371	0.339	0.312	0.295	0.235	0.194	0.105	0.055	0.028	0.014
	YonXMnA2	0.480	0.397	0.371	0.339	0.312	0.296	0.235	0.194	0.105	0.055	0.028	0.014

Tablo 5 ve 6'daki OYKO sonuçları özellikle küçük örneklem hacimleri ile yüksek  $m$ 'lerde 3 ondalık hassasiyete göre birbirine oldukça yakın olduğundan koyu renkle gösterilen bir yöntemin en iyi olduğunu iddia edebilmek için benzetim hatasının düşük olduğunu göstermek gereklidir. Diğer bir deyişle bir 100,000 tekrarda en iyi olan yöntem, ikinci bir 100,000 tekrarda 0.001 gibi küçük farklarla performans sıralamasında gerilere düşebilir. Bu amaçla, her yöntem için az sayıda örneklem hacim ( $n=3, 6, 20$ ) ve şekil parametre ( $m=1.5, 3, 10, 80$ ) kombinasyonunda 100,000 tekrarlı benzetim çalışmalarının herbiri 15 kez tekrarlanmıştır. Böylece, her bir yöntem için bu kombinasyonlarda  $l_{0.01;0.05}$  ve  $l_{0.10;0.05}$ 'lere ait 15'er adet OYKO sonucu elde edilmiş,  $\hat{\mu}_{OYKO} \pm 2\hat{\sigma}_{OYKO}$  aralıkları oluşturulmuştur [13]. Ardından  $n$  ve  $m$  bazında her bir yöntemin OYKO aralıklarının birbirleri ile kesişme durumları incelenmiş; kesişmemeleri durumlarında yöntemlerin performansları arasında anlamlı bir fark olduğu; aksi durumda da farkın önemsiz olduğu vurgulanmıştır.  $l_{0.01;0.05}$  ve  $l_{0.10;0.05}$  için bu aralıklar ekler bölümünde sırasıyla Tablo Ek A.1 ve Tablo Ek B.1'de detaylı olarak listelenmiştir.

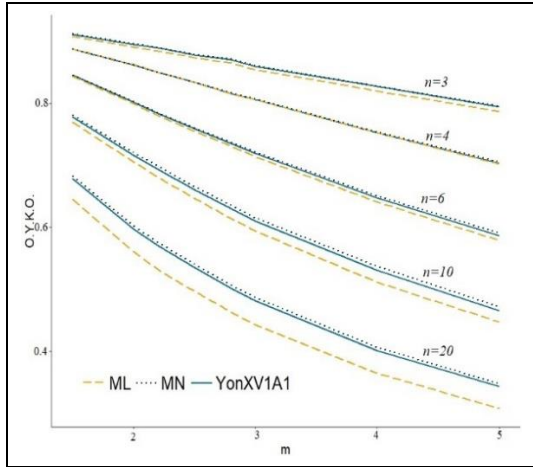
Tablo Ek A.1'de görüldüğü gibi  $n=3$  ve  $m=1.5$  olduğunda, 27 yöntemin hepsi (ML, MN, 20 YonX-WLS ve 5 XonY-LS) için OYKO aralıkları birbirileri tamamen veya kısmen kesişmektedir. Bu şunu ifade eder ki; 27 yöntemden herhangi biri ile alınabilecek bir OYKO performansının, diğer 26 yöntemle de alınması olası olacaktır.  $n=3$ 'de  $m$  değeri arttıkça veya artan  $n$ 'lerde YonXV1A2, YonXV1A3 ve YonXV1A4

yöntemleri diğer 24 yöntemle nazaran daha yüksek OYKO aralığında  $l_{0.01;0.05}$  tahminleri yapmakta ve performans olarak diğer 24 yöntemin gerisinde durmaktadır. Ancak, YonXV1A2 yöntemi  $n$  arttıkça MLE'den daha iyi sonuç vermese de hem XonY-LS hem de Faucher&Tyson ağırlık faktörlüleri haricindeki diğer YonX-WLS yöntemlerinden daha iyi sonuçlar vermeye başlamaktadır. YonX-WLS yöntemleri arasında en iyi performans gösteren yöntem, Faucher&Tyson ağırlık faktörü içerenlerdir; özellikle YonXV2A2 yöntemi  $n \geq 6$  için diğer YonX-WLS ve XonY-LS yöntemlerinden anlamlı ölçüde daha iyi  $l_{0.01;0.05}$  tahmini yapmaktadır. Ayrıca, Tablo 5'te gösterildiği gibi  $n \geq 6$ 'da YonXV2A2 yöntemi, her zaman Faucher&Tyson ağırlıklı hariç diğer YonX-WLS ve XonY-LS yöntemlerinden daha iyi sonuçlar vermiştir. XonY-LS yöntemi  $n \geq 3$  için ağırlık içermeyen YonX-WLS yöntemleri haricinde diğer yöntemlere nazaran yüksek OYKO'larda tahmin yapmaktadır. Ağırlık içermeyen YonX-WLS ve MN yöntemleri ise  $n \geq 6$  için iyi sonuçlar üretmemektedir, bu durum Tablo 5'ten de görülebilir. ML yöntemi, özellikle küçük örneklem hacimlerinde daha küçük OYKO değerlerini kapsayacak bir aralıkta  $l_{0.01;0.05}$  tahmininde bulunsa da;  $n < 20$  için özellikle Faucher&Tyson ağırlık faktörü içeren YonX-WLS yöntemleri ile OYKO kriteri açısından bir farklılığı bulunmamaktadır. Bununla birlikte;  $n \geq 20$  olduğunda ML yöntemi anlamlı bir ölçüde tüm yöntemlerden daha iyi  $l_{0.01;0.05}$  tahmini yapmaktadır. Özet olarak  $l_{0.01;0.05}$  tahmininde  $n \geq 6$  için MN, ağırlık içermeyen YonX-WLS ve XonY-LS yöntemleri daha yüksek OYKO'larda

