SOLUCIONES DEL MEDIO CONTINUO APLICABLES A PERFILES DE CARGA GENERALIZABLES, A PARTIR DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE MURASHEV, SIGALOV Y BAYKOV. PARTE II

■ P.F. Hummelgens
Profesor de Matemáticas, UNIMET y USB

■ M.Paparoni
Profesor de las Escuelas de Ingeniería Civil, UNIMET, UCAB (CIDI)

RESUMEN

Se presentan soluciones generalizadas del Método del Continuo, correspondientes a la Ecuación Diferencial de un Pórtico Prismático desarrollada por los autores rusos Murashev, Sigalov y Baykov, a través del empleo de series Hipergeométricas. En trabajos anteriores publicados en esta misma revista se habían obtenido soluciones particulares correspondientes a sólo ciertos perfiles de carga lateral representables por distribuciones lineales (Uniforme y Triangular). En el presente trabajo se extienden dichas soluciones a perfiles monómicos representables por funciones potenciales con exponentes reales no negativos que pueden tomar valores cualesquiera, eliminando las inestabilidades numéricas que antes se presentaban. En futuros artículos ofreceremos soluciones correspondientes a cargas concentradas singulares o múltiples.

SUMMARY

The authors present Solutions to the Differential Equations of Murashev, Sigalov and Baykov describing the behavior of framed structures with constant properties along their heights, subject to continuous lateral loads profiled as power functions with real, non-negative exponents.

In former papers published by the same authors in this magazine, solutions corresponding to linear pro-

files were presented. This article adds the general solutions corresponding to real non-negative exponents. Particular solutions corresponding to single or multiple concentrated loads will be developed for future articles.

INTRODUCCIÓN

Soluciones llamadas del Método del Continuo existen en la literatura en abundancia y, en particular, el segundo de los autores desarrolló hace tiempo (Paparoni, 1992) un conjunto de soluciones, mezcla de expresiones exponenciales y polinómicas relativamente sencillas. (exponenciales + polinomios de cortante + polinomios de flexión)

Estas expresiones presentaron la novedad de separar las porciones Homogénea, Cortante y Flectora de las soluciones, permitiendo interpretaciones variadas sobre la conducta estructural de los Pórticos actuando como Sistemas.

Dichas soluciones fueron paulatinamente contrastadas y mejoradas comparando sus resultados con soluciones matriciales, ello se hizo a lo largo de una serie abundante de trabajos especiales de grado de la UCV, la UNIMET y la UCAB.

Esas soluciones, de fácil empleo práctico por su sencillez, presentaban inestabilidades numéricas con los pórticos de bajo acoplamiento (valores de I bajos), para algunos casos de carga.

El mismo Autor extendió esas mismas expresiones para casos más generales de exponentes enteros positivos para monomios de carga potenciales, y a exponentes no enteros para intervalos acotados. (Trabajo no publicado, Paparoni, 2000)

Lo aquí presentado ahora resuelve las inestabilidades encontradas y generaliza las soluciones a una gama de exponentes muy amplia.

Estas situaciones hacen pensar que las soluciones anteriormente obtenidas no eran completas, aunque fuesen prácticamente satisfactorias.

El lector puede preguntarse entonces: ¿Cuál puede ser la utilidad ingenieril de estas nuevas soluciones? La respuesta es relativamente sencilla: utilizando las soluciones para perfiles monómicos aquí obtenidas será posible aproximar expresiones funcionales o conjuntos de datos numéricos semejantes a los que se obtienen para los perfiles de carga que se originen de los análisis dinámicos modales de edificios. Para ello se pueden generar polinomios que puedan esos perfiles de carga, con distintos grados de aproximación si utilizamos ajustes convenientes por mínimos cuadrados.

De esta forma será posible investigar, con amplitud y relativa facilidad, la conducta de sistemas aporticados sujetos a perfiles de carga lateral complicados. Se pueden así realizar de una manera bastante rápida y eficiente estudios sistémicos de pórticos sujetos a acciones dinámicas. También será posible transmitir en una forma fuertemente condensada la información referente a perfiles de carga complejos, originados de análisis dinámicos modales en estructuras, sin tener que apelar a largas listas de información digital. Podremos aproximar dichos perfiles con ajustes polinámicos por mínimos cuadrados, las soluciones que buscamos serán entonces combinaciones lineales de las expresiones que aquí presentamos.

Los resultados clarificadores de la conducta de pórticos, ya logrados anteriormente con las soluciones originales incompletas, pueden seguramente extenderse así a casos totalmente generales.

Los resultados obtenidos hasta ahora con perfiles lineales nos muestran claramente que las estructuras aporticadas no contienen categorías separadas de comportamiento, sino una relativamente suave transición de una categoría hacia otra (pórticos, muros acoplados, estructuras duales etc.). Es bien sabido que estas categorizaciones adoptadas por las normas sísmicas hacen que pasemos, a veces bruscamente, de un nivel de cargas laterales a otro, basándonos únicamente en descripciones verbales y no en expresiones numéricas.El desarrollo matemático aquí presentado fue realizado por el primer autor, una vez establecidos con el segundo autor los objetivos y los casos de carga de interés estructural.

1) INTRODUCCIÓN

En un trabajo anterior ([1]), consideramos el problema de valores en la frontera planteado por la ecuación diferencial de un pórtico (como propuesto por MURASHEV-SIGALOV-BAYKOV ([2]), sujeta a ciertas condiciones de borde, y para cargas de la forma

$$q(x) = \hat{q}\left(\frac{x}{H}\right)^n \qquad (1)$$

con $n \geq 0$ un entero. En el presente trabajo nos proponemos extender nuestros resultados anteriores al caso que n sea cualquier número real no negativo.

Veremos que esta extensión lleva de manera natural a la introducción de las funciones hipergeométricas generalizadas implementadas en MATHEMATICA (mientras que, desde luego, la función factorial queda reemplazada por la función gamma)

Con la notación de [1], nuestro problema es el de resolver la ecuación diferencial

$$u^{(4)}(\xi)=\lambda^2 u''(\xi)=g(\xi)\ ;\ \ 0\le\xi\le 1 \qquad (2)$$

con

$$g(\xi)=H^4\hat{q}\left[\xi^n+\lambda^2 f(\mu)\left\{-\xi^{n+2}+(n+2)\xi-(n+1)\ \right\}\right] \quad (3)$$

donde

$$f(\mu)=\frac{\mu}{(1+\mu)(n+1)(n+2)} \qquad (4)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$u(0)=u'(0)=0,\quad u''(1)=0,u'''(0)=-\frac{H^4\hat{q}}{n+1} \qquad (5)$$

introduciendo las funciones

$$L_m(\xi)=-\frac{\xi^{m+2}}{(m+1)(m+2)};\qquad m\ge 0 \qquad (6)$$

$$I_m(\xi)=\int_0^{\xi} senh[\lambda(\xi-t)]\,t^m dt\quad ;\quad m\ge 0 \qquad (7)$$

encontramos para la solución $u(\xi)$ del problema de valores en la frontera la expresión

$$\left.\begin{aligned}
&u(\xi)=\frac{H^4\hat{q}}{\lambda^3}[I_n(\xi)+\lambda L_n(\xi)]+\frac{H^4\hat{q}}{\lambda}f(\mu)[-I_{n+2}(\xi)-\lambda L_{n+2}(\xi)]\\
&+\frac{H^4\hat{q}}{\lambda}f(\mu)(n+2)[I_1(\xi)+\lambda L_1(\xi)]-\frac{H^4\hat{q}}{\lambda}f(\mu)(n+1)[I_0(\xi)+\lambda L_0(\xi)]\\
&\frac{H^4\hat{q}}{\lambda^3}\left[-\frac{\operatorname{senh}(\lambda\xi)-\lambda\xi}{n+1}+\frac{\cosh(\lambda\xi)-1}{\cosh\lambda}\left(\frac{\operatorname{senh}\lambda}{n+1}-I\right)\right]
\end{aligned}\right\}(8)$$

donde

$$I=I_n(1)+\lambda^2 f(\mu)[-I_{m+2}(1)+(n+2)I_1(1)-(n+1)I_0(1)] \quad (9)$$

Este resultado, obtenido en [1], es válido para $n\ge 0$ un número real arbitrario.

