

# Sistema de Amortiguación de vibraciones para equipos de alta sensibilidad

Castro Enrique <sup>1</sup>, Echegaray Edith, Luis Marinel,

Rondón Gabriel y Cárdenas Karen.

Este trabajo fue presentado por el Centro de Investigación y Desarrollo de Ingeniería en la Asociación Venezolana para el Avance de la ciencia (A.S.O.V.A.C.) XL XIII, Convención Anual: Ciencia Tecnología y Calidad de Vida. Capítulo Carabobo, del 16 al 21 de Noviembre de 1997

## FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El modelo teórico fue diseñado para simular la suspensión de un automóvil de cuatro ruedas, como el sistema simplificado de resortes y amortiguadores [Figura 1], en el cual se consideró la existencia de vibraciones libres amortiguadas, para examinar los movimientos angulares (cabeceo) y de rebote que existen.

El modelaje del vehículo fue simplificado al considerar toda su masa concentrada en el centro de gravedad (G) y la velocidad de traslación de este punto constante ( $V_G = \text{Constante}$ ).

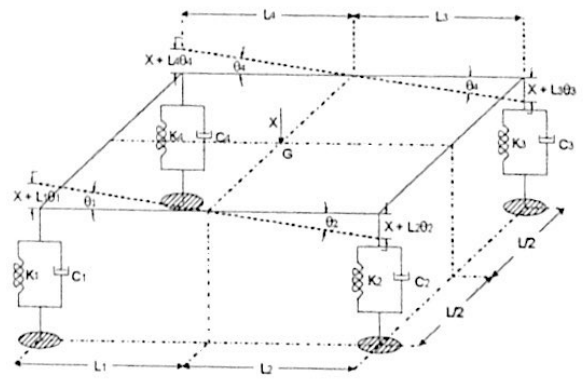


Fig. 1

Usando la formulación de Lagrange <sup>[3,4]</sup>

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_k} \right) - \frac{\delta L}{\delta q_k} + \frac{\delta D}{\delta \dot{q}_k} = Q_k^{N.C}$$

[1]

y el Lagrangeano simplificado para pequeñas oscilaciones:

## RESUMEN

Se presenta un sistema de amortiguación de vibraciones, con cinco grados de libertad, para la protección de equipos de alta sensibilidad, ubicados sobre sistemas primarios en movimiento. Este consta fundamentalmente de un giróscopo estructurado dentro de un sistema de amortiguación vertical, permitiendo mantener la horizontalidad de dicho equipo, evitando así que se interrumpen sus funciones en presencia de perturbaciones externas.

## INTRODUCCIÓN

Como resultado de los diferentes factores externos e internos que influyen sobre un sistema primario en movimiento, se produce una reducción en el amortiguamiento que este posee, ocasionando una mayor inestabilidad en los equipos internos, que pudiera contener. Es por ello que fue diseñado un sistema (teórico) de amortiguamiento, el cual tiene como objeto reducir las vibraciones, permitiendo que se mantenga la continuidad de las funciones de dichos equipos.

El sistema de amortiguación de vibraciones se diseñó para restablecer el equilibrio dinámico alterado por un salto brusco en un corto tiempo, mediante la colocación de un montaje de amortiguación vertical, dentro del cual se colocó un giróscopo de suspensión tipo Cardán.

siendo

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} I_4 \dot{\theta}_4^2 - \frac{1}{2} K_1 (\delta_{st} + x - L_1 \theta_1)^2 - \frac{1}{2} K_2 (\delta_{st} + x - L_2 \theta_2)^2 - \frac{1}{2} K_3 (\delta_{st} + x - L_3 \theta_3)^2 - \frac{1}{2} K_4 (\delta_{st} + x - L_4 \theta_4)^2 + m g x$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_4 \end{bmatrix}$$

donde D es la función de disipación de Rayleigh<sup>[4]</sup>

[2]

$$D = \frac{1}{2} C_1 (\dot{x} - L_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} C_2 (\dot{x} + L_2 \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} C_3 (\dot{x} + L_3 \dot{\theta}_3)^2 + \frac{1}{2} C_4 (\dot{x} - L_4 \dot{\theta}_4)^2$$

