# МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 313.42
JEL Classification: C62

## ПРОБЛЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ

© 2019 **ВОРОНИН А. В., ГУНЬКО О. В., АФАНАСЬЕВА Л. М.**

*УДК 313.42*
*JEL Classification: C62*

**Воронин А. В., Гунько О. В., Афанасьева Л. М.**

**Проблемы устойчивости макроэкономических моделей динамики**

*Настоящая работа посвящена проблематике стабилизации экономического роста с применением традиционных макроэкономических стратегий. Поставленная цель предусматривает широкоформатное использование аппарата качественной теории дискретной экономической динамики. Предложен комплекс экономико-математических моделей, учитывающих специфику макроэкономических балансов, выдержанных в духе неокейнсианства. Существенным является анализ эффекта последействия, обусловленного «динамической памятью» о всех прошлых значениях по отношению к настоящему моменту времени инвестиционной политики и структуре потребления. При составлении динамических моделей экономического роста валового внутреннего продукта получены функциональные уравнения специфического типа, такие как разностные уравнения Вольтерра. Соответственно, для каждого из исследуемых вышеуказанных функциональных уравнений получен ряд неравенств, определяющих области параметрической устойчивости состояния равновесия. Сформулированы в явном виде структурные ограничения на базовые параметры модели мультипликатора-акселератора, которые могут оказать значимое влияние на распределение объемов потребления и инвестиций для обеспечения устойчивого роста национального дохода. Указаны условия на ограничения таких параметров, как мощность акселератора и предельная склонность к сбережению, которые следует учитывать при составлении экономико-математических моделей для целей прогнозирования и управления макроэкономической политикой государства. Представлены графические иллюстрации полученных решений соответствующих разностных уравнений для динамики национального дохода.*

***Ключевые слова:*** *валовый внутренний продукт, макроэкономический баланс, эффект последействия, инвестиционная политика, параметрическая устойчивость состояния равновесия, модель мультипликатора-акселератора.*

***DOI:***

***Рис.:*** *2.* ***Формул:*** *39.* ***Библ.:*** *10.*

***Воронин Анатолий Витальеви**ч – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов, Харьковский национальный экономический университет им. С. Кузнеца (просп. Науки, 9а, Харьков, 61166, Украина)*

***E-mail:*** *voronin61@ ukr.net*

***Гунько Ольга Владимировна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов, Харьковский национальный экономический университет им. С. Кузнеца (просп. Науки, 9а, Харьков, 61166, Украина)*

***E-mail:*** *Olha.Hunko@m.hneu.edu*

***Афанасьева Лидия Михайловна** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов, Харьковский национальный экономический университет им. С. Кузнеца (просп. Науки, 9а, Харьков, 61166, Украина)*

***E-mail:*** *Lidiia.Afanasieva@m.hneu.edu.ua*

*УДК 313.42*
*JEL Classification: C62*

***Воронін А. В., Гунько О. В., Афанас'єва Л. М. Проблеми стійкості макроекономічних моделей динаміки***

*Наведену статтю присвячено проблематиці стабілізації економічного зростання із застосуванням традиційних макроекономічних стратегій. Поставлена мета передбачає широкоформатне використання апарату якісної теорії дискретної економічної динаміки. Запропоновано комплекс економіко-математичних моделей, що враховують специфіку макроекономічних балансів, витриманих у дусі неокейнсіанства. Істотним є аналіз ефекту післядії, обумовленого «динамічною пам'яттю» про всі минулі значення щодо справжнього моменту часу інвестиційної політики і структури споживання. При складанні динамічних моделей економічного зростання валового внутрішнього продукту отримані функціональні рівняння специфічного типу, такі як різницеві рівняння Вольтерра. Відповідно, для кожного з досліджуваних вищевказаних функціональних рівнянь отримано ряд нерівностей, що визначають області параметричної стійкості стану рівноваги. Сформульовано в явному вигляді структурні обмеження на базові*

*UDC 313.42*
*JEL Classification: C62*

***Voronin A. V., Gunko O. V., Afanasieva L. M. Problems of Stability of Dynamic Macroeconomic Models***

*This paper deals with the problems of stabilizing economic growth using traditional macroeconomic strategies. The goal taken implies a large-scale use of the machinery of the qualitative theory of discrete economic dynamics. A set of economic and mathematical models that take into consideration the specifics of macroeconomic equilibrium in view of neo-Keynesian economics is proposed. It is essential to analyze the residual effect caused by the "dynamic memory" of all previous values in relation to the present moment in time in the investment policy and the consumption structure. When building dynamic models of economic growth of Gross Domestic Product, functional equations of a specific type, such as Volterra difference equations, were obtained. Accordingly, for each of the above functional equations studied, there received a number of inequalities that determine the domains of parametric stability of the equilibrium. Structural constraints of the basic parameters of the multiplier-accelerator model, which can have a significant impact on the distribution of consumption and investment to ensure sustainable growth of* *параметри моделі мультиплікатора-акселератора, які можуть надати значущий вплив на розподіл обсягів споживання та інвестицій для забезпечення сталого зростання національного доходу. Вказані умови на обмеження таких параметрів, як потужність акселератора і гранична схильність до заощадження, які слід враховувати при складанні економіко-математичних моделей для цілей прогнозування і управління макроекономічною політикою держави. Наведені графічні ілюстрації отриманих рішень відповідних різницевих рівнянь для динаміки національного доходу.*

***Ключові слова:*** *валовий внутрішній продукт, макроекономічний баланс, ефект післядії, інвестиційна політика, параметрична стійкість стану рівноваги, модель мультиплікатора-акселератора.*

***Рис.:*** *2.* ***Формул:*** *39.* ***Бібл.:*** *10.*

***Воронін Анатолій Віталійович*** *– кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця (просп. Науки, 9а, Харків, 61166, Україна)*

