



# COMPRESIÓN DE IMÁGENES DE HUELLAS DACTILARES EMPLEANDO TRANSFORMADA ONDÍCULA

## Resumen

Este trabajo tiene como objetivo realizar la compresión de imágenes de huellas dactilares usando la Transformada Ondícula. Para ello, se generó un algoritmo que permite comprimir imágenes de huellas dactilares, utilizando 4 tipos de ondículas (Daubechies, Coiflet, Symmlet y Biortogonal). El orden de las ondículas y el nivel de descomposición son variables en las simulaciones. El análisis con ondículas se puede utilizar para dividir la información de una imagen en subimágenes de aproximación y de detalles. Si los detalles son suficientemente pequeños, pueden ser fijados a cero sin alterar drásticamente la imagen. El valor por debajo del cual los detalles se consideran irrelevantes, se conoce como umbral. Para determinar el valor del umbral se utilizaron 2 métodos: el primero basado estrictamente en la descomposición en ondículas de la imagen original (*Balance sparsity norm* y *Scarce high*), el segundo basado en las propiedades de los datos de la imagen estudiada (entropía general y entropía por niveles). Las huellas dactilares utilizadas corresponden a la base de datos FVC (*Fingerprint Verification Competition*). Se diseñó y programó un algoritmo para la compresión de imágenes de huellas dactilares en la plataforma Matlab 7.0. Como figuras de mérito se utilizaron la relación señal/ruido pico (PSNR) y la razón de compresión. De la comparación de los métodos analizados, se determina la conveniencia de los métodos basados en las propiedades de los datos de la imagen, con los cuales se garantiza la calidad de la imagen com-

■ Maribel Borjas

[maribelborjas12@yahoo.es](mailto:maribelborjas12@yahoo.es)

Maria C. Stefanelli

[mstefane@ucab.edu.ve](mailto:mstefane@ucab.edu.ve)

Escuela de Ingeniería de Telecomunicaciones, UCAB.

Caracas - Venezuela

Fecha de Recepción: 28 de marzo de 2008

Fecha de Aceptación: 14 de Junio de 2008

primida (superior a los 23dB) y se obtienen tasas de compresión aceptables, cercanas a 2 veces la imagen original. Utilizar un umbral por niveles conlleva mejores resultados, ya que cada subbanda de detalle posee su propio umbral. La eficiencia de cada método está íntimamente relacionada con el tipo de imagen de entrada (huella dactilar original), la ondícula utilizada, los niveles de descomposición empleados y el tamaño de muestras.

**Palabras claves:** Ondículas, compresión de imágenes, umbral, PSNR y razón de compresión.

### Abstract

The purpose of this Paper is the compression of digitalized fingerprints using wavelet transform. To achieve this, an algorithm that allows the compression of digitalized fingerprints, using 4 types of wavelets (Daubechies, Coiflets, Symmlets and Biorthogonal) was generated. The arrangement of wavelets and the level of decomposition were variable in the simulations. The analysis through wavelets can be used to divide an image into subimages of approximation and detail. If the details are sufficiently small, it can be fixed to zero, without drastically affecting the image. The value below which the details are considered irrelevant, is known as threshold. In order to determine the value of threshold, 2 methods were used: the first one, based strictly on the decomposition of the original image into wavelets (*Balance sparsity norm* and *Scarce high*), the second, based on the properties of the data of the image being studied (entropy and entropy by levels). The digitalized fingerprints used are those of the FVC (*Fingerprint Verification Competition*) database. An algorithm for the compression of digitalized fingerprints was designed and programmed in Matlab 7.0. As value figures, the Peak Signal to Noise Ratio (PSNR) and the compression ratio were used. Through evaluation of applied methods, it was decided to use the one based on the properties of the data of the image, which guarantees that the quality of the compressed image is acceptable (higher than 23 dB) thus and adequate compression rates are obtained, close to 2 times the original image. The use of local thresholding entails better results, since each subband of detail has its own threshold. The efficiency of each method is intimately related

to the type of entry image (original fingerprint), the wavelet used, the level of decomposition, and the size of the samples.

**Key Words:** Wavelet, image compression, threshold, PSNR and compression ratio.

## 1. Planteamiento del problema

Dentro del mundo de las comunicaciones, trabajar con imágenes implica numerosos inconvenientes, entre los cuales se destaca la cantidad de memoria disponible para almacenar información y el ancho de banda limitado en las redes. Para resolver dichos inconvenientes se han desarrollado técnicas de compresión de datos con la finalidad de representar la imagen digital de tal forma que al almacenarla o transferirla ocupe menos espacio que con su representación matricial.

Entre los algoritmos diseñados para comprimir imágenes fijas y con movimiento, se encuentran los estándares JPEG y MPEG, los cuales han desarrollado técnicas de compresión de datos basados en la Transformada Discreta del Coseno. No obstante, la última técnica de compresión de imágenes estandarizada por el comité *Joint Photographic Experts Groups* es la norma JPEG 2000, la cual utiliza una herramienta matemática llamada teoría de ondículas o *wavelets* (JPEG 2000, 2007).

Los métodos que se han estado utilizando hasta el momento (JPEG por ejemplo) obtienen razones de compresión alrededor de 100:1, pero sacrificando mucho la calidad de la imagen, mientras que los algoritmos que comprimen imágenes utilizando ondículas lo hacen con muy poca degradación de la calidad [3].