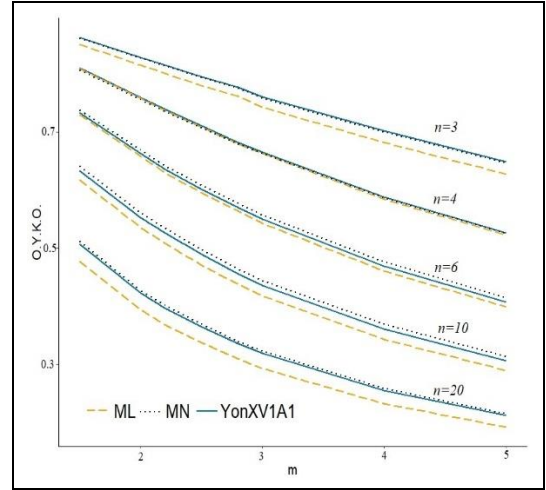
tahmin yaparak diğer yöntemlere nazaran iyi sonuç vermez iken;  $n < 20$  için ML ve özellikle Faucher&Tyson ağırlık faktörü içeren YonX-WLS yöntemleri benzer performansta daha küçük OYKO'larda  $l_{0.01;0.05}$  tahminleri yapmaktadır.  $n \geq 20$ 'de, ML yöntemine ait OYKO aralıkları  $x$  ekseninde genel olarak diğer tüm yöntemlerin hep sol tarafına konumlanmakta ve böylece daha düşük OYKO değerleri vererek en iyi  $l_{0.01;0.05}$  tahminleri yapabilmektedir. B Temel malzeme özelliği ( $l_{0.1;0.05}$ ) için elde edilen çıkarımlar Tablo Ek B.1'de görüldüğü gibi yaklaşık olarak A Temel malzeme özelliği ( $l_{0.01;0.05}$ ) ile aynıdır. Özet olarak;  $n < 20$  ve  $m < 10$  için ML ve özellikle Faucher&Tyson ağırlık faktörü içeren YonX-WLS yöntemleri eş değer performansta daha küçük OYKO'larda  $l_{0.1;0.05}$  tahminleri yapmaktadır. Bununla birlikte; ML yöntemi,  $n < 20$  ve  $m \geq 10$  veya  $n \geq 20$  durumlarında her zaman daha iyi  $l_{0.1;0.05}$  tahmini yapmaktadır. MN, ağırlık içermeyen YonX-WLS ve XonY-LS yöntemleri ise özellikle  $n \geq 6$  için daha yüksek OYKO'larda tahmin yaparak diğer yöntemlere nazaran iyi sonuç vermemektedir. Bununla birlikte;  $l_{0.01;0.05}$  tahmininden farklı olarak, YonXHnA3 ve YonXHnA4 yöntemleri  $n \geq 6$  için  $l_{0.1;0.05}$  tahmininde performans açısından ML ile Faucher&Tyson ağırlık faktörü içeren YonX-WLS yöntemlerinin her zaman gerisinde olmuştur.

Tablo 5'te A Temel malzeme özelliklerine ait OYKO sonuçları görsel ve daha sade bir sunum ile  $1.5 \leq m \leq 5$  için Şekil 3'te ve  $10 \leq m \leq 80$  için Şekil 5'te gösterilmiştir. Benzer şekilde, Tablo 6'da B Temel malzeme özellikleri için verilen OYKO sonuçları  $1.5 \leq m \leq 5$  için Şekil 4'te ve  $10 \leq m \leq 80$  için Şekil 6'da gösterilmiştir. Şekil 3-6'da, yukarıda verilen açıklamalar doğrultusunda, en iyi yöntem olarak ML ile MN'ye nazaran daha yüksek OYKO'lu tahminler yapan MN ve YonXV1A1 yöntemleri ele alınmıştır.