***E-mail:*** *voronin61@ ukr.net*

***Гунько Ольга Володимирівна*** *– кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця (просп. Науки, 9а, Харків, 61166, Україна)*

***E-mail:*** *Olha.Hunko@m.hneu.edu*

***Афанас'єва Лідія Михайлівна*** *– кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця (просп. Науки, 9а, Харків, 61166, Україна)*

***E-mail:*** *Lidiia.Afanasieva@m.hneu.edu.ua*

*national income, are formulated in an explicit form. There indicated conditions for constraining such parameters as the accelerator capacity and marginal propensity to save, which should be taken into account when developing economic and mathematical models for the purposes of forecasting and managing national macroeconomic policies. Graphic illustrations of the obtained solutions to the corresponding difference equations of the national income behavior are presented.*

***Keywords:*** *gross domestic product, macroeconomic equilibrium, residual effect, investment policy, parametric stability of an equilibrium state, multiplier-accelerator model.*

***Fig.:*** *2.* ***Formulae:*** *39.* ***Bibl.:*** *10.*

***Voronin Anatolii V.*** *– Candidate of Sciences (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Mathematcal Methods in Economics, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics (9a Nauky Ave. , Kharkiv, 61166, Ukraine)*

***E-mail: v****oronin61@ ukr.net*

***Gunko Olga V.*** *– Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Mathematcal Methods in Economics, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics (9a Nauky Ave. , Kharkiv, 61166, Ukraine)*

***E-mail:*** *Olha.Hunko@m.hneu.edu*

***Afanasieva Lidiia M.*** *– Candidate of Sciences (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Mathematcal Methods in Economics, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics (9a Nauky Ave. , Kharkiv, 61166, Ukraine)*

***E-mail:*** *Lidiia.Afanasieva@m.hneu.edu.ua*

**Введение.** Государственная экономическая стратегия, направленная на стабильный рост таких базовых показателей, как валовый внутренний продукт (ВВП), требует поднять на более качественный уровень всю систему мониторинга и управления макроэкономическими процессами. Для достижения поставленной цели необходимо полное использование всего арсенала качественных средств и методов при решении различных аналитических и прогнозных задач. Преодоление подобного рода проблем не представляется возможным без применения экономико-математических моделей, описывающих с определенных позиций и на соответствующем уровне агрегирования как состояния, так и последовательности состояний государственной экономики.

**Литературный обзор.** Динамические макроэкономические модели позволяют изучить эволюцию общественного производства на базе естественного баланса между потреблением, инвестиционной политикой и государственными расходами. Учет фактора времени в дискретной форме (месяцы, кварталы, годы) предопределяет с математических позиций применение разностных уравнений и их разного рода модификаций для конструирования моделей динамики. При анализе поведенческих свойств макроэкономических моделей особую роль играют качественные свойства исследуемых траекторий (без знания самих кривых). Важнейшим из этих свойств является устойчивость равновесных состояний моделей. Данному вопросу в экономической литературе посвящен целый ряд работ [2; 4–7; 10].

Анализ перечисленных источников свидетельствует о наличии ряда дополнительных проблем устойчивого поведения динамических траекторий, связанных с усложнением гипотез о структуре потребления и инвестирования. Таким допущением, в частности, является фактор эффекта последействия для вышеуказанных составляющих макроэкономического баланса.

**Целью работы** является вывод условий структурной устойчивости исследуемых дискретных динамических моделей макроэкономики с учетом влияния распределенных временных запаздываний.

**Методы исследования** главным образом базируются на математической теории устойчивости положений равновесия динамических систем с дискретным временем.

**Результаты.** Сначала рассмотрим одну из самых простых моделей, которая представлена у Аллена [1] и считается одной из основополагающих в теории экономического цикла Самуэльсона–Хикса. Математическая модель описывает взаимодействие в целочисленные моменты времени $n = 0,1,2,...$ дохода $Y_n$, функции потребления $C_n$, объема инвестиций $I_n$ и независимых расходов $G_n$. Этот традиционный в экономической теории баланс между сбережениями и инвестициями представлен в форме:

$$Y_n = C_n + I_n + G_n. \qquad (1)$$

Допускаем, что функция потребления $C_n$ зависит от значения дохода в предыдущий момент времени, то есть имеет место запаздывание на один временной шаг

$$C_n = cY_{n-1},$$

где $c$ _ предельная склонность к потреблению, $0<c<1$. Относительно инвестиций положим:

$$I_n = v(Y_{n-1} - Y_{n-2}),$$

то есть объем инвестиций пропорционален изменению дохода между $n-2$ и $n-1$ промежутками времени. Здесь $v>0$ коэффициент, характеризующий мощность акселератора. Независимые расходы $G_n$ есть заданная функция в дискретном времени.

Из (1) и последующих утверждений имеем динамическую модель в виде рекуррентного уравнения второго порядка:

$$Y_n - (v+c)Y_{n-1} + vY_{n-2} = G_n. \tag{2}$$

Неоднородное рекуррентное уравнение (2) с соответствующим мультипликаторным уравнением:

$$\mu^2 - (v+c)\mu + v = 0 \tag{3}$$

имеет общее решение в форме

$$Y(n) = A_1 q(n) + A_2 q_2(n) + u(n), \tag{4}$$

где $q_1(n),\ q_2(n)$ – линейно-независимые решения однородного рекуррентного уравнения (2) при $G_n \equiv 0$;

$u(n)$ – частное решение неоднородного уравнения;

$A_1, A_2$ – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий $Y(0), Y(1)$. В зависимости от параметров мультипликаторного уравнения (3) будут иметь место три комбинации линейно независимых решений $q_1(n),\ q_2(n)$.