En el caso de la huella dactilar, ésta es una característica individual que se utiliza como medio de identificación de las personas. Por tanto, su manipulación requiere mucha precisión. En la actualidad, las huellas dactilares son digitalizadas y archivadas en enormes bases de datos que pueden ser chequeadas en computadora para buscar huellas coincidentes en fracciones de tiempo muy cortas. En tal sentido, es necesario aplicar técnicas de

compresión que conserven la calidad de la imagen de la huella dactilar.

Ahora surge una pregunta, ¿por qué las ondículas? Debido a que los métodos que no utilizan ondículas se basan en la Transformada de Fourier, en la Transformada de Fourier de corto plazo (STFT) o en la Transformada Discreta del Coseno (DCT), las cuales procesan a la imagen con un solo grado de resolución. Mientras que la gran ventaja que ofrecen las ondículas es el análisis multiresolución; la imagen se descompone en un número determinado de bandas de frecuencias lo que permite obtener información más detallada de la misma con una resolución adecuada a la escala temporal, preservando la información temporal y frecuencial en el dominio transformado [8].

Por tanto, la Transformada Ondícula maneja distintas resoluciones para distintas frecuencias y tiempos. Esta característica es sumamente importante, ya que generalmente en las bajas frecuencias de una señal es donde se encuentra la mayor parte de la información, y en las altas frecuencias se localizan los detalles específicos. Por ello, resulta poco viable analizar una señal con la misma resolución para todas las frecuencias.

La ventaja de comprimir imágenes utilizando el método de ondículas a diferencia de los métodos clásicos como JPEG, es su capacidad de adaptarse al tamaño y a la localización de regiones en la imagen. Mientras el estándar JPEG transforma la imagen en bloques de 8x8, las ondículas pueden definir regiones que varían en tamaño, forma y localización [17].

Por otra parte, la Transformada de Fourier es muy eficiente y adecuada si el fenómeno que se quiere estudiar es estacionario. Sin embargo, si gran parte de las señales a considerar en una aplicación no presenta esta propiedad de estacionariedad, el uso del análisis de Fourier se vuelve inapropiado e ineficiente. Es muy común que la información relevante en una señal guarde mayor relación con los cambios repentinos o discontinuidades que con las partes suaves y no oscilantes.

## 2. Objetivo general

Realizar la compresión de imágenes de huellas dactilares usando Transformada Ondícula.

Para cumplir el objetivo general, es indispensable llevar a cabo un estudio detallado sobre la teoría de ondículas, la compresión de imágenes y la estructura de la imagen de la huella dactilar. Igualmente, se requiere diseñar y programar un algoritmo que permita comprimir huellas dactilares utilizando varias ondículas madres y eliminando detalles que no aporten información relevante. Finalmente, es necesario definir los criterios de comparación para determinar cuales ondículas ofrecen mejores resultados.

## 3. Marco referencial

En el análisis de señales existe un gran número de herramientas que se han ido desarrollando con el paso de los años, entre las que destaca, sin lugar a dudas, la Transformada de Fourier, la cual se ha hecho un nombre reconocido gracias a su capacidad de entregar una representación del contenido de frecuencias que posee una determinada señal. Sin embargo, hace no más de 20 años, se han venido desarrollando nuevas herramientas, que permiten realizar un análisis de las señales desde otra perspectiva, surgidas principalmente ante la necesidad de poder analizar señales que no se comportan en forma estacionaria, o que presentan cambios bruscos en intervalos pequeños. Entre estos nuevos métodos se encuentra la teoría de ondícula [6].

### 3.1. Transformada Ondícula Continua

Una ondícula es una función integrable y oscilatoria cuya media es cero tal y como se muestra en la ecuación (1):

$$\int \Psi(t) dt = 0 \quad (1)$$

Las ondículas son funciones matemáticas que separan la información en diferentes componentes frecuenciales, y de ahí estudia cada componente con una cierta resolución asociada a la escala. La

familia de ondículas está definida por la ecuación (2):

$$\Psi(t)_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right); \quad a, b \in R, \quad a > 0 \quad (2)$$

Donde  $a$  es el parámetro de escalamiento o dilatamiento y  $b$  el de desplazamiento o traslación. Entonces, esta familia de funciones son una copia de una función prototipo  $\Psi(t)$ , denominada ondícula madre, trasladada y escalada mediante las variables  $b$  y  $a$ .

De acuerdo con la ecuación (2), si  $|a| \ll 1$ , la ondícula es una versión altamente concentrada y comprimida de la ondícula madre  $\Psi_{a,b}$  con contenido de frecuencias concentrado en el intervalo de altas frecuencias. Si  $|a| \gg 1$ , la ondícula  $\Psi_{a,b}$  está muy dispersa y tiene mayormente frecuencias bajas. Con lo anterior, se puede obtener una ventana en tiempo-escala que se estrecha para valores pequeños de  $a$  y se amplía a medida que  $a$  se hace más grande.

Se define la transformada continua de ondículas (CWT) como:

$$W_{a,b} = \int \Psi_{a,b}^*(t) f(t) dt \quad (3)$$

La ecuación (3) puede interpretarse como la proyección de la señal  $f(t)$  sobre una familia de funciones bases  $\Psi_{a,b}$ .