La mayor dificultad en el trabajo anterior fue la obtención, a partir de (8),(9) de expresiones para $u(\xi)$ y sus primeras tres derivadas, aptas para la representación gráfica de las mismas para todo el rango $0\le\lambda<\infty$ del parámetro λ. En [1] no comentamos sobre este aspecto del trabajo, pero es precisamente en la resolución de este problema que surgen las funciones hipergeométricas mencionadas arriba.

2) FÓRMULAS PARA λ PEQUEÑO

De 1.(7) se obtienen las relaciones

$$\left.\begin{aligned}
&I_0(\xi)=\frac{1}{\lambda}[\cosh(\lambda\xi)-1],I_1(\xi)=\frac{senh(\lambda\xi)-\lambda\xi}{\lambda^2},\\
&I_m(\xi)=-\frac{\xi^m}{\lambda}+\frac{m(m-1)}{\lambda^2}I_{m-2}(\xi)\quad;\quad m\ge 2
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$I'_m(\xi)=mI_{m-1}(\xi)\quad;\quad m\ge 1 \qquad (2)$$

Para $m\ge 0$ un entero, desarollando $I_m(\xi)$ en serie de Taylor centrada en $\xi=0$, utilizando (1),(2), encontramos (como ya mencionamos en [1]) que

$$\frac{\lambda^{m+1}}{m!}I_m(\xi)=senh(\lambda\xi)-\sum_{k=0}^{(m-1)/2}\frac{(\lambda\xi)^{2k+1}}{(2k+1)!}\ \text{(m entero impar)} \quad (3)$$

$$\frac{\lambda^{m+1}}{m!}I_m(\xi)=\cosh(\lambda\xi)-\sum_{k=0}^{m/2}\frac{(\lambda\xi)^{2k}}{(2k)!}\ \text{(m entero par)} \quad (4)$$

$$I_m(\xi)=\lambda m!\,\xi^{m+2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\xi)^{2k}}{(m+2k+2)!};m=0,1,2,3.........(5)$$

De (1),1.(6) tenemos

$$L'_m(\xi)=mL_{m-1}(\xi)\quad;\quad m\ge 1 \qquad (6)$$

$$I_m(\xi)+\lambda L_m(\xi)=\frac{\lambda^2}{(m+1)(m+2)}\ I_{m+2}(\xi) \qquad (7)$$

Evidentemente (3), (4) no tienen sentido para m no entero (aún no reemplazando m! Por $\Gamma(m+1)$), pero (5) persiste para $m\ge 0$ arbitrario en la forma

$$I_m(\xi)=\lambda\Gamma(m+1)\xi^{m+2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\xi)^{2k}}{\Gamma(m+2k+3)};m\ge 0 \qquad (8)$$

Por el desarrollo de senh $\left[\lambda(\xi-t)\right]$ en serie de potencias de $\xi-t$, para comprobar (8) basta comprobar que

$$\int_0^\xi (\xi-t)^{2k+1} t^m dt = \frac{(2k+1)!\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+2k+3)}\xi^{m+2k+2} \qquad (9)$$

Haciendo el cambio de variable $t \to s = \dfrac{t}{\xi}$ en la integral, ésta se convierte en

$$\xi^{m+2k+2}\int_0^1 s^m (1-s)^{2k+1} ds = \xi^{m+2k+2} B(m+1,2k+2)$$
$$= \xi^{m+2k+2}\frac{\Gamma(2k+2)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+2k+3)}$$

usando una bien conocida propiedad de la función beta ([3]). Comprobamos entonces(9) para todo $k \geq 0$ entero y $m \geq 0$ real, y (8) queda establecida. Para k=0, (9) da

$$\int_0^\xi (t-\xi) t^m dt = L_m(\xi); \qquad m \geq 0 \qquad (10)$$

Introducimos ahora la función

$$S_m(\xi) = \frac{1}{\lambda} I_m(\xi) + L_m(\xi); \qquad m \geq 0 \qquad (11)$$

es decir , según (8), 1.(6),

$$S_m(\xi) = \Gamma(m+1)\,\xi^{m+2}\sum_{R=1}^{\infty}\frac{(\lambda\xi)^{2k}}{\Gamma(m+2k+3)}; m \geq 0 \qquad (12)$$

de (7),(11) tenemos

$$S_m(\xi) = \frac{\lambda}{(m+1)(m+2)} I_{m+2}(\xi) \qquad (13)$$

y de (2), (6), (11), (13) tenemos

$$\left.\begin{aligned} S'_m(\xi) &= \frac{\lambda^2}{m+1}\left[-L_{m+1}(\xi) + S_{m+1}(\xi)\right], \\ S'_m(\xi) &= mS_{m-1}(\xi); \qquad m \geq 1 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

De (6),(14),(15) tenemos

$$S''_m(\xi) = \lambda^2\left[-L_m(\xi) + S_m(\xi)\right] \qquad (15),$$

y de (14),(16),1.(6) se sigue que

$$S'''_m(\xi) = \frac{\lambda^2}{m+1}\left[\xi^{m+1} + \lambda^2\left\{-L_{m+1}(\xi) + S_{m+1}(\xi)\right\}\right] \qquad (16)$$

De (7),(11) tenernos

$$I_m(\xi) + \lambda L_m(\xi) = \frac{\lambda^3}{(m+1)(m+2)}\left[-L_{m+2}(\xi) + S_{m+2}(\xi)\right] \qquad (17)$$

Usando las fórmulas obtenidas, podemos escribir 1.(8),1.(9) en la forma

$$\left.\begin{aligned} u(\xi) &= \frac{H^4\hat{q}}{(n+1)(n+2)}\left[-L_{n+2}(\xi) + (n+2)L_1(\xi)\right] \\ &+ \frac{H^4\hat{q}}{(1+\mu)(n+1)(n+2)}\left[S_{n+2}(\xi) - (n+2)S_1(\xi)\right] - (n+1)H^4\hat{q}f(\mu)S_0(\xi) \\ &+ \frac{H^4\hat{q}}{\cosh\lambda}P(\lambda,\mu)\left[-L_0(\xi) + S_0(\xi)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (18$$

Donde

$$\left.\begin{aligned} P(\lambda,\mu) &= \frac{senh\lambda}{\lambda(n+1)} - \frac{1}{\lambda}I = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{\lambda^2}{(1+\mu)(n+1)}\left[-L_1(1) + S_1(1)\right] + L_n(1) - S_n(1) \\ &- \lambda^2 f(\mu)\left[L_{n+2}(1) - S_{n+2}(1) - (n+1)\left\{-L_0(1) + S_0(1)\right\}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Y luego

$$\left.\begin{aligned} u'(\xi) &= \frac{H^4\hat{q}}{n+1}\left[-L_{n+1}(\xi) + L_0(\xi)\right] + \frac{H^4\hat{q}}{(1+\mu)(n+1)}\left[S_{n+1}(\xi) - S_0(\xi)\right] \\ &- \lambda^2(n+1)H^4\hat{q}f(\mu)\left[-L_1(\xi) + S_1(\xi)\right] \\ &+ \frac{H^4\hat{q}}{\cosh\lambda}P(\lambda,\mu)\left[\xi + \lambda^2\left\{-L_1(\xi) + S_1(\xi)\right\}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (20$$

$$\left.\begin{aligned} u''(\xi) &= -H^4\hat{q}L_n(\xi) + \frac{H^4\hat{q}}{1+\mu}S_n(\xi) - \lambda^2\frac{H^4\hat{q}}{(1+\mu)(n+1)}\left[-L_1(\xi) + S_1(\xi)\right] \\ &- \lambda^2(n+1)H^4\hat{q}f(\mu)\left[-L_0(\xi) + S_0(\xi)\right] - \frac{H^4\hat{q}}{n+1}\xi \\ &+ \frac{H^4\hat{q}}{\cosh\lambda}P(\lambda,\mu)\left[1 + \lambda^2\left\{-L_0(\xi) + S_0(\xi)\right\}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (21$$