Şekil 3 ve Şekil 4'te gösterildiği gibi  $1.5 \leq m \leq 5$  aralığında yöntemler, A Temel ve B Temel malzeme özelliklerinin tahmininde ML yöntemi  $n$  arttıkça genel olarak MN ve YonXV1A1 yöntemine göre daha düşük OYKO'lu  $l_{p;a}$  tahmini yapmıştır. Ancak, ML, MN ve YonXV1A1 yöntemlerin üçü de özellikle  $n=3$  ve 4 gibi çok küçük örneklemlerde  $\hat{l}_p$ 'leri gerçek  $l_p$  değerlerinden daha aşağı değerlerde tahmin ederek yüksek değerde OYKO'lu sonuçlar vermiştir. Verilerin çarpıklık katsayısı sıfıra yaklaştıkça OYKO'ları farklı oranlarda düşmekte ve dolayısıyla aralarındaki fark değişerek artan veya azalan bir eğilim göstermektedir.

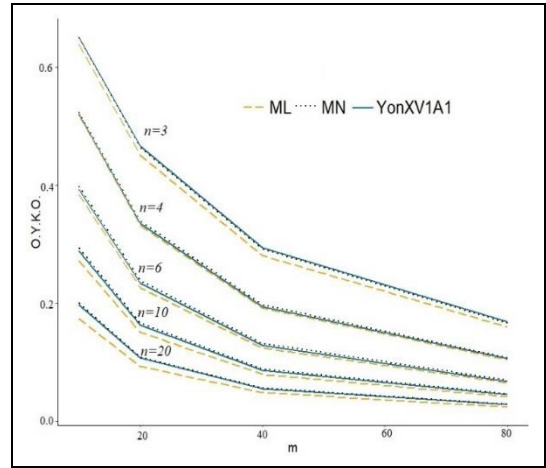


Şekil 3: A temel malzeme özelliği ( $l_{0.01;0.05}$ ) için  $1.5 \leq m \leq 5$  aralığında OYKO sonuçları.

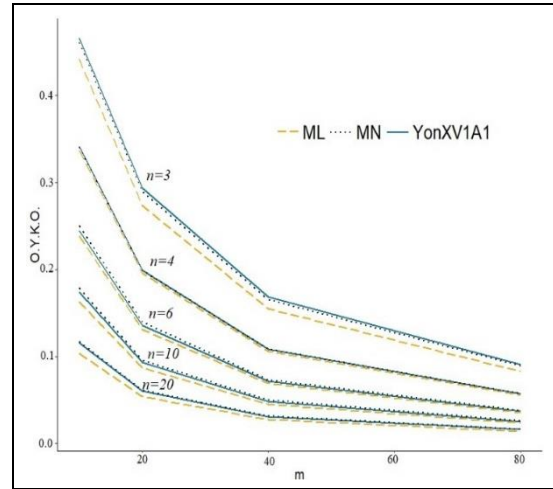


Şekil 4: B temel malzeme özelliği ( $l_{0.1;0.05}$ ) için  $1.5 \leq m \leq 5$  aralığında OYKO sonuçları.

Şekil 5'te ve Şekil 6'da gözlemlenen veriler arasında değişim azaldıkça, diğer bir deyişle 10, 20 gibi yüksek  $m$ 'lerde, her bir yöntemin tahmin performansları iyileşmekte ve dolayısıyla OYKO değerleri azalmaya başlamaktadır.



Şekil 5: A temel malzeme özelliği ( $l_{0.01;0.05}$ ) için  $10 \leq m \leq 80$  aralığında OYKO sonuçları.



Şekil 6: B temel malzeme özelliği ( $l_{0.1;0.05}$ ) için  $10 \leq m \leq 80$  aralığında OYKO sonuçları.



Şekil 3-6'da,  $n=3$  için ML yöntemi, MN ve YonXV1A1 yöntemlerine göre daha iyi sonuç vermiş gibi olsa da; A ve B temel özelliği tahmininde ML'nin performans açısından MN ve YonXV1A1 yöntemlerinden bir farkı yoktur. Çünkü,  $n=3$ 'de ML yöntemi OYKO değerleri için Tablo Ek A.1 ve Ek B.1'de görüldüğü gibi  $\pm 0.02$  birim büyüklüğünde bir değişkenlik içermekte ve bu değişkenlik ikinci bir benzetimde  $\pm 0.002$  birim kadar değişkenlik içeren MN ve YonXV1A1 yöntemlerinden daha küçük olduğu kadar daha büyük OYKO'lu tahmin yapmasını da olası kılar. Bu durumda, ML yöntemi MN ve YonXV1A1'den daha iyidir demek güvenilir olmayacaktır. Ancak  $n \geq 6$  değerlerinde ML yöntemi MN ve YonXV1A1'den anlamlı bir ölçüde iyi performans sergiler.

Sonuç olarak,  $n < 6$  için YonXV1A3 ve YonXV1A4 yöntemleri dışında geriye kalan 26 yöntem için  $l_{0.1;0.05}$  ve  $l_{0.1;0.05}$  tahmininde önemli bir farklılık gözlemlenmediğinden ML'ye nazaran daha basit ve Excel gibi bir programla kolaylıkla uygulanabilen bir YonX-WLS veya XonY-LS yöntemi seçmek daha mantıklı ve pratik olacaktır.  $6 \leq n < 20$  için ise MN, ağırlık içermeyen YonX-WLS ve XonY-LS yöntemler dışında herhangi YonX-WLS yöntemi seçilebilir. Tüm bu seçimlerde öncelik, ML performansına en yakın yöntem olması nedeniyle, Faucher&Tyson ağırlık faktörü içeren YonX-WLS yöntemlerinden birine, özellikle YonXV2A2 yöntemine verilmelidir.  $n \geq 20$  olduğu durumlarda ise ML yönteminin tercih edilmesi önerilir.