Esta transformada representa el paso lógico siguiente a la STFT: una técnica mediante ventanas con regiones de tamaño variable. Además permite el uso de intervalos grandes de tiempo en aquellos segmentos en los que se requiere mayor precisión en baja frecuencia, y en regiones más pequeñas donde se requiere información en alta frecuencia. Además, el análisis mediante la Transformada Ondícula puede ser aplicado tanto al tratamiento de señales de una dimensión como a datos bidimensionales (imágenes).

### 3.2. Transformada Ondícula Discreta

Para aplicar la Transformada Ondícula a una serie de datos numéricos, es necesario implementar

una transformada discreta. La idea fue desarrollada por Mallat en 1988 [8], quien diseñó un algoritmo basado en bancos de filtros que permiten obtener una Transformada Ondícula en forma instantánea a partir de los datos de interés.

Para muchas señales, el contenido de baja frecuencia es la parte más importante. Mientras que el contenido de alta frecuencia tiene un carácter secundario. Por ejemplo, en la voz humana, si se eliminan los componentes de alta frecuencia, la voz sonará diferente pero aún es inteligible. No obstante, si se eliminan suficientes componentes de baja frecuencia, no se entenderá el habla.

Una forma sencilla de comprender el modo de operación de la Transformada Ondícula Discreta (DWT) es pensar que la señal en base de tiempo es pasada por varios filtros pasa bajos y pasa altos, los cuales permiten separar las porciones de la señal de alta frecuencia de aquellas de baja frecuencia. Lo anterior queda ejemplificado en el diagrama de la figura 1, donde  $S$  es la señal que se desea analizar,  $A$  la salida del filtro pasabajos y  $D$  la salida del pasaaltos.

Naturalmente, los filtros son diseñados de tal manera que sean complementarios, es decir, la suma de  $A$  y  $D$  debe ser  $S$ .

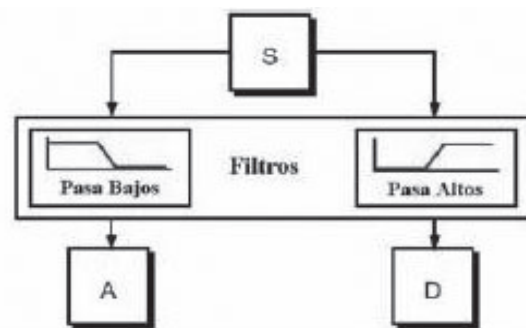


Figura 1 Diagrama de descomposición de señales [10]

Por esta razón, en el análisis con ondículas, se habla a menudo de aproximaciones ( $A$ ) y detalles ( $D$ ). Las aproximaciones son las componentes de gran escala y baja frecuencia de la señal. Los detalles son las componentes de pequeña escala y alta frecuencia. Sin embargo, este procedimiento tiene la desventaja que aumenta al doble el número de

datos originales, ya que por cada muestra de  $S$  se genera un par de muestras  $(A, D)$ , por lo que el costo matemático y computacional se incrementa. Para remediar esta falencia se propone un método que guarda la mitad de los puntos  $(A, D)$ , sin perder en ello información de la señal  $S$ . Este procedimiento es conocido como submuestreo. La idea se ilustra en la figura 2.

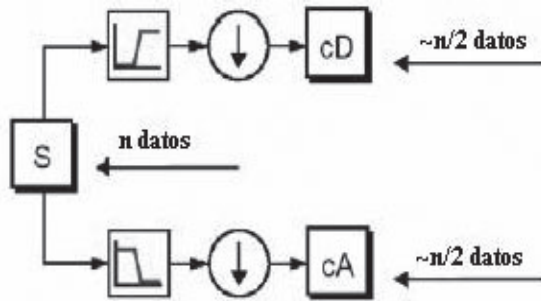


Figura 2 Diagrama de descomposición de señales utilizando submuestreo [10]

Los círculos con flechas representan la eliminación de datos o submuestreo. Luego,  $cD$  y  $cA$  son los nuevos coeficientes obtenidos de la etapa de filtración. Intuitivamente, se puede concluir que al tener  $cD$  y  $cA$ , en conjunto, se tiene la misma cantidad de datos que las de la señal original  $S$ , y se ha mantenido la información necesaria.

### 3.3. Descomposición en múltiples niveles

El proceso de descomposición puede ser iterativo, con aproximaciones descompuestas sucesivamente en diferentes niveles, de forma que es posible caracterizar una señal mediante el análisis de sus componentes de menor resolución. Esto se denomina árbol de descomposición en ondículas (figura 3).

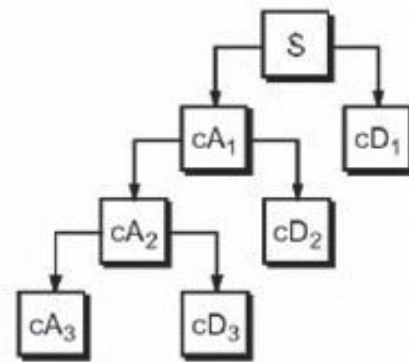


Figura 3 Árbol de descomposición en ondículas [10]

### 3.4. Transformada ondícula en dos dimensiones

La descomposición mediante ondículas puede ser generalizado para cualquier dimensión  $n > 0$ . Para el caso de la imágenes, la transformada ondícula unidimensional se puede extender a funciones bidimensionales, para ello se requiere una función de escalamiento  $\varphi(x, y)$  y tres ondículas bidimensionales:  $\psi^H(x, y)$ ,  $\psi^V(x, y)$  y  $\psi^D(x, y)$  [2].