$$\left.\begin{aligned}&u'''(\xi)=H^4\hat{q}\frac{\xi^{n+1}}{n+1}+\lambda^2\frac{H^4\hat{q}}{(1+\mu)(n+1)}\left[-L_{n+1}(\xi)+S_{n+1}(\xi)\right]\\&-\lambda^2\frac{H^4\hat{q}}{(1+\mu)(n+1)}\left[-L_0(\xi)+S_0(\xi)\right]-\lambda^2(n+1)H^4\hat{q}f(\mu)\left[\xi+\lambda^2\{-L_1(\xi)+S_1(\xi)\}\right]\\&-\frac{H^4\hat{q}}{n+1}+\lambda^2\frac{H^4\hat{q}}{\cosh\lambda}P(\lambda,\mu)\left[\xi+\lambda^2\{-L_1(\xi)+S_1(\xi)\}\right]\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

las formulas (18)-(22) son adecuadas para el cómputo y la representación gráfica de $u(\xi)$ y sus primeras tres derivadas para valores de $\lambda\in$ [0;eps) con eps no demasiado grande, y además sirven para graficar $u=u(\xi,\lambda,\mu)$ y sus primeras tres derivadas con respecto a ξ como función de λ (para valores fijos de ξ y μ en $[0;eps)$). Las funciones $I_m(\xi)$ y $S_m(\xi)$ (relacionadas por (13)) son representables en términos de la función hipergeométrica generalizada ([3]) en la notación de MATHEMATICA,

$$\left.\begin{aligned}&S_m(\xi)=\frac{\lambda^2\xi^{m+4}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\cdot\\&\text{HypergeometricPFQ}\left[\{1\},\left\{\frac{m+5}{2},3+\frac{m}{2}\right\},\frac{\lambda^{2\xi^2}}{4}\right]\end{aligned}\right\}\quad(23),$$

y es en esta forma que definimos $S_m(\xi)$ en nuestro programa.

3)FÓRMULAS PARA λ GRANDE ($n\geq 0$ UN ENTERO)

Es de esperar (y así lo confirman los experimentos numéricos) que 2.(18)-2.(22) no sirven para el cómputo preciso de $u(\xi)$ y sus primeras tres derivadas para valores grandes de λ. Para obtener fórmulas adecuadas para λ arbitrariamante grande, resulta útil introducir la función

$$K_m(\xi)=\frac{1}{\lambda}I_m(\xi)-\frac{\cosh(\lambda,\xi)-1}{\lambda\cosh\lambda}I_m(1);\qquad m\geq 0\quad(1)$$

De (1),1.(8),1.(9) obtenemos

$$\left.\begin{aligned}&u(\xi)=\frac{H^4\hat{q}}{\lambda^2}K_n(\xi)-H^4\hat{q}f(\mu)K_{n+2}(\xi)+(n+2)H^4\hat{q}f(\mu)K_1(\xi)\\&-(n+1)H^4\hat{q}f(\mu)K_0(\xi)-\frac{H^4\hat{q}}{\lambda^3(n+1)}\left(\frac{senh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh\lambda}+\tanh\lambda\right)\\&+\frac{H^4\hat{q}}{\lambda^2(n+1)}\xi+\frac{1}{\lambda^2}H^4\hat{q}L_n(\xi)\\&+H^4\hat{q}f(\mu)\left[-L_{n+2}(\xi)+(n+2)L_1(\xi)-(n+1)L_0(\xi)\right]\end{aligned}\right\}(2)$$

De 1,2.(7) tenemos

$$K_m(\xi)=\frac{\lambda^2}{(m+1)(m+2)}K_{m+2}(\xi)-L_m(\xi)\frac{\cosh(\lambda,\xi)-1}{\cosh\lambda}L_m(1)\quad(3)$$

De (1),2.(1) tenemos

$$K_0(\xi)=\frac{\cosh(\lambda\xi)-1}{\lambda^2\cosh\lambda}\quad(4)$$

De (1)-(4) tenemos

$$\left.\begin{aligned}&u(\xi)=\frac{H^4\hat{q}}{(1+\mu)(n+1)(n+2)}\left[K_{n+2}(\xi)-K_0(\xi)\right]+\frac{H^4\hat{q}}{\lambda^2(1+\mu)(n+1)}\xi\\&-\frac{H^4\hat{q}}{\lambda^3(1+\mu)(n+1)}\cdot\left(\frac{senh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh\lambda}+\tanh\lambda\right)\\&+H^4\hat{q}f(\mu)\left[-L_{n+2}(\xi)+(n+2)L_1(\xi)-(n+1)L_0(\xi)\right]\end{aligned}\right\}(5)$$

Para $m\geq 2$ un entero tenemos, de (1), (4), 2.(3),2.(4),

$$\left.\begin{aligned}&K_m(\xi)-K_0(\xi)=-m!\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{\lambda^{-m+2k-2}\xi^{2k}}{(2k)!}\\&+m!\frac{\cosh(\lambda\xi)-1}{\cosh\lambda}\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1}\frac{\lambda^{-m+2k-2}}{(2k)!};\qquad m\geq 2\,entero\quad par\end{aligned}\right\}(6)$$

$$\left.\begin{aligned}&K_m(\xi)-K_0(\xi)=m!\sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}}\frac{\lambda^{-m+2k-1}\xi^{2k+1}}{(2k+1)!}\\&+m!\frac{\cosh(\lambda\xi)-1}{\cosh\lambda}\sum_{k=0}^{\frac{(m-1)}{2}-1}\frac{\lambda^{-m+2k-1}}{(2k+1)!}\\&+\frac{m!}{\lambda^{m+2}}\left[\frac{senh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh\lambda}+\tan\lambda\right];\ m\geq 3 entero\quad impar\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

y las expresiones para las primeras tres derivadas de $K_m(\xi)-K_0(\xi)$ que se derivan de (6),(7). Para n entero, estas expresiones, junto con (5), sirven para el cómputo preciso y la representación gráfica de $u(\xi)$ y sus tres primeras derivadas (cuyas formas explícitas presentaremos más adelante) para $\lambda>1$, y para graficar $u=u(\xi,\lambda,\mu)$ y sus tres primeras derivadas con respecto a ξ en función λ (para valores fijos de ξ y μ) en $1<\lambda<\infty$. Este fue nuestro procedimiento para obtener los resultados descritos en [1].

De (6),(7) obtenemos las fórmulas siguientes.

Para $m\geq 2$ un entero par:

$$K'_m(\xi)-K'_0(\xi)=-m!\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{\lambda^{-m+2k-2}\xi^{2k-1}}{(2k-2)!}+m!\frac{senh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1}\frac{\lambda^{-m+2k-1}}{(2k)!}\quad(8)$$

$$K''_m(\xi)-K''_0(\xi)=-m!\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{\lambda^{-m+2k-2}\xi^{2k-2}}{(2k-2)!}+m!\frac{\cosh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1}\frac{\lambda^{-m+2k}}{(2k)!}\quad(9)$$

$$\left.\begin{aligned}&K'''_m(\xi)-K'''_0(\xi)=-m!\sum_{k=2}^{\frac{m}{2}}\frac{\lambda^{-m+2k-2}\xi^{2k-3}}{(2k-3)!}\\&+m!\frac{senh(\lambda\xi)}{\cos\lambda}\sum_{R=0}^{\frac{m}{2}-1}\frac{\lambda^{-m+2k+1}}{(2k)!}\ ,\ m\geq 4\ par\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

$$K'''_2(\xi)-K'''_0(\xi)=\frac{2senh(\lambda\xi)}{\lambda\cosh\lambda}\quad(11)$$