[3]

$$C = \begin{bmatrix} c' & -c_1 L_1 & c_2 L_2 & c_3 L_3 & -c_4 L_4 \\ -c_1 L_1 & c_1 L_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 L_2 & 0 & c_2 L_2^2 & 0 & 0 \\ c_3 L_3 & 0 & 0 & c_3 L_3^2 & 0 \\ -c_4 L_4 & 0 & 0 & 0 & c_4 L_4^2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k' & -k_1 L_1 & k_2 L_2 & k_3 L_3 & -k_4 L_4 \\ -k_1 L_1 & k_1 L_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 L_2 & 0 & k_2 L_2^2 & 0 & 0 \\ k_3 L_3 & 0 & 0 & k_3 L_3^2 & 0 \\ -k_4 L_4 & 0 & 0 & 0 & k_4 L_4^2 \end{bmatrix}$$

siendo  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  los desplazamientos angulares asociados a los grados de libertad y

$\delta_{st} = m g / (K_1 + K_2 + K_3 + K_4)$  la longitud de compresión del resorte para la condición de equilibrio, se obtuvieron las ecuaciones de movimiento del sistema asociadas a los tres grados de libertad (cabeceo, balanceo y pivote), generándose además dos grados de libertad adicionales si se produce la combinación de ellos.

El término  $Q_K^{NC}$  de [1] es igual a cero debido a que no existen fuerzas generalizadas externas no conservativas, además de los pistones, que actúen sobre el modelo.

El modelaje de este sistema amortiguado con cinco grados de libertad, vendrá dado por :

$$M \ddot{\bar{x}} + C \dot{\bar{x}} + K \bar{x} = 0$$

[4]

donde  $m$  = masa;  $I_i = m r_i^2$  = tensor de inercia, para el que  $r_i$  = radio de giro,  $i = 1, 4$ ;  $C$  = constante del pistón de amortiguación;  $K$  = constante del resorte de amortiguación;  $L_1 = L_4$  = longitud del vehículo desde el extremo trasero hasta el centro de gravedad  $G$  y  $L_2 = L_3$  = longitud del vehículo desde el extremo delantero hasta el centro de gravedad  $G$ ;  $C' = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$  y  $K' = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$ .

Este sistema de ecuaciones no puede ser resuelto usando las técnicas de análisis modal, ya que las ecuaciones no están desacopladas ( $C \neq \alpha M + \beta K$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes), por tanto al multiplicar la ecuación [4] por la matriz  $M^{-1}$  se tiene:

$$\ddot{\bar{x}} + M^{-1} C \dot{\bar{x}} + M^{-1} K \bar{x} = 0 \quad [5]$$

Si definimos  $Y_1 = \dot{\bar{X}}$  y  $Y_2 = \bar{X}$ , la expresión se reduce a una ecuación diferencial de primer orden, la cual en notación matricial se expresa como:

$$\dot{\bar{Y}} = A \bar{Y} \quad [6]$$

$\bar{Y}$  es el vector de estado, de dimensión  $10 \times 1$ :

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \end{pmatrix} \quad [7]$$

y  $A$  es la matriz de estado, de dimensión  $10 \times 10$ , la cual se puede escribir en forma particionada como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} K & -M^{-1} C \end{bmatrix} \quad [8]$$

Asumiendo que la solución de [6] es de la forma

$\bar{Y} = \bar{Z} e^{\lambda t}$ , nuestro problema se reduce a hallar los autovalores y autovectores de

$$A \bar{Z} = \lambda \bar{Z} \quad [9]$$

obteniendo diez autovalores  $\lambda_i$  y diez autovectores

$\bar{Z}_i$  los cuales, son complejos.