Частное решение $u(n)$ имеет вид:

$$u(n) = \sum_{k=0}^{n-1} R(n-1-k)G(k+2), \tag{5}$$

где весовая функция $R(n-1-k)$ явным образом зависит от соответствующих $q_1(n),\ q_2(n)$. Положим, $c=1-s$, где $0<s<1$ есть предельная склонность к сбережениям. В таком случае мультипликаторного уравнения (3) получим выражение:

$$\mu^2 - (v+1-s)\mu + v = 0. \tag{6}$$

Квадратное уравнение (6) не имеет отрицательных действительных корней. При условии $0<v<(1-\sqrt{s})^2$ линейно независимые решения представлены как $q_1(n)=\mu_1^n,\ \ q_2(n)=\mu_2^n,\ \ \mu_1,\mu_2>0$. Если справедливо соотношение $v=(1-\sqrt{s})^2$, то $\mu_1=\mu_2=1-\sqrt{s}$ и, соответственно, $q_1(n)=(1-\sqrt{s})^n,\ \ q_2(n)=n(1-\sqrt{s})^n$.

При выполнении неравенства $(1-\sqrt{s})^2<v<1$ корни (6) будут комплексно-сопряженными, а $q_1(n),\ q_2(n)$ обретут тригонометрическую форму.

В конкретном случае $v=1$, что соответствует границе устойчивости решений (2), корни (6) запишутся так:

$$\mu_{1,2} = 1 - \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(1-\frac{s}{2}\right)^2 - 1}.$$

Пусть $\phi = \arccos\left(1-\frac{s}{2}\right)$. Тогда имеем $\mu_{1,2} = \cos(\phi) \pm i \cdot \sin(\phi)$ и, следовательно, $q_1(n) = \cos(n\phi),\ \ q_2(n) = \sin(n\phi)$. Для этого примера весовая функция, или так называемая резольвента, представляется в виде:

$$R(n-1-k) = \frac{\sin((n-1-k)\phi)}{\sin\phi}. \tag{7}$$

В таком случае частное неоднородное решение (5) получим в виде:

$$u(n) = \frac{1}{\sin\phi}\sum_{k=0}^{n-1} \sin((n-k-1)\phi)G(k+2). \tag{8}$$

Полагаем, что независимые государственные расходы совершают колебания с некоторой амплитудой $A$ и частотой $\phi$ вокруг постоянного уровня $G_0$, то есть:

$$G(n) = G_0 + A\sin(n\phi). \tag{9}$$

Соображения по выбору формы $G(n)$ представлены в [7].

Вполне очевидно, что выражение (8) является сверткой двух числовых последовательностей. Поэтому для получения явного решения $u(n)$ представляется эффективным применение Z-преобразования, то есть дискретного преобразования Лапласа [3].

Используя свойства Z-преобразования [3], будем иметь:

$$u(z) = z \cdot R(z)G(z), \tag{10}$$

где $R(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2\cos\phi \cdot z + 1}$,

$$G(z) = \frac{G_0 z}{z-1} + \frac{A\sin\phi \cdot z}{z^2 - 2\cos\phi \cdot z + 1}.$$

Из (10) следует алгебраическое выражение для $u(z)$:

$$u(z) = \frac{G_0 z^3}{(z-1)(z^2 - 2\cos\phi \cdot z + 1)} + \frac{A \cdot \sin\phi \cdot z^3}{(z^2 - 2\cos\phi \cdot z + 1)}. \tag{11}$$

Обратное Z-преобразование для каждого из слагаемых дает [8]:

$$\frac{z^3}{(z-1)(z^2 - 2\cos\phi \cdot z + 1)} \Rightarrow \frac{1}{2(1-\cos\phi)} +$$

$$+\frac{1+2\cos\phi}{2\sin\phi}\sin(n\phi)+\frac{1-2\cos\phi}{2(1-\cos\phi)}\cos(n\phi),$$

$$\frac{z^3}{(z^2-2\cos\phi\cdot z+1)^2}\Rightarrow(K_1+K_{01}\cdot n)\sin(n\phi)+$$

$$+(1+K_{02}\cdot n)\cos(n\phi),$$

где $K_1=\frac{\cos\phi(3-2\cos^2\phi)}{2\sin^3\phi}$, $K_{01}=\frac{\cos\phi}{\sin\phi}=ctg\phi,$

$$K_{02}=\frac{(1-2\cos^2\phi)}{2\sin^2\phi},\ \cos\phi=1-\frac{s}{2},$$

$$\sin\phi=\sqrt{1-\left(1-\frac{s}{2}\right)^2},\ \ K_1=\frac{3}{2}ctg\phi-\frac{1}{2}ctg^3\phi,$$

$$K_{02}=\frac{1}{2}(1-ctg^2\phi).$$

Обратное Z-преобразование с учетом необходимых тождественных преобразований запишется в виде:

$$u(n)=\frac{G_0}{2(1-\cos\phi)}+\left[\frac{1+2\cos\phi}{2\sin\phi}G_0+\left(\frac{3-2\cos^2\phi}{2\sin^2\phi}+n\right)A\cos\phi\right]\sin(n\phi)+$$

$$+\left[\frac{1-2\cos\phi}{2(1-\cos\phi)}G_0+\left(1+\left(\frac{1-2\cos^2\phi}{2\sin^2\phi}\right)\right)nA\sin\phi\right]\cos(n\phi). \quad (12)$$

Обозначим постоянное слагаемое в (12) как $Y^*=\frac{G_0}{2(1-\cos\phi)}$ и, выражая $\cos\phi$ через $s$, получим $Y^*=\frac{G_0}{s}$.

Данный факт свидетельствует о наличии эффекта мультипликатора для равновесного значения дохода, что полностью соответствует макроэкономической теории [1].