Para $m\geq 3$ un entero impar:

$$\left.\begin{aligned}&K'_m(\xi)-K'_0(\xi)=-m!\sum_{k=0}^{\frac{(m-1)}{2}}\frac{\lambda^{-m+2k-1}\xi^{2k}}{(2k)!}\\&+m!\frac{senh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\sum_{k=0}^{\frac{(m-1)}{2}-1}\frac{\lambda^{-m+2k}}{(2k+1)!}+\frac{m!}{\lambda^{m+1}}\frac{\cosh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh\lambda}\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

$$\left.\begin{aligned}&K''_m(\xi)-K''_0(\xi)=-m!\sum_{k=1}^{\frac{(m-1)}{2}}\frac{\lambda^{-m+2k-1}\xi^{2k-1}}{(2k-1)!}\\&+m!\frac{\cosh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\sum_{k=0}^{\frac{(m-1)}{2}-1}\frac{\lambda^{-m+2k+1}}{(2k+1)!}+\frac{m!}{\lambda^{m}}\frac{senh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh\lambda}\end{aligned}\right\}\quad(13),$$

$$\left.\begin{aligned}&K'''_m(\xi)-K'''_0(\xi)=-m!\sum_{k=1}^{\frac{(m-1)}{2}}\frac{\lambda^{-m+2k-1}\xi^{2k-2}}{(2k-2)!}\\&+m!\frac{senh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\sum_{k=0}^{\frac{(m-1)}{2}-1}\frac{\lambda^{-m+2k+2}}{(2k+1)!}+\frac{m!}{\lambda^{m-1}}\frac{\cosh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh\lambda}\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

4. FÓRMULAS λ PARA GRANDE ($n\geq o$ ARBITRARIO)

Consideremos ahora el cómputo de $K_m(\xi)-K_0(\xi)$ para $m\geq 2$ no necesariamente un entero. Sea [m] la parte estera de m, entonces $m=[m]+\alpha$ con $0\leq\alpha<1$ de 2.(8) tenemos

$$\frac{\lambda^{m+1}}{\Gamma(m+1)}I_m(\xi)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(\lambda,\xi)^{[m]+\alpha+2\ell+2}}{\Gamma([m]+\alpha+2\ell+3)}\quad(1)$$

Si [m] es par, entonces escribimos $[m]+2\ell+2=2k$ Y (1) lleva a

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\lambda^{m+1}}{\Gamma(m+1)}I_m(\xi)=\phi_0(\xi)-\sum_{k=0}^{\frac{[m]}{2}}\frac{(\lambda\xi)^{2k+\alpha}}{\Gamma(2k+\alpha+1)},\\&\phi_0(\xi)\sum_{R=0}^{\infty}\frac{(\lambda,\xi)^{2R+\alpha}}{\Gamma(2R+\alpha+1)}\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Observemos que si m es un entero par, entonces $\alpha=0$, $\phi_0(\xi)=\cosh(\lambda,\xi)$ y (2) coincide con 2.(4). Si [m] es impar, entonces escribimos $[m]+2\ell+2=2k+1$ y (1) lleva a

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\lambda^{m+1}}{\Gamma(m+1)} I_m(\xi) = \phi_1(\xi) - \sum_{k=0}^{\frac{([m]-1)}{2}} \frac{(\lambda,\xi)^{2k+1+\alpha}}{\Gamma(2k+\alpha+2)},\\
&\phi_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda,\xi)^{2k+1+\alpha}}{\Gamma(2k+\alpha+2)}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Observemos que si m es un entero impar. entonces $\alpha=0,\ \phi_1(\xi)=senh(\lambda\xi)$ y (3) coincide con 2.(3).

De (2), 3.(1) tenemos

$$\left.\begin{aligned}
&K_m(\xi)-K_0(\xi) = \frac{\Gamma(m+1)}{\lambda^{m+2}}\left[\phi_0(\xi) - \frac{\cosh(\lambda\xi)-1}{\cosh\lambda}\phi_0(1)\right] - \frac{\Gamma(m+1)\xi^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\lambda^{[m]+2}}\\
&-\Gamma(m+1)\sum_{k=1}^{\frac{[m]}{2}} \frac{\lambda^{-[m]+2k-2}\xi^{2k+\alpha}}{\Gamma(2k+\alpha+1)}\\
&+\Gamma(m+1)\frac{\cosh(\lambda\xi)-1}{\cosh\lambda}\sum_{k=0}^{\frac{[m]}{2}-1} \frac{\lambda^{-[m]+2k-2}}{\Gamma(2k+\alpha+1)};[m]\geq 2\,par
\end{aligned}\right\} (4)$$

lo que se reduce a 3.(6) si $\alpha=0\ \ (m=[m])$ .De (3), 3.(1) tenemos

$$\left.\begin{aligned}
&K_m(\xi)-K_0(\xi) = \frac{\Gamma(m+1)}{\lambda^{m+2}}\left[\phi_1(\xi) - \frac{\cosh(\lambda\xi)-1}{\cosh\lambda}\phi_1(1)\right]\\
&-\Gamma(m+1)\sum_{k=0}^{\frac{([m]-1)}{2}} \frac{\lambda^{-[m]+2k-1}\xi^{2k+1+\alpha}}{\Gamma(2k+\alpha+2)}\\
&+\Gamma(m+1)\frac{\cosh(\lambda\xi)-1}{\cosh\lambda}\sum_{k=0}^{\frac{([m]-1)}{2}-1} \frac{\lambda^{-[m]+2R-1}}{\Gamma(2k+\alpha+2)};[m]\geq 3impar
\end{aligned}\right\} (5)$$

lo que se reduce a 3.(7) si $\alpha=0\ \ (m=[m])$

De (2), (3) encontramos las relaciones

$$\phi_0'(\xi) = \frac{\lambda^{\alpha}\xi^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \lambda\phi_1(\xi) \qquad (6)$$

$$\phi'_1(\xi) = \lambda\phi_0(\xi) \qquad (7)$$

De (4),(6),(7) encontramos, para $[m]\geq 2$ par:

$$\left.\begin{aligned}
&K_m'(\xi)-K_0'(\xi) = \frac{\Gamma(m+1)}{\lambda^{m+1}}\left[\phi_1(\xi) - \frac{senh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_0(1)\right]\\
&-\Gamma(m+1)\sum_{k=1}^{\frac{[m]}{2}} \frac{\lambda^{-[m]+2k-2}\xi^{2k+\alpha-1}}{\Gamma(2k+\alpha)}\\
&+\Gamma(m+1)\frac{senh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\sum_{k=0}^{\frac{[m]}{2}-1} \frac{\lambda^{-[m]+2k-1}}{\Gamma(2k+\alpha+1)};[m]\geq 2\,par
\end{aligned}\right\} (8)$$

$$\left.\begin{aligned}
&K_m''(\xi)-K_0''(\xi) = \frac{\Gamma(m+1)}{\lambda^{m}}\left[\phi_0(\xi) - \frac{\cosh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_0(1)\right]\\
&-\Gamma(m+1)\sum_{k=1}^{\frac{[m]}{2}} \frac{\lambda^{-[m]+2k-2}\xi^{2k+\alpha-2}}{\Gamma(2k+\alpha-1)}\\
&+\Gamma(m+1)\frac{\cosh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\sum_{k=0}^{\frac{[m]}{2}-1} \frac{\lambda^{-[m]+2k}}{\Gamma(2k+\alpha+1)};[m]\geq 2par
\end{aligned}\right\} (9)$$

$$\left.\begin{aligned}
&K_m'''(\xi)-K_0'''(\xi) = \frac{\Gamma(m+1)}{\lambda^{m-1}}\left[\phi_1(\xi) - \frac{senh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_0(1)\right]\\
&-\Gamma(m+1)\sum_{k=2}^{\frac{[m]}{2}} \frac{\lambda^{-[m]+2k-2}\xi^{2k+\alpha-3}}{\Gamma(2k+\alpha-2)}\\
&+\Gamma(m+1)\frac{senh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\sum_{k=0}^{\frac{[m]}{2}-1} \frac{\lambda^{-[m]+2k+1}}{\Gamma(2k+\alpha+1)};[m]\geq 4\,par
\end{aligned}\right\} (10)$$

$$\left.\begin{aligned}
&K_m'''(\xi)-K_0'''(\xi) = \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+1}}\left[\phi_1(\xi) - \frac{senh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_0(1)\right]\\
&+(\alpha+1)(\alpha+2)\frac{senh(\lambda\xi)}{\lambda\cosh\lambda};[m]=2
\end{aligned}\right\} (11)$$

Para $\alpha=0$ (m ≥ 2 entero par) estas fórmulas se reducen a 3.(8)-3.(11)