## 5 Sonuçlar

Bu çalışmada Weibull dağılımının 1. ve 10. alt yüzdeliklerinin % 95 güven düzeyindeki alt sınırlarının, diğer adıyla A ve B Temel malzeme özelliklerinin, kesin tahmini için kullanılan yöntemlerin genel bir karşılaştırması yapılmıştır. Toplam 27 yöntem ele alınmıştır. Bunlardan 13 tanesi literatürde tahmin performansı hiç incelenmemiş yöntemlerdir; bunlar parametrelerin güven aralıkları için geliştirilmiş yöntemler olup kesin alt sınır tahmininde de kullanılabilirler. Bu çalışmada gösterilmiş ve karşılaştırmaya dahil edilmiştir.

Seramikler ve kompozit malzemeler gibi yüksek maliyetli güvenilirlik çalışmalarında  $n=3$ 'e kadar düşebilen küçük örneklem hacimleriyle çalışmalar yapılabilir. Literatürde Weibull yüzdeliklerin aralık tahminleri en az 5 veya 6 örneklem hacmi ile yapılmıştır. Bu çalışmada  $3 \leq n \leq 20$  olacak şekilde küçük örneklem hacimlerinde ve farklı Weibull şekil parametre değerlerinde, ortalama yanlış kapsama olasılığı (OYKO) kriteri kullanılarak 27 yöntemin performansları kıyaslanmıştır.

27 yöntem için benzetim sonuçları bazı  $n$  ve  $m$ 'lerde birbirine oldukça yakın çıktığından, her yöntem için belli örneklem hacimleri ( $n=3,6,20$ ) ile belli şekil parametre ( $m=1.5, 3, 10, 80$ ) değerlerinde 15 tekrarda 100,000 tekrarlı bir benzetim çalışması ile yöntemlerin tahmin performanslarındaki değişkenlikler ölçülmüştür. Buna bağlı olarak, yöntemlerin performansı daha güvenilir bir şekilde değerlendirilmiş ve benzer performans gösteren yöntemlerin bir özeti sunulmuştur.

Benzetim sonuçlarına göre, örneklem hacminin 6'dan küçük değerlerinde YonXV1A3 ve YonXV1A4 yöntemleri dışında geriye kalan 26 yöntem ile A ve B Temel malzeme özellikleri eş değer bir performansta tahmin edilebilmektedir. Benzer şekilde,  $6 \leq n < 20$  için, MN, ağırlık içermeyen YonX-WLS ve XonY-LS yöntemleri dışında herhangi YonX-WLS yöntemi ile ML yöntemi performansında bir tahmin yapılabilir.

$n < 20$  için YonX-WLS yöntemleri arasında Faucher&Tyson ağırlık faktörü içerenlerin, özellikle YonXV2A2 yönteminin seçilmesi önerilir. Bu öneri, ML ile eşdeğer performansta ama ML'ye nazaran daha basit, kodlama gerektirmeyen ve excel, chrome sheet gibi ortamlarda kolaylıkla hesaplanan bir YonX-WLS yönteminin kullanılabilirliği açısından önemlidir. Bununla birlikte,  $n \geq 20$  olduğu durumlarda ise sadece ML yönteminin tercih edilmesi önerilir. Gelecek çalışmalarda A ve B temel malzeme özelliklerinin tahmini için YonX-WLS ve XonY-LS yöntemleri ile  $n$  örneklem hacmine göre değişen yeni  $F(t_i)$  tahminleyicisi geliştirilebilir. Ayrıca, kesin tahminler yerine yaklaşık tahminler veren klasik (frekansçı) yöntemlerin yer aldığı kapsamlı bir benzetim çalışması yapılabilir.