La respuesta del sistema para todo  $t$ , se toma de

las cinco primeras coordenadas del vector  $\bar{Y}(t)$ , donde

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^5 C_i \bar{z}_i e^{\lambda_i t} \quad [10]$$

Los autovalores  $\lambda_i$  aparecen en pares de complejos conjugados de la forma:

$$\lambda_i = -\zeta_i \omega_i - \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} j \quad [11]$$

$$\lambda_{i+1} = -\zeta_i \omega_i + \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} j \quad [12]$$

donde  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega_i$  es la frecuencia natural no amortiguada de  $i$ -ésimo modo,  $\zeta_i$  es el radio de amortiguamiento modal asociado al  $i$ -ésimo modo y  $\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$  es la frecuencia natural amortiguada.

El comportamiento para todo  $t$ , de cada una de los grados de libertad del sistema, en forma cualitativa, es representado en la (Figura 2).

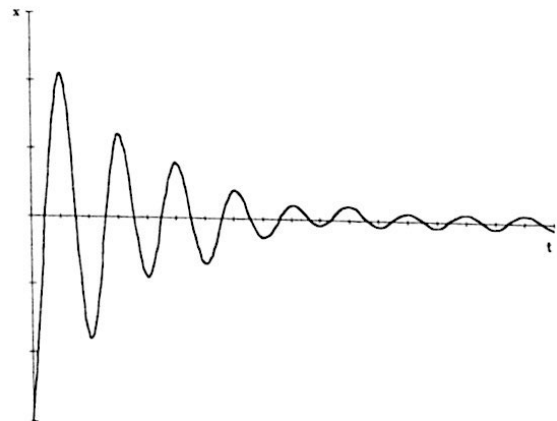


Fig. 2

Se observa que la respuesta del sistema a la perturbación externa, oscila, y a su vez, decae en el tiempo, razón por la cual se sugiere un sistema de amortiguación vertical de vibraciones para la coordenada del centro de masa y un sistema de giroscopio que amortigüe las vibraciones angulares.

Considerando las soluciones anteriores y ubicando el modelo teórico en un sistema de referencia absoluto sobre el punto G, se determinó para el giróscopo las ecuaciones de Euler que rigen el movimiento para este modelo. Para ello se usó la segunda ecuación de la mecánica<sup>[2]</sup>

$$\sum \vec{M}_p = \Pi_p \vec{\alpha} + \vec{\omega} \times \Pi_p \vec{\omega} + \vec{r}_{cm/p} \times m \vec{a}_p \quad [13]$$

Usando los ángulos de Euler mostrados en la Figura 3, cuyas velocidad angular ( $\omega$ ) y la aceleración angular ( $\alpha$ ) asociadas son:

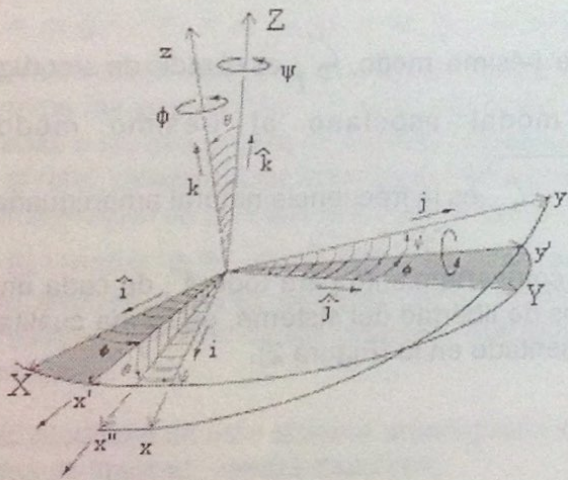


Fig. 3

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\theta} \hat{i} + \dot{\psi} \text{sen} \theta \hat{j} + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \hat{k} \\ \alpha &= \ddot{\theta} \hat{i} + (\ddot{\psi} \text{sen} \theta + \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta) \hat{j} + \\ &(\ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\psi} \text{sen} \theta) \hat{k} \end{aligned}$$