De (5), (6),(7) encontramos, para $[m] > 3$impar :

$$\left.\begin{aligned}
&K_m'(\xi)-K_0'(\xi) = \frac{\Gamma(m+1)}{\lambda^{m+1}}\left[\phi_0(\xi) - \frac{\mathrm{senh}(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_1(1)\right]\\
&-\Gamma(m+1)\sum_{k=0}^{\frac{([m]-1)}{2}} \frac{\lambda^{-[m]+2k-1}\xi^{2k+\alpha}}{\Gamma(2k+\alpha+1)}\\
&+\Gamma(m+1)\frac{\mathrm{senh}(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\sum_{k=0}^{\frac{([m]-1)}{2}-1} \frac{\lambda^{-[m]+2k}}{\Gamma(2k+\alpha+2)};[m]\geq 3\quad \text{impar}
\end{aligned}\right\} (12)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&K''_m(\xi)-K'_0(\xi)=\frac{\Gamma(m+1)}{\lambda^m}\left[\phi_1(\xi)-\frac{\cosh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_1(1)\right]\\
&-\Gamma(m+1)\sum_{R=1}^{\frac{([m]-1)}{2}}\frac{\lambda^{-[m]+2k-1}\xi^{2k+\alpha-1}}{\Gamma(2k+\alpha)}\\
&+\Gamma(m+1)\frac{\cosh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\sum_{k=0}^{\frac{([m]-1)}{2^{-1}}}\frac{\lambda^{-[m]+2k+1}}{\Gamma(2k+\alpha+2)};[m]\geq 3\quad \text{impar}
\end{aligned}
\right\} \tag{13}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&K''_m(\xi)-K''_0(\xi)=\frac{\Gamma(m+1)}{\lambda^{m-1}}\left[\phi_0(\xi)-\frac{\operatorname{senh}(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_1(1)\right]\\
&-\Gamma(m+1)\sum_{k=1}^{\frac{([m]-1)}{2}}\frac{\lambda^{-[m]+2k-1}\xi^{2k+\alpha-2}}{\Gamma(2k+\alpha-1)}\\
&+\Gamma(m+1)\frac{\operatorname{senh}(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\sum_{k=0}^{\frac{([m]-1)}{2}-1}\frac{\lambda^{-[m]+2k+2}}{\Gamma(2k+\alpha+2)};[m]\geq 3\quad \text{impar}
\end{aligned}
\right\} \tag{14}
$$

Para $\alpha = 0$ (m ≥ 3 entero) estas fórmulas se reducen a 3.(12)-3.(14).

De 1.(6), 3.(5) obtenemos

$$
\left.
\begin{aligned}
&u'(\xi)=\frac{H^4\hat{q}}{(1+\mu)(n+1)(n+2)}\left[K'_{n+2}(\xi)-K'_0(\xi)\right]+\frac{H^4\hat{q}}{\lambda^2(1+\mu)(n+1)}\\
&-\frac{H^4\hat{q}}{\lambda^2(1+\mu)(n+1)}\cdot\frac{\cosh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh\lambda}\\
&+H^4\hat{q}f(\mu)\left[\frac{\xi^{n+3}}{n+3}-\frac{1}{2}(n+2)\xi^2+(n+1)\xi\right]
\end{aligned}
\right\} \tag{15}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&u''(\xi)=\frac{H^4\hat{q}}{(1+\mu)(n+1)(n+2)}\left[K''_{n+2}(\xi)-K''_0(\xi)\right]\\
&-\frac{H^4\hat{q}}{\lambda(1+\mu)(n+1)}\cdot\frac{senh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh\lambda}\\
&+H^4\hat{q}f(\mu)\left[\xi^{n+2}-(n+2)\xi+n+1\right]
\end{aligned}
\right\} \tag{16}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&u'''(\xi)=\frac{H^4\hat{q}}{(1+\mu)(n+1)(n+2)}\left[K'''_{n+2}(\xi)-K''_0(\xi)\right]\\
&-\frac{H^4\hat{q}}{(1+\mu)(n+1)}\cdot\frac{\cosh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh\lambda}\\
&+H^4\hat{q}f(\mu)(n+2)\left(\xi^{n+1}-1\right)
\end{aligned}
\right\} \tag{17}
$$

Las funciones $\phi_0(\xi) y \phi_1(\xi)$ definidas en (2),(3) pueden expresarse en términos de funciones hipergeométricas implementadas en MATHEMATICA:

$$\phi_0(\xi)=\frac{(\lambda\xi)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,{}_1F_2\left(1;\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2},1+\frac{\alpha}{2};\frac{\lambda^2\xi^2}{4}\right) \tag{18}$$

$$\phi_1(\xi)=\frac{(\lambda\xi)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}\,{}_1F_2\left(1;1+\frac{\alpha}{2},\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2};\frac{\lambda^2\xi^2}{4}\right) \tag{19}$$

En las fórmulas (4),(5),(8)—(14) las expresiones entre $\phi_0(\xi) y \phi_1(\xi)$ requieren llaves que involucran a

grandes de λ cuando $0<\alpha<1$ (en el caso $\alpha=0$ Im de consideraciones adicionales, ya que presentan inestabilidades numéricas para valores demasiado entero) podemos utilizar 3.(6)-3.(14) y este problema no se presenta). Estas consideraciones serán presentadas en el apéndice.

5. COMPORTAMIENTO EN FUNCIÓN DE λ

Para estudiar el comportamiento de $u(\xi)$ y sus primeras tres derivadas para $\lambda \to 0$ podemos usar las fórmulas de la sección 2. De 2.(19) tenemos

$$\lim_{\lambda\to 0} P(\lambda,\mu)=\frac{1}{n+2} \tag{1}$$

usando 1.(6) y el hecho (según 2.(12) que $lim_{\lambda\to 0}S_m(\xi)=0$. Escribiendo $u=u(\xi,\lambda,\mu)$ tenemos de (1),2.(18) que

$$lim_{\lambda\to 0}u(\xi,\lambda,\mu)=\frac{H^4\hat{q}}{(n+1)(n+2)}\left[-L_{n+2}(\xi)+(n+2)L_1(\xi)-(n+1)L_0(\xi)\right] \tag{2}$$

y es fácil comprobar que esta función coincide con la solución de 1.(2),1.(5) para $\lambda=0$, de modo que $\lim_{\lambda\to 0} u(\xi,\lambda,\mu)=u(\xi,o,u)$. De 2.(20)-2.(22) tenemos la misma propiedad de continuidad para las derivadas de $u(\xi,\lambda,\mu)$ con respecto a ξ, y

$$u'(\xi,0,\mu)=\frac{H^4\hat{q}}{n+1}\left[-L_{n+1}(\xi)+L_0(\xi)\right]+\frac{H^4\hat{q}}{n+2}\xi \tag{3}$$

$$u''(\xi,0,\mu)=-H^4\hat{q}L_n(\xi)-\frac{H^4\hat{q}}{n+1}\xi+\frac{H^4\hat{q}}{n+2} \tag{4}$$

$$u'''(\xi,0,\mu)=\frac{H^4\hat{q}}{n+1}\left(\xi^{n+1}-1\right) \quad (5)$$

Observemos que los valores límites para $\lambda \to 0$ dadas por (2)-(5) no dependen de μ.