Estas ondículas miden las variaciones de intensidad o nivel de gris.  $\psi^H$ , calcula las variaciones a lo largo de las columnas (esquinas horizontales),  $\psi^V$  determina las variaciones de los renglones (esquinas verticales) y  $\psi^D$  mide las variaciones diagonales.

Al igual que en el caso unidimensional, la DWT bidimensional puede ser implementada a través de la descomposición en subbandas de frecuencia. De esta manera el análisis discreto con ondículas en 2 dimensiones (2-D DWT) se puede llevar a cabo usando el concepto de banco de filtros con diferentes frecuencias

de corte:

Un filtro pasa-alto  $g[n]$

Un filtro pasa-bajo  $h[n]$

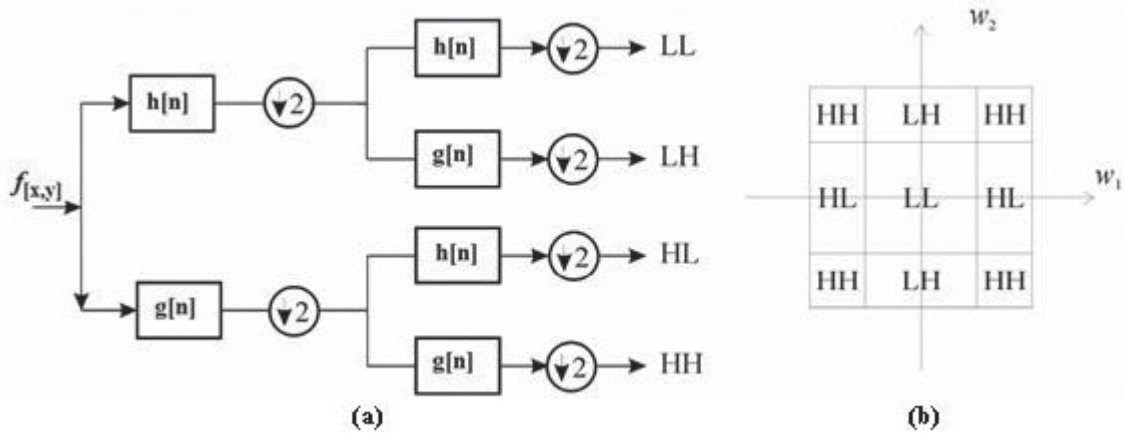


Figura 4 (a) Banco de filtros de 4 bandas. (b) División de las bandas de frecuencia [14]

Sabiendo que la DWT de una dimensión descompone una serie de muestras en una banda de frecuencias bajas ( $L_i$ ) y en una banda de frecuencias altas ( $H_i$ ), en el caso de las imágenes, se lleva a cabo una descomposición subbanda en 2 dimensiones, producto de la descomposición subbanda en una dimensión. De hecho el proceso de la DWT en una dimensión se realiza 2 veces: primero horizontal y luego vertical. Por ejemplo,  $L_i$  resulta de la DWT en dirección horizontal, seguidamente se realiza otra vez la DWT solo que en dirección vertical, produciendo las subbandas  $LL_i$  y  $LH_i$  ( $i$  representa el nivel de descomposición), en otras palabras, la subbanda  $LL$  (del inglés Low, Low) o  $\varphi(x, y)$  resulta de la aplicación del filtro de análisis pasa bajo en ambas direcciones, horizontal y vertical.

La subbanda  $HL$  (del inglés High, Low) o  $\psi^H(x, y)$  se obtiene aplicando el filtro pasa bajo en la dirección vertical y el filtro pasa alto en la horizontal. Las otras subbandas se identifican como  $LH$  (del inglés Low, High) o  $\psi^L(x, y)$  y  $HH$  (del inglés High, High) o  $\psi^D(x, y)$  (Quijada, s.f.).

Hasta este punto ha terminado el primer nivel de descomposición, sin embargo, si se aplica la 2-D DWT a la subbanda  $LL_i$ , se forma el análisis por niveles y se elige el nivel de descomposición deseado  $i$ .

La descomposición en ondículas puede ser interpretada como una descomposición de la imagen en un conjunto de canales o bandas de frecuencias

independientes entre sí y espacialmente orientados. Mientras una banda (pasa bajo) contiene una versión borrosa de la imagen original, las otras bandas resaltan la información de alta frecuencia (bordes y texturas). Pero lo más importante aún, es que esta última se encuentra separada en las bandas de acuerdo a su ubicación en el espacio: horizontal, vertical y diagonal. Las figuras 5 y 6 muestran gráficamente la explicación anterior [13].