В целом частное решение (12) описывает поведение макроэкономического процесса (2) в условиях резонанса, обусловленного колебаниями независимых государственных расходов вокруг некоторого постоянного значения $G_0$. Если амплитуда $A$ этих колебаний достаточно мала, то наблюдается медленный рост амплитуды колебаний национального дохода $Y$. На рис. 1а, 1б представлены переходные процессы для $u(n)$ в дискретном времени для различных значений предельной склонности к сбережению $s$.

Рассмотренная нами ранее динамическая модель национального дохода, описываемая разностным уравнением (2), содержит только два временных запаздывания. Соответственно, свойства решений (2) полностью определены с помощью корней квадратного мультипликаторного уравнения (3). Иначе говоря, модель (2) генерирует процесс с двумя сосредоточенными запаздываниями.

Дальнейшее совершенствование модели динамики дохода предусматривает более реалистические предположения о наличии фактора запаздывания в исследуемом экономическом объекте. Одной из такого рода гипотез есть утверждение об имеющихся распределенных запаздываниях как на стороне потребления, так и в инвестиционной стратегии. Например, потребление имеет запаздывание на один период времени, а последствия инвестиционной политики проявляются через ряд временных промежутков, что, в свою очередь, коренным образом видоизменяет динамику дохода.

Предположим, что инвестиционная стратегия учитывает действие предыдущих $m$ временных шагов, то есть:

$$I_n=\nu\sum_{i=n-m}^{n-1}\xi_i\Delta Y(i).$$

Здесь $\xi_i$ – весовые коэффициенты, учитывающие «вклад» каждого слагаемого в суммарный инвестиционный «портфель». Пусть все $\xi_i=\frac{1}{m},\ i=\overline{m,n-1},$ то есть имеет место равномерное распределение инвестиций на протяжении $m$ временных интервалов. Не нарушая общности, допустим, что $G_n\equiv 0,$ и тогда разностное уравнение (2) запишется так:

$$y_n=c\cdot y_{n-1}+\frac{1}{m}\cdot\nu\cdot(y_{n-1}-y_{n-m-1}) \quad (13)$$

или

$$y_{n+1}-\left(c+\frac{\nu}{m}\right)\cdot y_n+\frac{\nu}{m}\cdot y_{n-m}=0. \quad (14)$$

Разностное уравнение (14), так называемое трехчленное уравнение, имеет порядок $m+1.$ Известно, что при условии $c+\frac{\nu}{m}=1$ или $\frac{\nu}{m}=s$ все его решения будут колебательными, если:

$$\nu>\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1}. \quad (15)$$

Для нескольких первых значений $m$ нетрудно получить:

$$m=1,\ \ \nu>\left(\frac{1}{2}\right)^2=0{,}25,\ m=2,\ \ \nu>\left(\frac{2}{3}\right)^3\approx 0{,}296,$$

$$m=3,\ \ \nu>\left(\frac{3}{4}\right)^4=0{,}316;\ m=4,\ \ \nu>\left(\frac{4}{5}\right)^5=0{,}327.$$

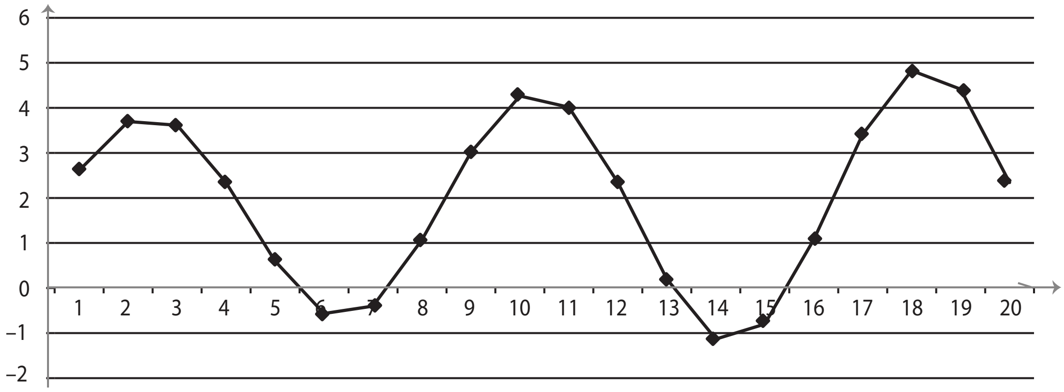


**Рис. 1а. Дискретный резонанс при** $\phi_1 = \dfrac{\pi}{4}, \quad s_2 = 2 - \sqrt{2}, \quad A = 0.1, \quad G_0 = 1$

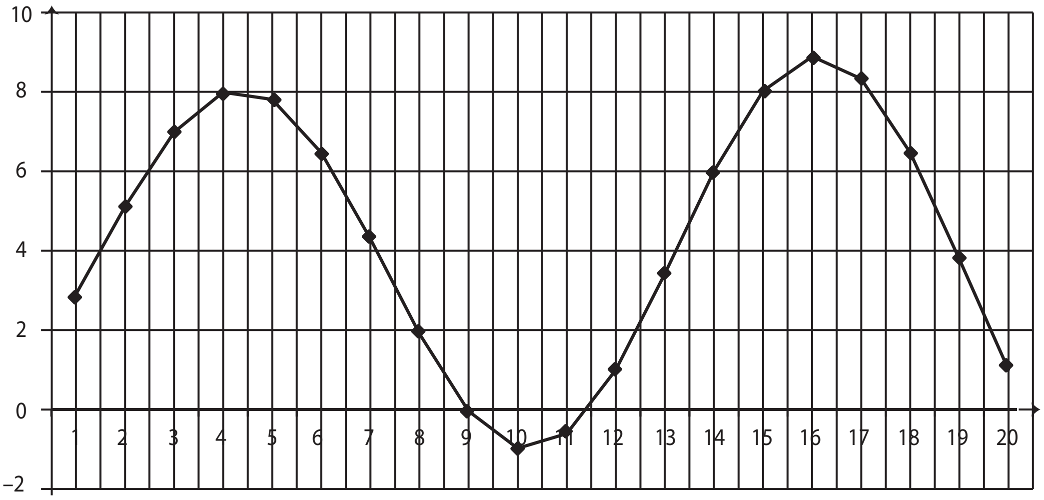


**Рис. 1б. Дискретный резонанс при** $\phi_2 = \dfrac{\pi}{6}, \quad s_2 = 2 - \sqrt{3}, \quad A = 0.1, \quad G_0 = 1$

Интересно заметить, что при больших $m$ число $v$ имеет предел $v^* = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}368.$