## 6 Kaynaklar

- [1] Weibull W. "A statistical theory of the strength of materials". *Royal Swedish Institute of Engineering Research (Ingenioersvetenskaps Akad. Handl.)*, 153, 1-55, 1939.
- [2] Jiang R, Murthy DNP. "A study of Weibull shape parameter: properties and significance". *Reliability Engineering and System Safety*, 96(12), 1619-1626, 2011.
- [3] Weibull W. "A statistical distribution function of wide applicability". *Journal of Applied Mechanics*, 103, 293-297, 1951.
- [4] Lu C, Danzer R, Fischer FD. "Influence of threshold stress on the estimation of the Weibull statistics". *Journal of the American Ceramic Society*, 85(6), 1640-1642, 2002.
- [5] Alqam M, Bennett RM, Zureick AH. "Three-parameter vs. two-parameter Weibull distribution for pultruded composite material properties". *Composite Structures*, 58 (4), 497-503, 2002.
- [6] Ambrozic M, Gorjan L, Gomilsek M. "Bend strength variation of ceramics in serial fabrication". *Journal of the European Ceramic Society*, 34(7), 1873-1879, 2014.
- [7] Nohut S. "Influence of sample size on strength distribution of advanced ceramics". *Ceramics International*, 40(3), 4285-4295, 2014.
- [8] Bütikofera L, Stawarczyk B, Roos M. "Two regression methods for estimation of a two-parameter Weibull distribution for reliability of dental materials". *Dental Materials*, 31(2), 33-50, 2015.
- [9] Edwards DJ, Guess FM, Young TM. "Improved estimation of the lower percentiles of material properties". *Wood Science and Technology*, 45(3), 533-546, 2011.
- [10] Fernandez-Saez J, Chao J, Duran J, Amo JM. "Estimating lower-bound fracture parameters for brittle materials". *Journal of Materials Science Letters*, 12, 1493-1496, 1993.
- [11] Phan LD, McCool JI. "Exact confidence intervals for Weibull parameters and percentiles". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part O: Journal of Risk and Reliability*, 223(4), 387-394, 2009.
- [12] Birgören B. *Effect of sample size and distribution parameters in estimation of confidence lower bounds for Weibull percentiles*. Editör: Caruta BM. *Ceramics and Composite Materials: New Research*, 215-236, New York, USA, Nova Science Publishers, 2006.
- [13] Casella G, Berger RL. *Statistical Inference*. 2<sup>nd</sup> ed. Belmont, USA, Duxbury Press, 2001.
- [14] Rinne H. *The Weibull Distribution: A Handbook*. Boca Raton, USA, CRC Press, 2009.
- [15] Barbero E, Fernandez-Saez J, Navarro C. "On the estimation of percentiles of the Weibull distribution". *Journal of Materials Science Letters*, 18(17), 1441-1443, 1999.

- [16] Barbero E, Fernandez-Saez J, Navarro C. "Statistical analysis of the mechanical properties of composite materials". *Composites: Part B*, 31(5), 375-381, 2000.
- [17] Birgören B, Dirikolu MH. "A computer simulation for estimating lower-bound fracture strength of composites using Weibull distribution". *Composites Part B: Engineering*, 35(3), 263-266, 2004.
- [18] McCool JL. "Estimation and inference in sets of Weibull samples". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part O: Journal of Risk and Reliability*, 228(2), 115-126, 2014.
- [19] Song L, Wu D, Li Y. "Optimal probability estimators for determining Weibull parameters". *Journal of Materials Science Letters*, 22(23), 1651-1653, 2003.
- [20] Wu D, Zhou J, Li Y. "Unbiased estimation of Weibull parameters with the linear regression method". *Journal of the European Ceramic Society*, 26 (7), 1099-1105, 2006.
- [21] Heo JH, Salas JD, Kim KD. "Estimation of confidence intervals of quantiles for the Weibull distribution". *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 15(4), 284-309, 2001.
- [22] Padgett WJ, Tomlinson M. "Lower confidence bounds for percentiles of Weibull and Birnbaum-saunders distributions". *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 73(6), 429-443, 2003.
- [23] Ho LL, Silva AF. "Unbiased estimators for mean time to failure and percentiles in a Weibull regression model". *The International Journal of Quality & Reliability Management*, 23(3), 323-339, 2006.
- [24] Yang Z, Xie M, Wong ACM. "A unified confidence interval for reliability-related quantities of two-parameter Weibull distribution". *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 77(5), 365-378, 2007.
- [25] Hudak D, Tiryakioğlu M. "On estimating percentiles of the Weibull distribution by the linear regression method". *Journal of Materials Science*, 44(8), 1959-1964, 2009.
- [26] Lv S, Niu Z, Wang G, Qua L, Hea Z. "Lower percentile estimation of accelerated life tests with nonconstant scale parameter". *Quality and Reliability Engineering International*, 33(7), 1437-1446, 2017.
- [27] Young TM, León RV, Chen CH, Chen W, Guess FM, Edwards DJ. "Robustly estimating lower percentiles when observations are costly". *Quality Engineering*, 27(3), 361-373, 2015.
- [28] Yalçınkaya M, Birgören B. "Confidence interval estimation of Weibull lower percentiles in small samples via bayesian inference". *Journal of the European Ceramic Society*, 37, 2983-2990, 2017.
- [29] Trustrum K, Jayatilaka S. "On estimating the Weibull modulus for on estimating the Weibull modulus for a brittle material". *Journal of Materials Science*, 14, 1080-1084, 1979.
- [30] Khalili A, Kromp K. "Statistical properties of Weibull estimators". *Journal of Materials Science*, 26(24), 6741-6752, 1991.
- [31] Abernethy R. *The new Weibull handbook*. 5th ed. Florida, USA, Dr. Robert B. Abernethy, 2009.
- [32] McCabe JF, Carrick TE. "A statistical approach to the mechanical testing of dental materials". *Dental Materials*, 2(4), 139-142, 1986.
- [33] Menon MV. "Estimation of the shape and scale parameters of the Weibull distribution". *Technometrics*, 5(2), 175-182, 1963.
- [34] Shao J. *Mathematical Statistics*. New York, USA, Springer, 2003.