[14]

y considerando que el sistema tiene un momento de inercia de rotación permanente, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum M_x &= I_x \ddot{\theta} + (I_z - I_y) \left( \dot{\psi} \dot{\phi} \text{sen} \theta + \dot{\psi}^2 \cos \theta \text{sen} \theta \right) \\ \sum M_y &= \sum M_z = 0 \end{aligned} \quad [15]$$

Si generamos en el sistema una pequeña perturbación que modifique su posición de equilibrio, para estudiar el comportamiento de dicha perturbación en función del tiempo y además tomamos una velocidad  $w_x = w_0$  constante, siendo  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$  los vectores unitarios que expresan la dirección de los ejes perturbados, tenemos:

$$I_y \dot{\hat{e}}_y + (I_x - I_z) \omega_0 \hat{e}_z = 0 \quad [16]$$

$$I_z \dot{\hat{e}}_z + (I_y - I_x) \omega_0 \hat{e}_y = 0 \quad [17]$$

Derivando la ecuación [16], y sustituyendo en la ecuación que se genera, el despeje de  $\dot{\hat{e}}_z$  producto de la ecuación [17] tenemos:

$$\ddot{\hat{e}}_y + \frac{(I_x - I_z)(I_x - I_y)}{I_y I_z} \omega_0^2 \hat{e}_y = 0 \quad [18]$$

esta ecuación puede escribirse de la forma siguiente:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \quad [19]$$

donde:

$$k^2 = \frac{(I_x - I_z)(I_x - I_y)}{I_y I_z} \omega_0^2 \quad [20]$$

sustituyendo el tensor de inercia del sistema tenemos que:

$$k = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 - c^2 + (b^2 c^2 / a^2)}{a^2 + b^2 + c^2 + (b^2 c^2 / a^2)}} \quad [21]$$

en el cual el valor de K es siempre positivo ( $K > 0$ ), ya que se cumple que  $a \gg c$  y  $a \gg b$ , lo que nos evidencia una frecuencia de oscilación perturbada y una tendencia a restablecer el estado de equilibrio dinámico.

### DISEÑO DEL SISTEMA DE AMORTIGUACIÓN DE VIBRACIONES PARA EQUIPOS DE ALTA SENSIBILIDAD

La base mecánica consta de un giroscopio [Figura 4] con suspensión tipo Cardán, el cual consiste esencialmente en un sólido de revolución instalado de manera tal que su centro de gravedad permanece fijo con relación a un soporte, mientras que el sólido describe un movimiento general de rotación alrededor de dicho punto. La mayor cantidad de masa debe estar concentrada en la plomada hecha de hierro fundido, que conserva la energía cinética del sistema. Los cojinetes exteriores e interiores son cuadrados y de hierro. Sus medidas variarán según el espacio disponible.

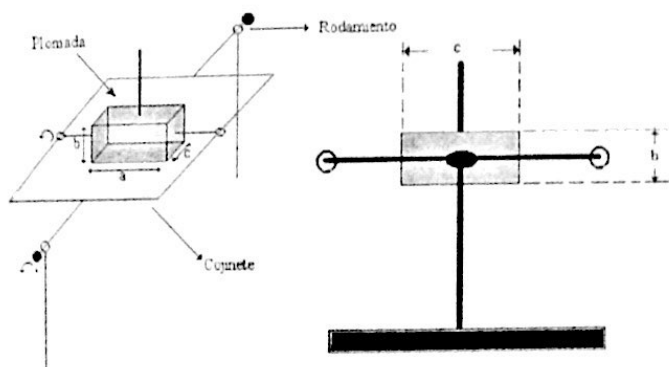


Fig. 4

Para las uniones de las piezas del giroscopio y del mismo con la suspensión se utilizarán rodamientos<sup>[5]</sup>. La amortiguación vertical la proporcionan cuatro resortes de acero de alto carbono AS-8, cuyo esfuerzo cortante admisible es de  $16 \times 10^4$  lb/pulg<sup>2</sup>, con un módulo de torsión de  $11.5 \times 10^6$  lb/pulg<sup>2</sup> y moldeado de poliuretano semirígido (goma espuma). Para evitar valores de indexación bajos es recomendable que el poliuretano sea moldeado en frío y no en caliente.