Para estudiar el comportamiento de $u(\xi)$ y sus primeras tres derivadas para $\lambda \to \infty$ podemos usar las fórmulas de las secciones 3,4 y el apéndice. Tenemos

$$lim_{\lambda\to\infty}\frac{\cosh(\lambda\xi)-1}{\cosh\lambda}=\begin{cases}0;0\le\xi<1\\1;\xi=1\end{cases} \quad (6),$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\cosh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh\lambda}=\begin{cases}0;0<\xi\le1\\1;\xi=1\end{cases} \quad (7),$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{senh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}=\begin{cases}0;0\le\xi<1\\1;\xi=1\end{cases} \quad (8),$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{senh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh\lambda}=\begin{cases}0;0<\xi\le1\\-1;\xi=0\end{cases} \quad (9),$$

por (6)-(9), todas las expresiones a la derecha en 4.(4),4.(5),4.(8)-4.(14) que no involucran a $\phi_0(\xi)\phi_1(\xi)$, tienden a cero si $\lambda \to \infty$, y lo mismo ocurre para las expresiones a la derecha en 3.(5),4.(15)-4.(17) que no involucran a $f(\mu)$ o a $K_{n+2}(\xi)-K_0(\xi)$ y sus derivadas. Además veremos en el apéndice que las expresiones que involucran a $\phi_0(\xi)\phi_1(\xi)$ mencionadas anteriormente tienden a cero para $\lambda \to \infty$. Por consecuencia tenemos

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(K_{n+2}^{(R)}(\xi)-K_0^{(R)}(\xi)\right)=0 \;\; ; \;\; R=0,1,2,3$$

Escribiendo $V(\xi,u)=\lim_{\lambda\to\infty}u(\xi,\lambda,u)$ tenemos ahora de 3.(5),

$$v(\xi,\mu)=H^4\hat{q}f(\mu)\left[-L_{n+2}(\xi)+(n+2)L_1(\xi)-(n+1)L_0(\xi)\right] \quad (10),$$

de modo que, con (2),

$$v(\xi,\mu)=\frac{\mu}{1+\mu}u(\xi,\lambda,\mu) \quad (11),$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to\infty}u'(\xi,\lambda,\mu)=v'(\xi,\mu)=\\&=H^4\hat{q}f(\mu)\left[-(n+2)L_{n+1}(\xi)+(n+2)\right]L_0(\xi)+(n+1)\xi\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to\infty}u''(\xi,\lambda,\mu)=v''(\xi,\mu)=\\&=H^4\hat{q}f(\mu)\left[-(n+1)(n+2)L_n(\xi)-(n+2)\xi+(n+1)\right]\end{aligned}\right\} \quad (13).$$

De (2)-(4),(11) vemos que $v(\xi,\mu)$ satisface las condiciones de borde $v(0,\mu)=v'(0,\mu)=0, v''(1,\mu)=0$, pero (5),(11) implican que

$$v'''(0,\mu)=-\frac{\mu H^4\hat{q}}{(1+\mu)(n+1)} \quad (14)$$

de modo que $v(\xi,\mu)$ no satisface la cuarta condición de frontera en 1.(5). Sin embargo $v=(\xi,\mu)$ les solución de la ecuación diferencial

$$v''(\xi,\mu)=H^4\hat{q}f(\mu)\left[\xi^{n+2}-(n+2)\xi+n+1\right] \quad (15)$$

que resulta de 1.(2),1.(3) cuando $\lambda \to \infty$ De 4.(17) tenemos

$$\lim_{\lambda\to\infty}u'''(\xi,\lambda,\mu)=v'''(\xi,\mu)=\frac{\mu H^4\hat{q}}{(1+\mu)(n+1)}\left(\xi^{n+1}-1\right);0<\xi\le1 \quad (16)$$

$$u'''(0,\lambda,\mu)=-\frac{H^4\hat{q}}{n+1}=\left(1+\frac{1}{\mu}\right)v'''(o,\mu) \quad (17)$$

De 1. (2),1.(3) tenemos

$$\left.\begin{aligned}&u^{(4)}(\xi,\lambda,\mu)=\lambda^2u''(\xi,\lambda,\mu)+H^4\hat{q}\xi^n\\&+\lambda^2f(u)H^4\hat{q}\left[-\xi^{n+2}+(n+2)\xi-(n+1)\right]\end{aligned}\right\} \quad (18),$$

de modo que también (ya que $u''(1)=0$)

$$u^{(4)}(1,\lambda,u)=H^4\hat{q} \quad (19)$$

En nuestro programa con MATHEMATICA hay 5 funciones gráficas para producir gráficas 2-dimensionales de $u(\xi)$ y sus primeras cuatro derivadas en función de λ de hecho cada una de estas funciones produce cuatro gráficas simultáneas para cuatro valores seleccionados de (ξ). Además hay 10 funciones gráficas que producen gráficas 3-dimensionales donde λ figura como una de las variables independientes. A continuación comentaremos brevemente sobre el funcionamiento de estas funciones:

$$\left.\begin{array}{c}\text{flLamHeightList[height,mu,aLam,bLam)]}\\ \text{height=valor de } \xi \text{ seleccionado, mu=valor de } \mu \text{ seleccionado}\\ \text{[aLam;bLam]} \subset [0;\infty) \text{ intervalo para } \lambda \text{ seleccionado}\end{array}\right\} (20)$$

produce las gráficas simultánea: $\lambda \to$ u (height, λ, mu), $\mathrm{u}\left(\frac{3}{4}height,\lambda,mu\right)$, $\mathrm{u}\left(\frac{1}{2}height,\lambda,mu\right)$, $\mathrm{u}\left(\frac{1}{4}height,\lambda,mu\right)$ en el intervalo aLam $\leq \lambda \leq$ bLam. Las funciones flDLamHeightList, flDsegLamHeightList, flDterLamHeightList, flDcuarLamHeightList funcionan similarmente para $\mu'(\xi),\mu''(\xi),\mu'''(\xi)\, y \quad \mu^{(4)}(\xi)$ respectivamente.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Fl3Dlam[mu,aV,bV,aLam,bLam]}\\ \text{mu= valor de } \mu \text{ seleccionado, [aV;bV]} \subset [0;1]\\ \text{intervalo para } \xi\\ \text{seleccionado, [aLam;bLam]} \subset [0;\infty) \text{ intervalo para } \lambda\\ \text{seleccionado}\end{array}\right\} (21)$$

Produce una gráfica 3-dimensional $(\xi,\lambda) \to u(\xi,\lambda,mu)$ con $\mathrm{av} \leq \xi \leq \mathrm{bv}$, aLam $\leq \lambda \leq \mathrm{bLam}$. Las funciones flD3DLam, flDseg3DLam, flDter3DLam, flDcuar3Dlam funciones similarmente para $u'(\xi),u''(\xi),u'''(\xi), y \quad u^{(4)}(\xi)$ respectivamente.

$$\left.\begin{array}{c}\text{fl3DLamMu[coord,aLam,bLam,aMu,bMu]}\\ \text{coord= valor de } \xi \text{ seleccionado, [aLam;bLam]}\\ \subset [0;\infty] \text{ intervalo}\\ \text{para } \lambda \text{ seleccionado,[aMu;bMu]} \subseteq [0;1]\\ \text{intervalo para } \mu \text{ seleccionado}\end{array}\right\} (22$$

Produce una gráfica 3- dimensional $(\lambda,u) \to \mathrm{u}(coor,\lambda,\mu)$, con $aLam \leq \lambda \leq bLam,\ aMu \leq \mu \leq bMu.$ Las funciones flD3DLamMu, flDseg3LamMu, flDter3DLamMu, flDcuar3DLamMu funcionan similarmente para $u'(\xi),u''(\xi),u'''(\xi)\, y \quad u^{(4)}(\xi)$ respectivamente.

Una selección de las gráficas mencionadas se presenta al final de este trabajo.