### Ek A

Tablo Ek A1: A temel malzeme özelliği ( $l_{0,01;0,05}$ ) için tüm yöntemlere ait OYKO aralıkları.

Yöntem	n = 3				n = 6				n = 20			
	m=1.5	m=3	m=10	m=80	m=1.5	m=3	m=10	m=80	m=1.5	m=3	m=10	m=80
YonXMnA1	0.909-0.913	0.857-0.864	0.645-0.651	0.164-0.167	0.842-0.848	0.719-0.723	0.396-0.4	0.069-0.071	0.679-0.685	0.485-0.492	0.202-0.205	0.029-0.03
YonXMnA2	0.907-0.912	0.856-0.865	0.638-0.651	0.159-0.166	0.84-0.846	0.711-0.719	0.383-0.39	0.066-0.067	0.648-0.655	0.448-0.455	0.178-0.181	0.025-0.026
YonXMnA3	0.909-0.913	0.859-0.865	0.644-0.652	0.162-0.166	0.84-0.848	0.712-0.722	0.384-0.393	0.066-0.068	0.662-0.672	0.463-0.474	0.187-0.192	0.027-0.028
YonXMnA4	0.906-0.913	0.857-0.864	0.64-0.651	0.161-0.166	0.841-0.847	0.711-0.723	0.384-0.393	0.066-0.068	0.663-0.67	0.465-0.471	0.188-0.191	0.027-0.028
YonXMdA1	0.905-0.915	0.856-0.866	0.639-0.653	0.161-0.168	0.841-0.847	0.716-0.723	0.393-0.399	0.069-0.07	0.677-0.683	0.484-0.489	0.201-0.203	0.029-0.03
YonXMdA2	0.907-0.913	0.859-0.862	0.642-0.651	0.161-0.166	0.839-0.848	0.71-0.72	0.382-0.39	0.065-0.067	0.649-0.657	0.449-0.456	0.179-0.182	0.026-0.026
YonXMdA3	0.907-0.913	0.858-0.864	0.642-0.651	0.162-0.166	0.842-0.849	0.714-0.724	0.388-0.395	0.067-0.068	0.671-0.677	0.474-0.479	0.193-0.196	0.028-0.028
YonXMdA4	0.907-0.913	0.856-0.865	0.641-0.653	0.162-0.166	0.842-0.848	0.715-0.723	0.388-0.395	0.067-0.068	0.67-0.679	0.472-0.481	0.192-0.197	0.028-0.028
YonXHnA1	0.908-0.914	0.857-0.867	0.639-0.655	0.161-0.168	0.841-0.848	0.714-0.723	0.39-0.397	0.068-0.069	0.672-0.679	0.477-0.485	0.197-0.201	0.029-0.029
YonXHnA2	0.909-0.914	0.859-0.866	0.644-0.654	0.162-0.167	0.842-0.847	0.713-0.722	0.385-0.391	0.066-0.067	0.651-0.654	0.449-0.454	0.179-0.181	0.026-0.026
YonXHnA3	0.908-0.914	0.861-0.865	0.648-0.658	0.166-0.17	0.846-0.853	0.721-0.733	0.395-0.405	0.068-0.071	0.668-0.674	0.469-0.476	0.19-0.193	0.027-0.028
YonXHnA4	0.907-0.915	0.86-0.867	0.648-0.66	0.165-0.172	0.846-0.853	0.723-0.732	0.395-0.405	0.069-0.071	0.664-0.674	0.466-0.475	0.189-0.193	0.027-0.028
YonXV1A1	0.908-0.913	0.858-0.865	0.644-0.655	0.165-0.171	0.841-0.847	0.715-0.721	0.39-0.395	0.067-0.069	0.67-0.678	0.476-0.482	0.196-0.198	0.028-0.029
YonXV1A2	0.91-0.914	0.866-0.87	0.684-0.689	0.209-0.213	0.844-0.85	0.717-0.726	0.389-0.398	0.067-0.069	0.65-0.656	0.45-0.456	0.179-0.182	0.026-0.026
YonXV1A3	0.911-0.917	0.872-0.876	0.707-0.715	0.237-0.242	0.852-0.859	0.735-0.744	0.413-0.421	0.073-0.075	0.668-0.677	0.47-0.478	0.191-0.195	0.028-0.028
YonXV1A4	0.91-0.917	0.87-0.877	0.703-0.715	0.234-0.243	0.852-0.859	0.734-0.745	0.412-0.422	0.073-0.075	0.669-0.677	0.471-0.479	0.192-0.195	0.028-0.028
YonXV2A1	0.907-0.914	0.857-0.866	0.64-0.655	0.162-0.169	0.84-0.847	0.716-0.722	0.393-0.399	0.068-0.07	0.675-0.68	0.481-0.486	0.199-0.202	0.029-0.029
YonXV2A2	0.909-0.913	0.858-0.865	0.642-0.651	0.162-0.165	0.84-0.845	0.712-0.717	0.383-0.387	0.065-0.067	0.646-0.656	0.447-0.454	0.177-0.18	0.025-0.026
YonXV2A3	0.907-0.912	0.854-0.864	0.639-0.65	0.161-0.166	0.841-0.848	0.712-0.723	0.385-0.396	0.066-0.068	0.664-0.676	0.466-0.477	0.189-0.193	0.027-0.028
YonXV2A4	0.907-0.913	0.857-0.864	0.638-0.652	0.16-0.166	0.841-0.848	0.713-0.722	0.385-0.393	0.066-0.068	0.66-0.674	0.463-0.475	0.187-0.193	0.027-0.028
XonYMnA1	0.907-0.912	0.858-0.863	0.644-0.649	0.163-0.167	0.845-0.85	0.721-0.728	0.399-0.405	0.07-0.071	0.679-0.686	0.484-0.49	0.199-0.203	0.029-0.029
XonYMdA1	0.908-0.913	0.858-0.865	0.643-0.655	0.163-0.169	0.845-0.851	0.723-0.73	0.401-0.407	0.071-0.072	0.68-0.689	0.486-0.493	0.2-0.204	0.029-0.03
XonYHnA1	0.906-0.914	0.857-0.865	0.644-0.654	0.165-0.17	0.846-0.852	0.726-0.732	0.405-0.411	0.071-0.073	0.684-0.691	0.491-0.497	0.204-0.207	0.03-0.03