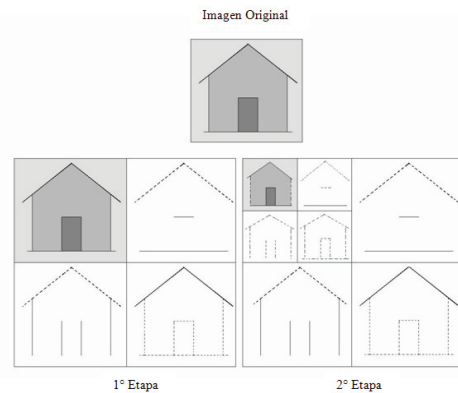


Figura 5 Descomposición de una imagen en tres niveles [13]

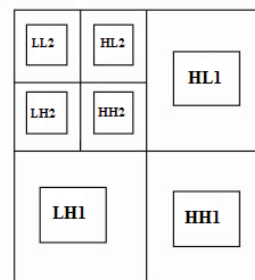


Figura 6 Subbandas formadas en la descomposición de una imagen en tres niveles [12]

### 3.5. Fundamentos de la compresión de imágenes

El término compresión de datos se refiere al proceso de reducción del volumen de datos necesarios para representar una determinada cantidad de información. Los datos son los medios a través de los que se transporta la información, es decir, se pueden utilizar distintas cantidades de datos para describir la misma cantidad de información. Por lo tanto, hay datos que proporcionan información sin relevancia. Esto es lo que se conoce como redundancia de los datos, la cual es un punto clave en la compresión de imágenes digitales [1].

En la compresión digital de imágenes, se pueden identificar y aprovechar 3 tipos básicos de redundancias:

- Redundancia de codificación
- Redundancia entre píxeles
- Redundancia psicovisual

Si los niveles de gris de una imagen están codificados de forma que se emplean más símbolos que los estrictamente necesarios para representar cada uno de ellos, entonces la imagen resultante contiene redundancia de código. En general, ésta aparece cuando los códigos asignados a un conjunto de niveles de gris no han sido seleccionados de modo que se obtenga el mayor rendimiento posible de las probabilidades de estos niveles.

En cambio, la redundancia entre píxeles se basa en la posibilidad de predecir razonablemente el valor de un determinado píxel a partir del valor de sus vecinos, la información que aporta individualmente un píxel es relativamente pequeña. La mayor parte de la contribución visual de un único píxel a una imagen es redundante; podría haberse inferido de acuerdo con los valores de sus vecinos.

Al contrario que la redundancia de codificación y la redundancia entre píxeles, la redundancia psicovisual está asociada a la información visual real o cuantificable, es decir, cierta información tiene menor importancia relativa que otra en el proceso visual normal. Se dice que esta información es psicovisualmente redundante, y se puede eliminar

sin que se altere significativamente la calidad de la percepción de la imagen. En general, un observador busca características diferenciadoras, como bordes o regiones de diferentes texturas, y luego las combina mentalmente en grupos reconocibles. A continuación, el cerebro relaciona estos grupos con el conocimiento previo con el fin de completar el proceso de interpretación de la imagen.

Finalmente, la compresión de datos digitales se consigue cuando una o varias de estas redundancias se reducen o se eliminan.

### 3.6. Propiedades de los datos de la imagen

Antes de llevar a cabo la compresión es recomendable conocer alguna propiedad de la imagen, como por ejemplo, el histograma de brillo o la entropía de la imagen, y luego encontrar una técnica de compresión apropiada para la imagen particular. A continuación se explican ambas propiedades:

#### 3.6.1. Histograma de brillo

El histograma de brillo es una distribución gráfica de los niveles de grises de los píxeles en una imagen digital. Proporciona una representación gráfica de cuántos píxeles están en cada franja de niveles de grises.

En un histograma, en el eje horizontal se representa el brillo, el cual varía entre 0 y 255 (para una escala de gris de 8 bits), y en el eje vertical se muestra el número de píxeles.

De esta forma, mediante un histograma de brillo se puede observar inmediatamente si una imagen es básicamente oscura o clara y de contraste alto o bajo.

#### 3.6.2. Entropía de la imagen

Si una imagen tiene  $G$  niveles de grises y la probabilidad de un nivel de gris es  $P(k)$ , la entropía  $H_e$  está dada por:

$$H_e = - \sum_{k=0}^{G-1} P(k) \log_2(P(k)) \quad [\text{bits/simbolos}] \quad (4)$$

No obstante, un estimado de  $H_e$  puede ser obtenido a partir del histograma del nivel de gris (Lees, 2002).

Si  $h(k)$  es la frecuencia del nivel de gris  $k$  en una imagen de dimensiones  $M \times N$  entonces un estimado de  $P(k)$  es:

$$\tilde{P}(k) = \frac{h(k)}{MN} \quad (5)$$

De esta forma,

$$\tilde{H}_e = - \sum_{k=0}^{G-1} \tilde{P}(k) \log_2(\tilde{P}(k)) \quad (6)$$

Es importante destacar que durante el análisis con ondículas la entropía se divide entre la imagen de aproximación y las imágenes de los detalles pero no sufre ningún cambio [7].

### 3.7. Descripción de la Huella Dactilar

Entre todas las técnicas de identificación biométrica existentes en la actualidad, la más ampliamente utilizada es la basada en la huella dactilar del usuario.

Típicamente la huella dactilar de un individuo ha sido un patrón confiable para determinar su identidad de forma inequívoca, ya que satisface los requisitos de universalidad, unicidad y permanencia.