El sistema de amortiguación de vibraciones está diseñado de la siguiente manera [Figura 5]:

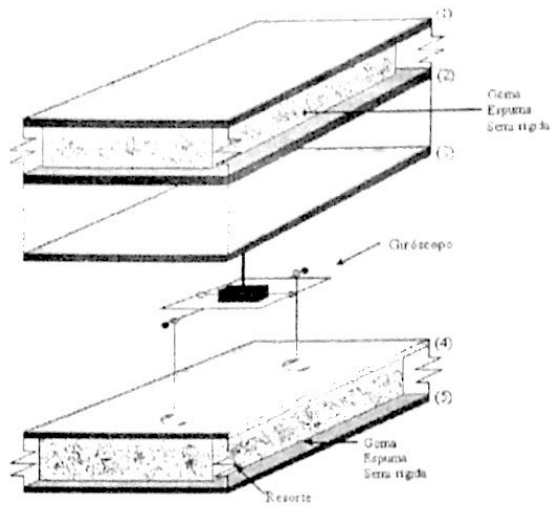


Fig. 5

\* Una placa de aluminio (1) a la cual se acoplan en sus esquinas cuatro resortes AS-8, que están sujetos a su vez a la placa superior donde se ubicará el equipo de alta sensibilidad (2). Para evitar la vibración superior, se colocó un relleno de goma espuma semirígida entre estas dos placas.

\* El giroscopio se unirá al equipo de alta sensibilidad (3) por medio de una barra de hierro fijada en el centro de la placa inferior del mencionado equipo. Por su parte, el cojinete exterior, se ubicará sobre dos barras de hierro que se fijarán a una placa (4).

\* Entre las placas de aluminio (4) y (5) se colocará un relleno de goma espuma semi-rígida, y dichas placas se unen entre si por medio de cuatro resortes AS-8 dispuestos en las esquinas. La placa (5) deberá ser adaptada al piso del sistema primario en movimiento.

## CONCLUSIONES

En la búsqueda de satisfacer las exigencias de continuidad de funciones y resguardo físico a equipos de alta sensibilidad, que, generalmente representan una elevada inversión, el modelo teórico presentado ofrece una solución de mínimo costo, adaptable a cualquier montaje que opere sobre un sistema móvil primario y garantiza una reducción notable en las vibraciones generadas por dicho sistema debido a perturbaciones externas.

El sistema de amortiguación de vibraciones no necesita de un mantenimiento frecuente, ya que el mismo debería ser realizado con los más óptimos materiales, garantizando así, la calidad y resistencia de éste. No obstante recomendamos una revisión preventiva anual, en donde, de ser necesario, se reemplazarán los resortes AS-8 y/o la goma espuma.

Algunas de las tantas aplicaciones de dicho sistema podrían ser en equipos de instrumentación médica, cámaras de video, transporte de sustancias químicas, reproductores con CD, etc.

## AGRADECIMIENTO

Agradecemos especialmente a Soledad Arrúe por su ayuda en el desarrollo del presente diseño, a

Demóstenes Quijada por su continuo apoyo y a Alejandro Torres por todo el apoyo y material bibliográfico suministrado.

## REFERENCIAS

1 E-mail: encastro@ucab.edu.ve

2 HIBELLER, R.C.; *Mecánica para Ingenieros. Dinámica*. Edit. Prentice Hall.

3 THOMSON, W. T.; *Teoría de Vibraciones, Aplicaciones*. Edit. Prentice Hall.

4 ROCA & LEON.; *Vibraciones Mecánicas*; Edit. Limusa

5 MOTT, Robert L.; *Diseño de Elementos de Maquinas*. Edit. Prentice Hall.

6 MOTT, Robert L.; *Resistencia de Materiales Aplicada*. Edit. Prentice Hall.

7 INMAN, D.; *Engineering Vibration*; Edit. Prentice Hall.

8 EDWARDS & PENNEY; *Ecuaciones Diferenciales Elementales*; Edit. Prentice Hall.