Tablo Ek A2'in devamı.

Yöntem	n = 3				n = 6				n = 20			
	m=1,5	m=3	m=10	m=80	m=1,5	m=3	m=10	m=80	m=1,5	m=3	m=10	m=80
XonYV1A1	0.906-0.914	0.857-0.866	0.642-0.655	0.163-0.17	0.844-0.849	0.717-0.727	0.393-0.401	0.068-0.07	0.675-0.681	0.479-0.485	0.197-0.199	0.029-0.029
XonYV2A1	0.907-0.913	0.857-0.866	0.643-0.654	0.163-0.169	0.843-0.851	0.721-0.729	0.399-0.405	0.069-0.072	0.68-0.687	0.485-0.492	0.2-0.203	0.029-0.03
ML	0.877-0.932	0.816-0.891	0.577-0.691	0.134-0.181	0.842-0.845	0.712-0.717	0.382-0.385	0.065-0.066	0.644-0.65	0.443-0.448	0.174-0.178	0.025-0.025
MN	0.906-0.914	0.857-0.865	0.641-0.653	0.162-0.168	0.843-0.848	0.717-0.727	0.395-0.403	0.069-0.071	0.678-0.684	0.484-0.489	0.2-0.203	0.029-0.03

## Ek B

Tablo Ek B1: B temel malzeme özelliği ( $l_{0.1;0.05}$ ) için tüm yöntemlere ait OYKO aralıkları.