Los fundamentos de lo que es considerado como métodos de identificación por huella dactilar se establecieron a finales del siglo XIX. Fue en esa época cuando Sir Edward Henry y Sir Francis Galton, de forma separada, trabajaron en la aplicabilidad de la huella dactilar para realizar la identificación de personas mediante clasificación. En estos estudios se formalizó la descripción de la huella dactilar, como una sucesión de crestas, separadas entre sí por valles. El flujo de las crestas presenta líneas paralelas que se curvan, se unen entre ellas y se cortan bruscamente, es decir, sufre una serie de puntos singulares, tales como terminaciones y/o bifurcaciones. A estos puntos singulares se les denominó minucias, y mediante su tipo, localización y orientación, se puede llegar a identificar a una per-

sona ya que cumplen con los requisitos planteados anteriormente [16].

El método estándar para la comparación exhaustiva de huellas es el de la extracción de minucias. En una huella puede haber más de 100 minucias, sin embargo, con la finalidad de reducir el número de comparaciones realizadas al momento de identificar una huella dactilar, se efectúa previamente un proceso de preselección, de esta forma se puede clasificar una huella dactilar como perteneciente a una de 5 clases distintas y sólo habrá que comparar con las huellas almacenadas que también pertenezcan a esa clase [15]. La figura 7 muestra los diferentes tipos de minucias.

Las normas judiciales de cada país definen el llamado “Sistema Dactiloscópico” y éste define las clases de la preclasificación. Por ejemplo, el sistema venezolano define las clases: arco, arco de capa, lazo izquierdo, lazo derecho y anillo de cresta [11], las cuales se observan en la figura 8.

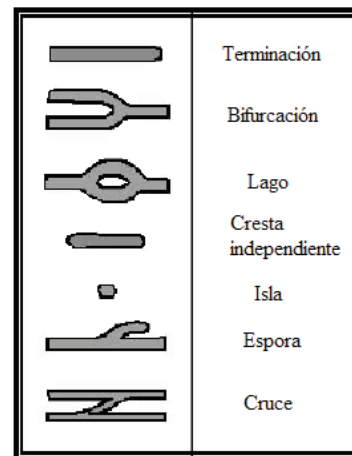


Figura 7 Tipos de minucias [15]



Figura 8 Tipos de huellas dactilares [15]



## 4. Metodología

El paso inicial para la realización del proyecto fue la selección de la herramienta de software a utilizar. En este sentido, se eligió como plataforma de trabajo el paquete computacional Matlab 7.0 debido a su versatilidad, uso extendido en el área de procesamiento, disponibilidad inmediata y facilidad para construir herramientas personalizadas.

Asimismo, se llevó a cabo el levantamiento de toda la información teórica para facilitar la comprensión de los diferentes temas vinculados al trabajo, estos son, teoría de ondículas, compresión de imágenes y estudio de la imagen de la huella dactilar.

Posteriormente, se realizó una búsqueda en Internet para conseguir un número significativo de huellas dactilares sin ningún tipo de compresión. Las huellas dactilares utilizadas corresponden a la base de datos empleada en el concurso internacional de algoritmos de verificación de huellas dactilares FVC (*Fingerprint Verification Competition*).

Para el análisis y la comparación de los diferentes resultados obtenidos durante el proceso de experimentación se utilizaron 2 criterios de comparación importantes, éstas son: *Peak Signal to Noise Ratio (PSNR)* y *la razón de compresión*. Para visualizar los errores píxel por píxel obtenidos, se graficó la imagen del error.

### 4.1. Peak Signal to Noise Ratio (PSNR)

El parámetro PSNR es una medida relativa de la calidad de una imagen, se basa en el Error Cuadrático Medio (MSE) de la imagen ya procesada. se calcula de la siguiente manera:

$$PSNR_{dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{255}{RMSE} \right) \quad (7)$$

Donde RMSE es la raíz cuadrada del MSE. El rango de valores PSNR típicos está entre 20 y 40 dB. El valor real no es significativo pero la comparación entre 2 valores para diversas imágenes comprimidas da una medida de la calidad.

### 4.2. Razón de compresión

Se calculó la razón de compresión dividiendo el tamaño en bytes de la imagen original entre el tamaño en bytes de la imagen comprimida, tal y como se muestra en la ecuación 8:

$$RC = \frac{\text{imagen original}}{\text{imagen comprimida}} \quad (8)$$

### 4.3. Imagen del error

Una técnica importante para exhibir errores es construir una imagen que muestre los errores píxel por píxel. El cómputo más simple para crear una imagen del error es tomando la diferencia entre los píxeles comprimidos y originales tal y como se expresa en la ecuación 9:

$$E(i, j) = [f(i, j) - F(i, j)] \quad (9)$$

Acto seguido, para poder desarrollar el algoritmo, se investigaron todas las herramientas y funciones que ofrece el paquete computacional Matlab 7.0 sobre el procesamiento de imágenes y la Transformada Ondícula. Posteriormente, se unieron todos los algoritmos desarrollados y programas utilizados en una interfaz gráfica amigable que permitiera el procesamiento de los datos e imágenes de forma visual y comprensible para el usuario.