Очевидно, что значение параметра $v^* > \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^{m+1}$ является разделительным для осциллирующих и неосциллирующих динамических режимов. При данном $v_0^*$ получим мультипликаторное уравнение:

$$\mu^{m+1} - \mu^m + \frac{m^m}{(m+1)^{m+1}} = 0. \qquad (16)$$

Алгебраическое уравнение $m+1$ степени допускает следующую факторизацию:

$$\left(\mu - \frac{m}{m+1}\right)^2 \left(\mu^{m-1} + \frac{m-1}{m+1}\mu^{m-2} + \ldots + 2\frac{m^{m-3}}{(m+1)^{m-2}} + \frac{m^{m-2}}{(m+1)^{m-1}}\right) = 0. \qquad (17)$$

Из (17) следует существование двухкратного корня $\mu_{1,2} = \dfrac{m}{m+1} < 1$. Согласно теореме Левина-Мэя [8] остальные $\mu_i (2 \le i \le m+1)$ по абсолютной величине меньше, чем $\dfrac{m}{m+1}$. Поэтому все решения разностного уравнения (14) монотонно стремятся к равновесному значению $Y^* = 0$. Если мы откажемся от предположения $v_0 = \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^{m+1}$, то уравнение (15) преобразуется к форме:

$$y_{n+1} - y_n + s \cdot y_{n-m} = 0. \qquad (18)$$

В таком случае справедливо условие леммы 3 из теоремы Левина-Мэя [8] о том, что все решения (18) асимптотически устойчивы по отношению к равновесию $Y^*=0$, если

$$0<s<2\cos\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right). \qquad (19)$$

При $m=1$ условие (19) имеет вид $0<s<1$. Это означает, что оно справедливо при любом значении предельной склонности к сбережению. Если $m=2$, тогда (19) дает $0<s<\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ или $0<s<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Нетрудно заметить, что с увеличением $m$ значение $s$ становится малым, то есть $s<<1$.

В качестве иллюстрации приведем явный вид решений разностного уравнения (15) для $m=1,2,3$:

1) $m=1$. Разностное уравнение имеет второй порядок $y_{n+2}-y_{n+1}+\frac{1}{4}\cdot y_n=0$. Очевидно, что мультипликаторы $\mu_{1,2}=\frac{1}{2}$ и решение есть $y(n)=(C_1+C_2n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Постоянные $C_1$, $C_2$ определяются с помощью начальных условий $y(0),\ y(1)$.

2) $m=2$. Уравнение (15) преобразуется к виду разностного уравнения третьего порядка $y_{n+3}-y_{n+2}+\frac{4}{27}\cdot y_n=0$ с соответствующим мультипликаторным уравнением $\mu^3-\mu^2+\frac{4}{27}=0$. Структура решения разностного уравнения представлена как:

$$y(n)=(C_1+C_2n)\left(\frac{2}{3}\right)^n+C_3\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Здесь, как и ранее, $C_1$, $C_2$, $C_3$ зависят от начальных условий $y(0),\ y(1),\ y(2)$.

3) $m=3$. В данном случае имеем рекуррентное уравнение четвертого порядка

$$y_{n+4}-y_{n+3}+\frac{27}{256}\cdot y_n=0.$$

Мультипликаторное уравнение $\mu^4-\mu^3+\frac{27}{256}=0$ допускает факторизацию

$$\left(\mu-\frac{3}{4}\right)^2\left(\mu^2+\frac{1}{2}\mu+\frac{3}{16}\right)=0$$

и имеет корни $\mu_{1,2}=\frac{3}{4},\quad \mu_{3,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{4}.$

Решение рекуррентного уравнения запишется в форме

$$y(n)=(C_1+C_2n)\left(\frac{3}{4}\right)^n+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n(C_3\cos(n\phi)+C_2\sin(n\phi)),$$

где $\phi=-arctg\sqrt{2}$.

Постоянные $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ зависят от начальных условий $y(0),\ y(1),\ y(2),\ y(3)$.

На рис. 2а, 2б, 2в представлены графические иллюстрации вышеприведенных решений.

Возвращаясь к уравнению (14), представляется целесообразным воспользоваться теоремой 5.3 из [8] об устойчивости соответствующего разностного трехчленного уравнения, полагая при этом $a=c+\frac{v}{m}$ и $b=\frac{v}{m}$. В таком случае можно утверждать, что нулевое решение (14) асимптотически устойчиво, если и только если $|a|<\frac{m+1}{m}$ и

1) $|a|-1<b<(a^2+1-2|a|\cos\phi)^{\frac{1}{2}}$ для $m$ нечетных,

2) $|b-a|<1$ и $|b|<(a^2+1-2|a|\cos\phi)^{\frac{1}{2}}$ для $m$ четных,

где $\phi$ есть решение трансцендентного уравнения

$$\sin(m+1)\theta=|a|\cdot\sin(m\theta),\quad 0<\phi<\frac{\pi}{m+1}.$$

Первое условие $|a|-1<b$ преобразуется к виду $c+\frac{v}{m}-1<\frac{v}{m}$ или $c<1$, что всегда справедливо. Второе условие $|b-a|<1$ дает выражение $\left|\frac{v}{m}-c-\frac{v}{m}\right|<1$ или $c<1$. Поэтому как для четных, так и для нечетных $m$ должно выполняться неравенство:

$$|a|-1<b<(a^2+1-2|a|\cos\phi)^{\frac{1}{2}}. \qquad (20)$$

Предположим, что инвестиционная стратегия «хранит в себе» информацию обо всех предыдущих решениях о капиталовложениях, то есть:

$$I_n=v\sum_{i=0}^{n-2}\phi(n,i)\Delta Y(i). \qquad (21)$$

В этом случае рекуррентное уравнение (2) примет форму:

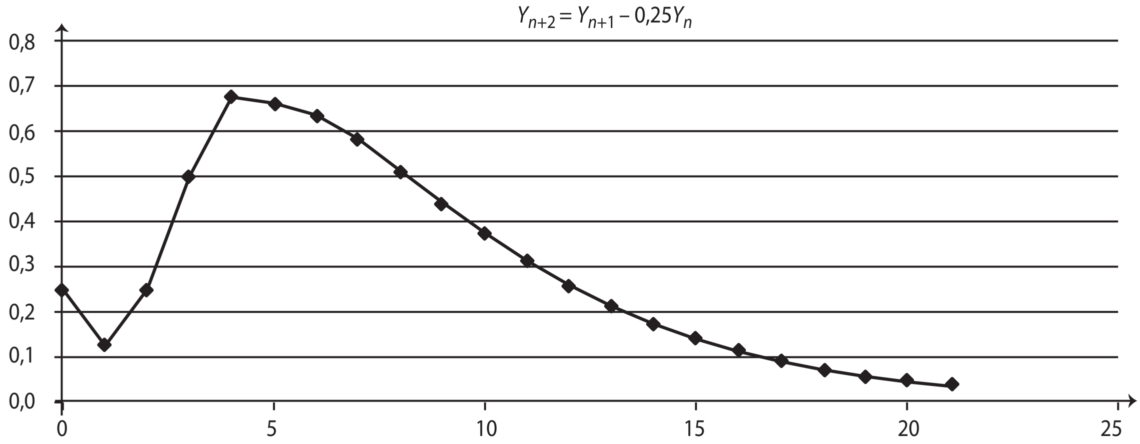


**Рис. 2а.** $m=1, \quad Y_0=0.5, \quad Y_1=0.75$

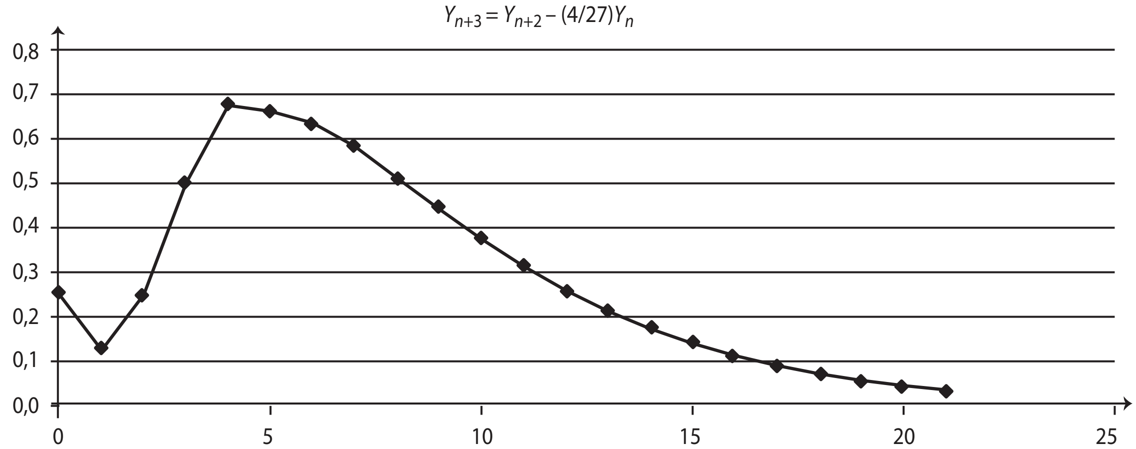


**Рис. 2б.** $m=2, \quad Y_0=0.25, \quad Y_1=0.5, \quad Y_2=0.75$

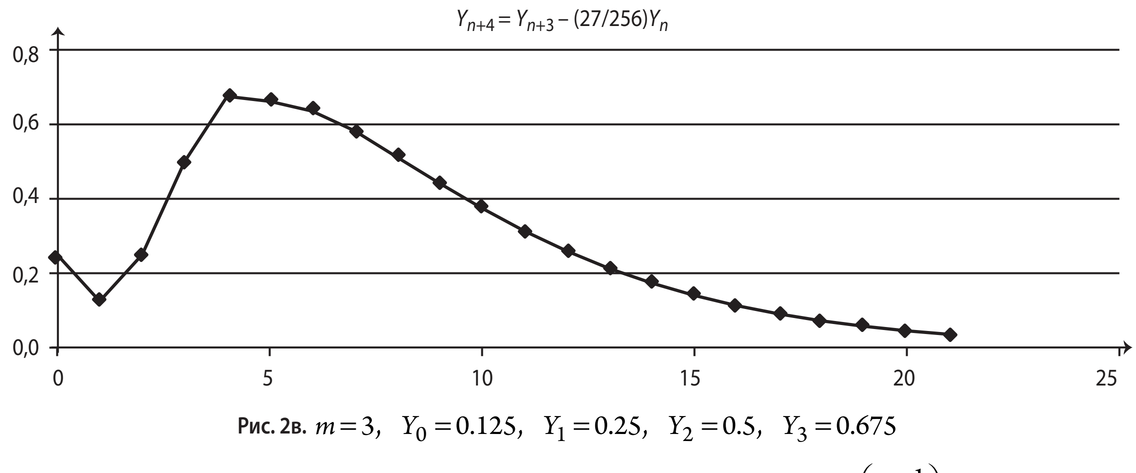


**Рис. 2в.** $m=3, \quad Y_0=0.125, \quad Y_1=0.25, \quad Y_2=0.5, \quad Y_3=0.675$

$$Y_{n+1}=cY_n+\nu\sum_{k=0}^{n-1}\phi(n,k)\Delta Y(k). \tag{22}$$

Далее будем считать, что

$$\phi(n,k)=\phi(n-k). \tag{23}$$

Допущение (23) позволяет применить к уравнению (22) дискретное преобразование Лапласа. С учетом всех необходимых свойств Z-преобразования имеем:

$$zY(z)-zY_0=cY(z)+\nu\left(\frac{z-1}{z}\right)\Phi(z)Y(z)+zG(z)$$

или

$$\left(z-c-\nu Y_0\left(\frac{z-1}{z}\right)\Phi(z)\right)Y(z)=z(G(z)+Y_0). \tag{24}$$

Пусть $g(z)=z-c-\nu\cdot B(z)$,

где $B(z)=\dfrac{z-1}{z}\Phi(z)$.

О поведении решений уравнения (24) будем судить по виду нулей $g(z)$, то есть если все $|z_i|<1$, то $Y(n)$ асимптотически устойчиво.

Из теоремы [9] следует явный критерий устойчивости решений уравнения (22):

$$c+v\left|\sum_{n=0}^{\infty}B(n)\right|<1. \qquad (25)$$

Неравенство (25) запишем иначе:

$$v\left|\sum_{n=0}^{\infty}B(n)\right|<s, \qquad (26)$$

где $B(n)$ – обратное Z-преобразование для $B(z)$.

В качестве примера возьмем $B(n)=(1-\beta)\times\times(\beta^n-\beta^{n-1})$. Это означает, что учет вклада более ранних инвестиционных решений убывает в геометрической прогрессии со знаменателем $\beta$. Очевидно, что Z-преобразование даёт $\Phi(z)=\dfrac{(1-\beta)z}{z-\beta}$. Следовательно, $B(z)=\dfrac{(1-\beta)(z-1)}{z-\beta}$, и, соответственно, $B(n)=(1-\beta)(\beta^n-\beta^{n-1})$. Нетрудно показать, что $\left|\sum_{n=0}^{\infty}B(n)\right|=1-\beta$. Тогда из (26) получаем:

$$v<\frac{s}{1-\beta}. \qquad (27)$$

Условия устойчивости (27) явным образом демонстрирует связь между мощностью акселератора $v$ и предельной склонностью к сбережению $s$ посредством динамического мультипликатора $\beta$.

В последующей версии модели (1) условимся, что обе стратегии потребления и инвестирования будут иметь распределенные во времени зависимости. Не нарушая общности, положим, что удельный вес прошлых значений дохода будет уменьшаться в геометрической прогрессии с разными знаменателями, то есть:

$$C_n=c\sum_{i=0}^{n-1}(1-\alpha)\alpha^{n-i-1}Y(i),$$

$$I_n=v(1-\beta)\sum_{i=0}^{n-2}\beta^{n-i-2}\Delta Y(i), \qquad (28)$$

где $0<\alpha,\ \beta<1$.

Тогда базовое уравнение (1) с учётом временного сдвига на единицу примет вид:

$$Y(n+1)=c(1-\alpha)\sum_{i=0}^{n-1}\alpha^{n-i}Y(i)+$$
$$+v(1-\beta)\sum_{i=0}^{n-1}\beta^{n-i-1}\Delta Y(i)+G(n+1). \qquad (29)$$

После выделения слагаемого с $Y_n$ получим:

$$Y(n+1)=c(1-\alpha)Y(n)+c(1-\alpha)\alpha\sum_{i=0}^{n-1}\alpha^{n-i-1}Y(i)+$$

$$+v(1-\beta)\sum_{i=0}^{n-1}\beta^{n-i-1}\Delta Y(i)+G)(n+1). \qquad (30)$$

Считая $Y_0=G_0$, Z-преобразование (30) даёт:

$$\left(z-c(1-\alpha)-\frac{c(1-\alpha)\alpha}{z-\alpha}-\frac{v(1-\beta)(z-1)}{z-\beta}\right)Y(z)=zG(z). \qquad (31)$$

Воспользуемся все той же теоремой из [8] для выяснения устойчивости решений (30), полагая $B(z)=\dfrac{c(1-\alpha)\alpha}{z-\alpha}+\dfrac{v(1-\beta)(z-1)}{z-\beta}$.

Обратное Z-преобразование запишется так: $B(n)=c(1-\alpha)\alpha^n+v\left(\dfrac{\beta-1}{\beta}\right)(1-\beta)^n$. Несложно определить, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}B(k)=c+v\left(\dfrac{\beta-1}{\beta}\right)$.

Тогда условия устойчивости запишется так:

$$\left|c+v\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)\right|<1-c(1-\alpha). \qquad (32)$$

Условия (32) равносильны двойному неравенству:

$$c(1-\alpha)-1<c-\frac{1-\beta}{\beta}v<1-c(1-\alpha)$$

или
$$c(2-\alpha)-1<\frac{1-\beta}{\beta}v<1+\alpha c. \qquad (33)$$

Очевидно, что неравенство (33) задаёт ограничение на мощность инвестиционного акселератора $v$. Следует помнить, что условие (33) является достаточным, но отнюдь не необходимым для асимптотической устойчивости решений уравнения (29).