6.DEMÁS FUNCIONES GRÁFICAS

Nuestro programa con MATHEMATICA tiene un total de 35 funciones gráficas, 15 de las cuales fueron descritas en la sección anterior. A continuación describiremos brevemente las restantes 20 funciones:

$$\left.\begin{array}{c}\text{flMuList[Lam,mu,aV,bV]}\\ \text{Lam= valor de } \lambda \text{ seleccionado, mu=valor de}\\ \mu \text{ seleccionado,}\\ \text{[aV,bV]} \subseteq [0;1] \text{intervalo para } \xi \text{ seleccionado}\end{array}\right\} (1)$$

produce las gráficas simultáneas

$\xi \to \mathrm{u}(\xi,lam,5mu),\mathrm{u}(\xi,lam,mu),\mathrm{u}\left(\xi,lam,\frac{1}{5}mu\right)$ en el intervalo $aV \leq \xi \leq bV$. Las funciones flDMuList, flDsegMuList, flDterMuList, flDcuarMuList, funcionan similarmente para $u'(\xi),u''(\xi),u'''(\xi)\, y \quad \mathrm{u}^{(4)}(\xi)$ respectivamente

$$\left.\begin{array}{c}\text{flLamList[lam,mu,av.bv]}\\ \text{lam=valor de } \lambda \text{ seleccionado, mu=valor de } \mu\\ \text{seleccionado,}\\ \text{[aV;bV]} \subseteq [0;1] \text{ intervalo para } \xi \text{ seleccionado}\end{array}\right\} (2)$$

produce las gráficas simultáneas

$\xi \to u(\xi,5lam,mu),u(\xi,lam,mu),u\left(\xi,\frac{1}{5}lam,mu\right)$ en el intervalo $a\mathrm{v} \leq \xi \leq b\mathrm{v}$. Las funciones flDLaumList, flDsegLamList, flDterLamList, flDcuarLamList funcionan similarmente para $\mu'(\xi),\mu''(\xi),\mu'''(\xi)\, y \quad \mu^{(4)}(\xi)$ respectivamente.

$$\left.\begin{array}{c}\text{flMuHeightList[height,lam,aMu,bMu]}\\ \text{height=valor de } \lambda \text{ seleccionado, lam=valor de}\\ \mu \text{ seleccionado,}\\ \text{[aMu;bMu]} \subseteq [0;1]\end{array}\right\} (3)$$

produce las gráficas simultáneas $\mu \to u(height,lam,\mu)$; $u\left(\frac{3}{4}height,lam,\mu\right)u\left(\frac{1}{2}height,lam,\mu\right),u\left(\frac{1}{4}height,lam,\mu\right)$

en el intervalo $aMu \leq \mu \leq bMu$. Las funciones flDMuHeightList, flDsegMuHeightList, flDterMuHeightList, flDcuarMuHeightList funcionan similarmente para $u'(\xi), u''(\xi), u'''(\xi)$ y $u^{(4)}(\xi)$ respectivamente.

$$\left.\begin{array}{c} \text{fl3DMu[lam, aV, bV, aMu, bMu]} \\ \text{Lam=valor de } \lambda \text{ seleccionado, [av;bv]} \subseteq \text{[0;1]} \\ \text{intervalo para } \xi\ \mu \\ \text{Seleccionado, [aMu,bMu]} \subseteq \text{[0;1] intervalo} \\ \text{para } \mu \text{ seleccionado} \end{array}\right\} \quad (4)$$

Produce una gráfica 3- dimensional

$(\xi,\mu) \to u(\xi, lam, \mu)\, con \quad a\mathrm{V} \le \xi \le b\mathrm{V}, aMu \le \mu \le bMu$

Las funciones flD3DMu, flDseg3DMu, flDter3DMu, flDcuar3DMu funcionan similarmente para $u'(\xi), u''(\xi), u'''(\xi)$ y $u^{(4)}(\xi)$ respectivamente.

Una selección de las gráficas mencionadas se presenta al final de este trabajo.

APÉNDICE:

Denotaremos por $\phi_0(\xi,\lambda)$ y $\phi_1(\xi,\lambda)$ las funciones $\phi_0(\xi)$ y $\phi_1(\xi)$ definidas en 4.(2) y 4.(3). En 4.(4), 4.(5) aparecen como factores de $\Gamma(m+1)/\lambda^{[m]}$ las funciones

$$\psi_0(\xi,\lambda) = \lambda^{-\alpha-2} \bullet \left[\phi_0(\xi,\lambda) - \frac{\cosh(\lambda\xi)-1}{\cosh\lambda}\phi_0(1,\lambda)\right] - \frac{\xi^\alpha}{\lambda^2\Gamma(\alpha+1)} \quad (1)$$

$$\psi_1(\xi,\lambda) = \lambda^{-\alpha-2} \bullet \left[\phi_1(\xi,\lambda) - \frac{\cosh(\lambda\xi)-1}{\cosh\lambda}\phi_1(1,\lambda)\right] \quad (2)$$

Como observamos al final de la sección 4, la evaluación de estas funciones y de sus derivadas con respecto a ξ presenta dificultades de inestabilidad numérica para valores grandes de λ cuando $0<\alpha<1$. Para $\alpha=0$, (1),(2) se reducen a

$$\left.\begin{array}{l} \psi_0(\xi,\lambda) = 0, \\ \psi_1(\xi,\lambda) = \lambda^{-2} \bullet \left[\dfrac{senh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh\lambda} + \tanh\lambda\right] \end{array}\right\} (\alpha=0) \quad (3),$$

donde la inestabilidad numérica no se presenta, como comprobamos en [1].En este apéndice indicaremos como puede removerse la inestabilidad numérica señalada mediante el empleo de expresiones asintóticas para λ grande.

De 4.(6),4.(7) obtenemos $\left(' = \dfrac{\partial}{\partial\xi}\right)$

$$\phi_0'(\xi,\lambda) = \frac{\lambda^\alpha \xi^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \lambda\phi_1(\xi,\lambda) \quad (4),$$

$$\phi_1'(\xi,\lambda) = \lambda\phi_0(\xi,\lambda) \quad (5),$$

$$\phi_0''(\xi,\lambda) = \frac{\lambda^\alpha \xi^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \lambda^2\phi_0(\xi,\lambda) \quad (6)$$

$$\phi_0'''(\xi,\lambda) = \frac{\lambda^\alpha \xi^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha-2)} + \frac{\lambda^{\alpha+2} \xi^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \lambda^3\phi_1(\xi,\lambda) \quad (7)$$

$$\phi_1''(\xi,\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha+1} \xi^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \lambda^2\phi_1(\xi,\lambda) \quad (8)$$

$$\phi_0'''(\xi,\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha+1} \xi^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \lambda^3\phi_0(\xi,\lambda) \quad (9)$$

$$\psi_0'(\xi,\lambda) = \lambda^{-\alpha-1} \bullet \left[\phi_1(\xi,\lambda) - \frac{senh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_0(1,\lambda)\right] \quad (10)$$

$$\psi_0''(\xi,\lambda) = \lambda^{-\alpha} \bullet \left[\phi_0(\xi,\lambda) - \frac{\cosh(\lambda,\xi)}{\cosh\lambda}\phi_0(1,\lambda)\right] \quad (11)$$

$$\psi_0'''(\xi,\lambda) = \frac{\xi^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \lambda^{-\alpha+1} \bullet \left[\phi_1(\xi,\lambda) - \frac{senh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_0(1,\lambda)\right] (12)$$

$$\psi_1'(\xi,\lambda) = \lambda^{-\alpha-1} \bullet \left[\phi_0(\xi,\lambda) - \frac{senh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_1(1,\lambda)\right] \quad (13)$$

$$\psi_1''(\xi,\lambda) = \frac{\xi^{\alpha-1}}{\lambda\Gamma(\alpha)} + \lambda^{-\alpha} \bullet \left[\phi_1(\xi,\lambda) - \frac{\cosh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_1(1,\lambda)\right] (14)$$

$$\psi_1'''(\xi,\lambda) = \frac{\xi^{\alpha-2}}{\lambda\Gamma(\alpha-1)} + \lambda^{-\alpha+1} \bullet \left[\phi_0(\xi,\lambda) - \frac{senh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_1(1,\lambda)\right] (15)$$

Nuestro objetivo es encontrar expresiones asintóticas para λ grande $(y\, 0<\alpha<1)$ para las funciones (1), (2), y (10)- (15). La inestabilidad numérica señalada arriba se presenta solamente en ciertos intervalos $\xi_a \leq \xi \leq 1$ (donde ξ_a depende de λ y es más pequeño mientras más grande $\lambda, \xi_a > 0$). La idea es entonces que en $0 \leq \xi < \xi_a$ usamos las expresiones exactas de las funciones involucradas, y en $\xi = \xi_a$ hacemos la transición continua a las expresiones asintóticas correspondientes en $\xi_a \leq \xi \leq 1$.