Además, se determinaron todos aquellos parámetros involucrados en la elaboración del algoritmo, estos son:

### 4.4. Selección de la familia de ondículas a utilizar

Existen una gran variedad de ondículas utilizadas hoy en día para la descomposición de señales e imágenes, siendo la familia de Ondículas Daubechies y la ondícula Antonini, las más utilizadas para la compresión de imágenes [4].

La ondícula Antonini, también conocida como "Ondícula FBI" (el FBI la utiliza para la compresión de su base de datos de huellas dactilares), no es más que una ondícula simétrica biortogonal.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, las ondículas utilizadas para el diseño del algoritmo de compresión de huellas dactilares fueron: las ondículas de Daubechies, dbN con  $N = 1, 2, 5$  y  $10$ ; las modificaciones de la anterior que son las ondículas Coiflets, CoifN con  $N = 2, 3$  y  $5$  y Symmlets, SymN con  $N = 2, 5$  y  $7$ ; y por último las ondículas biortogonales Bior Nr-Nd con  $(Nr, Nd) = (1,3), (2,4), (3,3), (5,5)$  y  $(6,8)$ .

#### 4.5. Selección de los niveles de descomposición a utilizar

Mediante esta actividad, se determinó el número de niveles de descomposición utilizados al momento de realizar las diferentes pruebas y simulaciones.

En teoría como se trata de un proceso recursivo, se podría iterar en forma sucesiva infinitas veces. Sin embargo, en la práctica, sólo se puede descomponer hasta que un nivel posea una sola muestra o píxel en el caso bidimensional, para análisis de imágenes [6].

Podría pensarse en forma intuitiva que se obtienen resultados óptimos con un mayor número de niveles de descomposición, sin embargo, se recomienda una ramificación que vaya de acuerdo a la naturaleza de la señal a estudiar, o bien elegir métodos que buscan la descomposición óptima, como por ejemplo, el de la entropía [10].

Para determinar el número de niveles de descomposición a utilizar, se realizaron algunas pruebas preliminares en el algoritmo desarrollado. Para ello, se utilizaron diferentes tipos de ondículas y niveles de descomposición entre 1 y 10.

Los resultados obtenidos demuestran que, a medida que aumenta el nivel de descomposición, la calidad de la imagen (PSNR), disminuye. Por tanto, se decidió emplear solo 4 niveles de descomposición ya que, a partir de dicho valor, la calidad de la imagen comprimida se degrada considerablemente. Lo expuesto, se observa gráficamente en la figura 9.

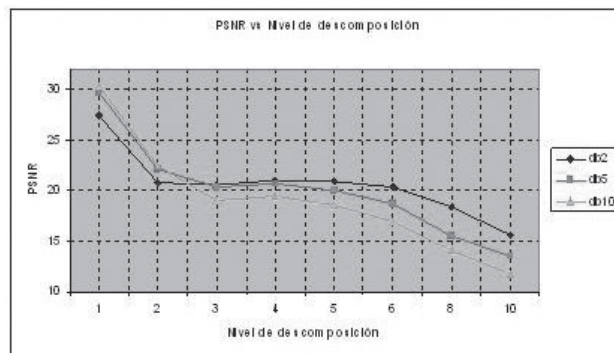


Figura 9 Prueba preliminar para la determinación de los niveles de descomposición a utilizar

#### 4.6. Selección del tipo de umbral a utilizar

En este punto, se determinó el tipo de umbral a utilizar al momento de realizar las distintas pruebas y simulaciones.

Existen 2 tipos de umbrales: *umbral duro* y *umbral suave*. Igualmente, existen 2 opciones para aplicar el valor del umbral a una señal o imagen, *umbral general* o *umbral por niveles*.

En lo respecta a la compresión de imágenes, la utilización de un umbral duro conlleva un mejor rendimiento que el umbral suave; este último se utiliza generalmente para quitar el ruido de las señales, debido a que lleva el ruido a cero al eliminar los coeficientes por debajo del umbral definido y al resto los aproxima con el mismo valor [9] y [7].

Para efectos de éste trabajo, se utiliza un *umbral duro* tanto general como por niveles.

#### 4.7. Selección de los métodos para determinar el valor del umbral

Existen diferentes métodos para determinar el valor de umbral tanto general como por niveles. El paquete computacional Matlab 7.0 contiene varias funciones preestablecidas que permiten calcular el valor del umbral para la compresión de imágenes utilizando la DWT. Algunos de ellos son:

#### 4.7.1. Balance Sparsity Norm

Este método busca es un equilibrio entre la energía retenida por la imagen comprimida y el número de coeficientes para representar dicha imagen. Por lo tanto, el umbral se calcula de tal forma que estos dos parámetros tengan aproximadamente el mismo valor [10], tal y como se expresa en la ecuación 10:

$$t_0 \mid_{\text{ceros} \approx \text{energía}} \quad (10)$$

Y los coeficientes se eliminan de acuerdo a la ecuación 11:

$$c = 0, \text{ si } |c| \leq t_0 \quad (11)$$

#### 4.7.2. Scarce High

Para utilizar este método se necesitan 3 parámetros:

J: Nivel de descomposición utilizado

M: Constante positiva

$\alpha$ : Parámetro *sparsity* ( $\alpha > 1$ )

La estrategia trabaja de la siguiente manera: al nivel J los coeficientes de aproximación son almacenados, pero para el nivel j desde 1 hasta J-1, los  $n_j$  coeficientes más grandes son almacenados de la siguiente manera:

$$n_j = \frac{M}{(J + 2 - j)^\alpha} \quad (12)$$

Por consiguiente, la estrategia permite seleccionar los coeficientes de valor absoluto más alto en cada nivel. El valor de M se calcula de la siguiente manera:  $M = 4 \times \text{prod}(S)$ . Donde S es el vector de aproximación a la resolución más baja [10].