Рассмотрим несколько иной подход к вопросу об устойчивости равновесного решения (29). Из уравнения (31) получим:

$$Y(z)=\frac{z(z-\alpha)(z-\beta)}{z^3+p_1z^2+p_2z+p_3}G(z), \qquad (34)$$

где

$$p_1=-(\alpha+\beta+c(1-\alpha)+\nu(1-\beta)),$$
$$p_2=(\alpha\beta+c(1-\alpha)\beta+\nu(1-\beta)(1+\alpha)),$$
$$p_3=-\nu\alpha(1-\beta).$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости решений (29) определяются соотношениями между коэффициентами знаменателя (34) $p_1, p_2, p_3$ [8].

$$|p_1+p_3|<1+p_2,\ \ |p_2-p_1p_3|<1-p_3^2, \qquad (35)$$

Первое неравенства из (35) выполняется при любых значениях параметров $\alpha, \beta, c, \nu$, а второе дает квадратичное неравенство по параметру $\nu_0=\nu(1-\beta)$:

$$\left|\beta(\alpha+c(1-\alpha))+(1-\alpha\beta+(1-c)(\alpha-\alpha^2))\nu_0-\alpha\nu_0^2\right|<$$

$$<1-\alpha^2\nu_0^2. \qquad (36)$$

Ситуация существенно упрощается, если предположить, что $\alpha=\beta$. Это означает, что инвестиции и потребление учитывают прошлые значения дохода с одинаковой скоростью. Тогда вместо соотношения (34) получим:

$$Y(z)=\frac{z(z-\alpha)}{z^2+q_1z+q_2}G(z), \qquad (37)$$

где $q_1=-(\alpha+c(1-\alpha))$ $q_2=\nu(1-\alpha)$.

Из критерия Шура–Кона [8] следует:

$$|q_1|<1+q_2<2. \qquad (38)$$

Согласно (38) получаем $\nu(1-\alpha)<1$ или

$$\nu<\frac{1}{1-\alpha}. \qquad (39)$$

Важно заметить, что неравенство (39) справедливо при любом значении предельной склонности к потреблению, то есть не зависит от *c*.

**Выводы.** Таким образом, в данном исследовании предложен комплекс экономико-математических моделей, учитывающих специфику макроэкономических балансов, выдержанных в духе неокейнсианства. Существенным является анализ эффекта последействия, обусловленного «динамической памятью» о всех прошлых значениях по отношению к настоящему моменту времени инвестиционной политики и структуре потребления. При составлении динамических моделей экономического роста валового внутреннего продукта получены функциональные уравнения специфического типа, такие как разностные уравнения Вольтерра. Для каждого из исследуемых функциональных уравнений получены соответствующие неравенства, определяющие области параметрической устойчивости. Данные теоретические постулаты имеют ясную экономическую интерпретацию, так как определяют структурные ограничения на числовые значения коэффициента мультипликатора и мощности акселератора, что позволяет прогнозировать на качественном уровне поведенческие свойства макроэкономических систем, которые могут иметь влияние на экономическую политику государства.

**ЛИТЕРАТУРА**


**1.** Аллен Р. Математическая экономия. М. : Изд-во иностр. лит., 1963. 688 с.

**2.** Барро Р., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 824 с.

**3.** Макаров И., Менский Б. Таблица обратных преобразований Лапласа и обратных Z-преобразований: Дробно-рациональные изображения. М. : Высшая шк., 1978. 247 с.

**4.** Прасолов А. В. Математические методы экономической динамики. СПб. : Лань, 2008. 349 с.

**5.** Пу Т. Нелинейная экономическая динамика. Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 198 с.

**6.** Barro R. Economic Growth in a Cross Section of Countries. *Quarterly Journal of Economics.* 1991.Vol. 106 (5). P. 407–443.

**7.** Duczynsti P. Capital Mobility in Neoclassical Models of Growth. *American Economic Review*. 2001. Vol. 90 (6). P. 687–694.

**8.** Elaydi S. An Introduction To Difference Equations. New York : Springer, 2005. 540 p.

**9.** Elaydi S. Stability of Volterra difference equations of convolution type. *Proceeding of The Special Program at Nankai Institute of Mathematics.* Singapore : Word Scientific, 1993. P. 66–73.

**10.** Hancen R., Gory D., Prescott E. Malthus to Solow. *American Economic Review.* 2002. Vol. 92 (9). P. 1205–1217.


**REFERENCES**


Allen, R. *Matematicheskaya ekonomiya* [Mathematical economy]. Moscow: Izd-vo inostr. lit., 1963.

Barro, R. "Economic Growth in a Cross Section of Countries". *Quarterly Journal of Economics*, vol. 106 (5) (1991): 407-443.

Barro, R., and Sala-i-Martin, Kh. *Ekonomicheskiy rost* [The economic growth]. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2010.

Duczynsti, P. "Capital Mobility in Neoclassical Models of Growth". *American Economic Review*, vol. 90 (6) (2001): 687-694.

Elaydi, S. "Stability of Volterra difference equations of convolution type". *Proceeding of The Special Program at Nankai Institute of Mathematics*. Singapore: Word Scientific, 1993. 66-73.

Elaydi, S. *An Introduction To Difference Equations*. New York: Springer, 2005.

Hancen, R., Gory, D., and Prescott, E. "Malthus to Solow". *American Economic Review*, vol. 92 (9) (2002): 1205-1217.

Makarov, I., and Menskiy, B. *Tablitsa obratnykh preobrazovaniy Laplasa i obratnykh Z-preobrazovaniy: Drobno-ratsionalnyye izobrazheniya* [Table of inverse Laplace transforms and inverse Z-transformations: Fractional rational images]. Moscow: Vysshaya shk., 1978.

Prasolov, A. V. *Matematicheskiye metody ekonomicheskoy dinamiki* [Mathematical methods of economic dynamics]. St. Petersburg: Lan, 2008.

Pu, T. *Nelineynaya ekonomicheskaya dinamika* [Nonlinear economic dynamics]. Moscow; Izhevsk: NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», 2000.


*Стаття надійшла до редакції 17.04.2019 р.*