Yöntem	n = 3				n = 6				n = 20			
	m=1,5	m=3	m=10	m=80	m=1,5	m=3	m=10	m=80	m=1,5	m=3	m=10	m=80
YonXMnA1	0,857-0,864	0,755-0,764	0,455-0,465	0,087-0,09	0,729-0,739	0,55-0,56	0,246-0,252	0,037-0,039	0,507-0,513	0,32-0,326	0,117-0,119	0,016-0,016
YonXMnA2	0,855-0,866	0,754-0,764	0,453-0,462	0,086-0,089	0,725-0,732	0,541-0,55	0,238-0,242	0,036-0,037	0,477-0,483	0,295-0,299	0,105-0,106	0,014-0,015
YonXMnA3	0,858-0,865	0,756-0,765	0,455-0,464	0,086-0,089	0,726-0,734	0,543-0,552	0,239-0,244	0,036-0,037	0,49-0,497	0,306-0,31	0,11-0,111	0,015-0,015
YonXMnA4	0,858-0,866	0,757-0,766	0,456-0,466	0,087-0,089	0,727-0,733	0,544-0,55	0,239-0,243	0,036-0,037	0,491-0,497	0,306-0,311	0,11-0,112	0,015-0,015
YonXMdA1	0,857-0,864	0,756-0,762	0,456-0,462	0,087-0,089	0,73-0,738	0,55-0,56	0,246-0,251	0,037-0,039	0,503-0,512	0,318-0,324	0,116-0,118	0,016-0,016
YonXMdA2	0,858-0,866	0,758-0,764	0,455-0,464	0,087-0,089	0,725-0,732	0,541-0,549	0,238-0,242	0,036-0,037	0,476-0,484	0,294-0,3	0,105-0,107	0,014-0,015
YonXMdA3	0,858-0,865	0,753-0,764	0,455-0,464	0,087-0,089	0,728-0,735	0,545-0,554	0,24-0,246	0,036-0,037	0,494-0,505	0,31-0,316	0,111-0,114	0,015-0,016
YonXMdA4	0,856-0,864	0,755-0,763	0,453-0,464	0,086-0,089	0,728-0,735	0,546-0,554	0,241-0,245	0,036-0,037	0,496-0,505	0,311-0,317	0,112-0,114	0,015-0,016
YonXHnA1	0,856-0,863	0,752-0,764	0,451-0,463	0,086-0,089	0,729-0,737	0,548-0,556	0,244-0,249	0,037-0,038	0,503-0,509	0,317-0,321	0,115-0,117	0,016-0,016
YonXHnA2	0,857-0,864	0,755-0,764	0,454-0,463	0,086-0,089	0,728-0,734	0,544-0,552	0,239-0,244	0,036-0,037	0,479-0,482	0,296-0,298	0,105-0,106	0,014-0,015
YonXHnA3	0,859-0,866	0,761-0,767	0,464-0,469	0,089-0,091	0,737-0,742	0,557-0,562	0,248-0,252	0,038-0,038	0,492-0,503	0,307-0,315	0,11-0,114	0,015-0,016
YonXHnA4	0,86-0,867	0,759-0,772	0,461-0,475	0,089-0,093	0,737-0,743	0,556-0,564	0,248-0,252	0,038-0,038	0,493-0,502	0,307-0,315	0,111-0,113	0,015-0,016
YonXV1A1	0,857-0,865	0,756-0,766	0,46-0,468	0,089-0,092	0,728-0,735	0,547-0,554	0,243-0,247	0,037-0,038	0,5-0,506	0,314-0,319	0,114-0,116	0,016-0,016
YonXV1A2	0,862-0,872	0,774-0,784	0,508-0,518	0,111-0,116	0,729-0,739	0,547-0,557	0,241-0,247	0,036-0,037	0,48-0,484	0,297-0,299	0,106-0,107	0,015-0,015
YonXV1A3	0,866-0,877	0,787-0,797	0,538-0,549	0,126-0,131	0,747-0,757	0,57-0,583	0,259-0,267	0,04-0,041	0,497-0,504	0,311-0,316	0,112-0,114	0,015-0,016
YonXV1A4	0,867-0,876	0,788-0,796	0,539-0,548	0,126-0,131	0,748-0,757	0,573-0,582	0,261-0,265	0,04-0,041	0,499-0,504	0,312-0,316	0,112-0,114	0,016-0,016
YonXV2A1	0,857-0,865	0,756-0,763	0,455-0,464	0,087-0,089	0,731-0,737	0,55-0,559	0,246-0,251	0,038-0,038	0,504-0,51	0,318-0,323	0,115-0,118	0,016-0,016
YonXV2A2	0,858-0,865	0,752-0,765	0,453-0,464	0,086-0,089	0,724-0,735	0,54-0,551	0,237-0,243	0,036-0,037	0,476-0,484	0,293-0,3	0,104-0,107	0,014-0,015
YonXV2A3	0,857-0,864	0,755-0,763	0,454-0,462	0,086-0,089	0,726-0,735	0,543-0,552	0,239-0,244	0,036-0,037	0,494-0,499	0,308-0,312	0,111-0,112	0,015-0,015
YonXV2A4	0,857-0,864	0,753-0,765	0,452-0,464	0,086-0,089	0,726-0,736	0,542-0,554	0,238-0,245	0,036-0,037	0,491-0,501	0,306-0,313	0,11-0,113	0,015-0,016
XonYMnA1	0,857-0,865	0,755-0,765	0,456-0,466	0,087-0,09	0,734-0,742	0,555-0,563	0,249-0,254	0,038-0,039	0,507-0,512	0,32-0,322	0,116-0,117	0,016-0,016
XonYMdA1	0,857-0,863	0,756-0,764	0,457-0,465	0,088-0,09	0,736-0,742	0,557-0,565	0,25-0,255	0,038-0,039	0,508-0,514	0,32-0,325	0,116-0,118	0,016-0,016
XonYHnA1	0,858-0,866	0,757-0,768	0,459-0,471	0,089-0,092	0,738-0,744	0,56-0,568	0,253-0,258	0,039-0,04	0,51-0,518	0,324-0,327	0,117-0,12	0,016-0,017
XonYV1A1	0,857-0,863	0,756-0,763	0,456-0,465	0,088-0,09	0,733-0,738	0,553-0,558	0,246-0,25	0,037-0,038	0,5-0,511	0,314-0,322	0,113-0,117	0,016-0,016
XonYV2A1	0,858-0,863	0,756-0,764	0,456-0,465	0,088-0,09	0,735-0,743	0,557-0,564	0,25-0,254	0,038-0,039	0,505-0,514	0,318-0,325	0,115-0,118	0,016-0,016
ML	0,83-0,874	0,718-0,777	0,413-0,475	0,075-0,091	0,725-0,731	0,541-0,546	0,236-0,239	0,035-0,036	0,471-0,478	0,29-0,295	0,103-0,104	0,014-0,014
MN	0,857-0,864	0,755-0,763	0,456-0,463	0,087-0,089	0,73-0,74	0,55-0,561	0,246-0,253	0,037-0,039	0,505-0,514	0,319-0,325	0,116-0,118	0,016-0,016