Para obtener las mismas utilizaremos la relación que existe ([4]) entre el desarrollo asintótico de ua función $f(\lambda)$ para $\lambda \to \infty$ y el comportamiento de su transformada de Laplace F(z) en sus singulares (ver también [5]). De 4.(2) tenemos para la transformada de Laplace $F_0(z)$ de $\phi_0(\xi,\lambda)$ con respecto a λ,

$$F_0(z) = \xi^{\alpha} . \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{\Gamma(2k+\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} . \lambda^{2k+\alpha} \alpha\lambda =$$

$$= \xi^{\alpha} . \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{z^{2k+\alpha+1}} = \xi^{\alpha} z^{-\alpha-1} . \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{z}\right)^{2k},$$

❑e modo que

$$F_o(z) = \frac{\xi^{\alpha} z^{1-\alpha}}{z^2 - \xi^2} \tag{16}$$

El término dominante en el desarrollo asintótico de $\phi_0(\xi,\lambda)$ para $\lambda \to \infty$ es igual al residuo de $e^{\lambda z} F_0(z)$ en el polo $z = \xi$. De (16) encontramos que este residuo es $\frac{1}{2} e^{\lambda \xi}$, de modo que

$$\phi_0(\xi,\lambda) \sim \frac{1}{2} e^{\lambda \xi}; \lambda \to \infty, \xi \geq \xi_a \tag{17}$$

de 4.(2),4.(3) tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \phi_1(\xi,\lambda) = \xi \phi_0(\xi,\lambda) \tag{18}$$

de modo que la transformada de Laplace de $\phi_1(\xi,\lambda)$ con respecto a λ viene dada por

$$F_1(z) = \frac{\xi}{z} F_0(z) = \frac{\xi^{\alpha+1} z^{-\alpha}}{z^2 - \xi^2} \tag{19}$$

El residuo de $e^{\lambda z} F_1(z)$ en $z = \xi$ es igual a $\frac{1}{2} e^{\lambda \xi}$ (la distribución del polo en $z = -\xi$ puede suprimirse como antes), de modo que

$$\phi_1(\xi,\lambda) \sim \frac{1}{2} e^{\lambda \xi}; \lambda \to \infty, \xi \geq \xi_a \tag{20}$$

Usando la identidad

$$e^{\lambda \xi} - \frac{\cosh(\lambda \xi) - 1}{\cosh \lambda} e^{\lambda} = \frac{senh[\lambda(\xi - 1)]}{\cosh \lambda} + \frac{2}{1 + e^{-2\lambda}} \tag{21}$$

de (1), (2), (17), (20), (21) obtenemos que

$$\psi_0(\xi,\lambda) \sim g(\xi,\lambda) - \frac{\xi^{\alpha}}{\lambda^2 \Gamma(\alpha+1)}; \lambda \to \infty, \xi \geq \xi_a \tag{22}$$

$$\psi_1(\xi,\lambda) \sim g(\lambda,\xi); \lambda \to \infty, \xi \geq \xi_a \tag{23}$$

donde

$$g(\xi,\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^{-\alpha-2} . \left[\frac{senh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh \lambda} + \frac{2}{1+e^{-2\lambda}} \right] \tag{24}$$

❑e manera similar, de (10)-(15) y usando las relaciones que se obtienen al tomar en (21) la primera y segunda derivada con respecto a ξ 1e ambos miembros, obtenemos

$$\psi_0'(\xi,\lambda) \sim \frac{1}{2} \lambda^{-\alpha-1} . \frac{\cosh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh \lambda} \tag{25},$$

$$\psi_0''(\xi,\lambda) \sim \frac{1}{2} \lambda^{-\alpha} \frac{senh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh \lambda} \tag{26},$$

$$\psi_0'''(\xi,\lambda) \sim \frac{1}{2} \lambda^{-\alpha+1} . \frac{\cosh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh \lambda} + \frac{\xi^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{27},$$

$$\psi_1'(\xi,\lambda) \sim \frac{1}{2} \lambda^{-\alpha-1} . \frac{\cosh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh \lambda} \tag{28},$$

$$\psi_1''(\xi,\lambda) \sim \frac{1}{2} \lambda^{-\alpha} . \frac{senh[\lambda(\xi-1)]}{\cosh \lambda} + \frac{\xi^{\alpha-1}}{\lambda \Gamma(\alpha)} \tag{29},$$

$$\psi_1''' (\xi,\lambda) \sim \frac{1}{2}\lambda^{-\alpha+1}.\frac{\cosh\left[\lambda(\xi-1)\right]}{\cosh\lambda} + \frac{\xi^{\alpha-2}}{\lambda\Gamma(\alpha-1)} \quad (30),$$

En 4.(4), 4.(5), 4.(8)- 4.(14) las expresiones (22), (23), (25), (30) vienen multiplicados por $\Gamma(m+1)/\lambda^{[m]}$ con $[m] \geq 2$, de modo que estos productos tienden a cero si $\lambda \to \infty$, como observamos en la sección 5.

Para tomar en cuenta la contribución al desarrollo asintotico del punto de ramificación en z=0, procedemos de la manera siguiente. De (16) obtenemos el desarrollo en serie

$$F_o(z) = -\xi^{\alpha-2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k-\alpha+1}}{\xi^{2k}} \quad \text{Alrededor de z=0}$$

Aplicando a esta serie la transformada de Laplace inversa por término obtenemos una serie cuyas sumas parciales son

$$\phi_{0,N}(\xi,\lambda) = -\sum_{k=0}^{N} \frac{(\lambda\xi)^{-2k+\alpha-2}}{\Gamma(-2k+\alpha-1)} \quad (31)$$

Procediendo de manera similar a partir de F1(z) dada por (19), obtenemos

$$\phi_{1,N}(\xi,\lambda) = -\sum_{k=0}^{N} \frac{(\lambda\xi)^{-2k+\alpha-1}}{\Gamma(-2k+\alpha)} \quad (32)$$

Las series infinitas $\phi_{0,\infty}(\xi,\lambda)$ y $\phi_{1,\infty}(\xi,\lambda)$ son divergentes, pero son series asintóticas en el sentido de que un número relativamente pequeña de términos tomados en cuenta (N pequeño) produce una aproximación precisa (y más precisa mientras más grande λ) de la contribución al desarrollo asintótica correspondientes. Tomando en cuenta las contribuciones $\phi_{0,N}(\xi,\lambda)$ y $\phi_{1,N}(\xi,\lambda)$, las fórmulas (22), (23), (25)- (30) se modifican de la manera siguiente. La función $g(\lambda,\xi)$ en (24) debe reemplazarse por (P=0 para $\psi_0(\xi,\lambda), p=1$ para $\psi_1(\xi,\lambda)$)

$$g(\xi,\lambda) + \lambda^{-\alpha-2}.\left[\phi_{\rho,N}(\xi,\lambda) - \frac{\cosh(\lambda\xi)-1}{\cosh\lambda}\phi_{\rho,N}(1,\lambda)\right] (24)'$$

Los miembros derechos de (25)-(30) se reemplazan respectivamente por

$$\psi_0'(\xi,\lambda) + \lambda^{-\alpha-1}.\left[\phi_{1,N}(\xi,\lambda) - \frac{senh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_{0,N}(1,\lambda)\right] (25)'$$

$$\psi_0''(\xi,\lambda) + \lambda^{-\alpha}.\left[\phi_{0,N}(\xi,\lambda) - \frac{\cosh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_{0,N}(1,\lambda)\right] (26)'$$

$$\psi_0'''(\xi,\lambda) + \lambda^{-\alpha+1}.\left[\phi_{1,N}(\xi,\lambda) - \frac{senh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_{0,N}(1,\lambda)\right] (27)'$$

$$\psi_1'(\xi,\lambda) + \lambda^{-\alpha-1}\left[\phi_{0,N}(\xi,\lambda) - \frac{senh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_{1,N}(1,\lambda)\right] (28)'$$

$$\psi_1''(\xi,\lambda) + \lambda^{-\alpha}.\left[\phi_{1,N}(\xi,\lambda) - \frac{\cosh(\lambda\xi)}{\cosh\lambda}\phi_{1,N}(1,\lambda)\right] (29)'$$

$$\psi_1'''(\xi,\lambda) + \lambda^{-\alpha+1}\left[\phi_{0,N}(\xi,\lambda) - \frac{senh(\lambda,\xi)}{\cosh\lambda}\phi_{1,N}(1,\lambda)\right] (30)'$$