#### 4.7.3. Entropía de la imagen

Además de los métodos antes mencionados, para la determinación del valor del umbral se utilizó

un método adicional basado en la entropía de la imagen utilizada.

En el caso del umbral general, se calculó la entropía de la imagen original y en base a este valor y al máximo coeficiente contenido en la matriz de aproximación y detalles, se determinó un único umbral para toda la imagen.

Para determinar el umbral por niveles, se utilizó el mismo procedimiento con la salvedad de que se calculó la entropía de los coeficientes de aproximación y los detalles horizontales, verticales y diagonales. El umbral para cada nivel se calculó en función del máximo coeficiente de aproximación y máximo coeficiente en la matriz de detalles horizontales, verticales y diagonales respectivamente.

#### 4.8. Realización de pruebas y simulaciones

Una vez diseñado y programado el algoritmo de compresión de imágenes de huellas dactilares, se procedió a realizar un número significativo de pruebas y simulaciones con la finalidad de determinar cual combinación de parámetros presenta un mejor desempeño.

### 5. Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos al aplicar el esquema de compresión propuesto. La evaluación del mismo se realiza en función de la tasa de compresión y la relación PSNR. Las variables utilizadas fueron: 4 imágenes de huellas dactilares, 4 tipos de ondículas (Daubechies, Symmlet, Coiflet y Biortogonales), el nivel de descomposición (el cual fue variado desde 1 hasta 4) y los 4 algoritmos para determinar el valor del umbral (*Balance sparsity norm*, Entropía general, *Scarce high* y Entropía por niveles).

#### 5.1. Elaboración y aplicación de encuesta

Para poder determinar el rango de valores (PSNR) para los cuales se considera la calidad de imagen óptima, se elaboró una encuesta en la que se presentaron 24 imágenes con distintas resoluciones, en formato original y comprimido a un grupo de 40

personas, principalmente estudiante de la Cátedra de Procesamiento de Señales de la Universidad Católica Andrés Bello. Estas 24 imágenes corresponden a diferentes tratamientos de las 4 imágenes originales, es decir, se realizaron pruebas utilizando distintas combinaciones de los 3 parámetros involucrados (nivel de descomposición, tipo de ondícula y método para determinar el valor del umbral).

Según los resultados obtenidos en la encuesta, se puede catalogar una imagen comprimida de buena calidad si su PSNR está por encima de los 23 dB, mientras que una imagen comprimida de calidad regular está en el rango 23-20 dB. Si el PSNR de la imagen está entre 19-16 dB, se considera que la compresión es mala y finalmente, para valores inferiores a los 16 dB, la compresión es pésima.

### 5.2. Análisis de resultados

Para medir la tasa de compresión y la calidad de la imagen comprimida para cada uno de los algoritmos empleados, se realizaron varias pruebas, donde se utilizaron diversos tipos de ondículas y niveles de descomposición (de 1 a 4). Se utilizaron 2 imágenes de referencia. A continuación se anali-

zan los resultados obtenidos para cada una de las imágenes:

#### 5.2.1. Imagen 1

La imagen utilizada es de 448x478 píxeles (214,144 KB), con 256 niveles de grises, como se muestra en la figura 10:



Figura 10 Imagen Patrón: huella dactilar 1

Para determinar cual(es) algoritmo(s) tiene un mejor desempeño (equilibrio entre la razón de compresión y la calidad de la imagen), se graficó el PSNR vs. Nivel de descomposición y la Razón de Compresión vs. Nivel de descomposición para cada una de las familias de ondículas y algoritmos utilizados. A continuación se muestran las gráficas de los métodos que arrojaron mejores resultados.

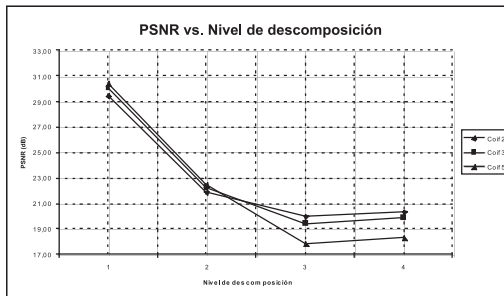


Figura 11 Compresión de huella dactilar 1 con el método Balance sparsity norm

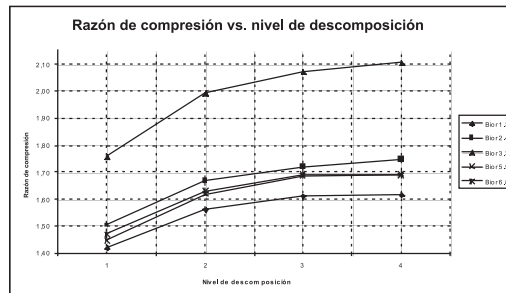
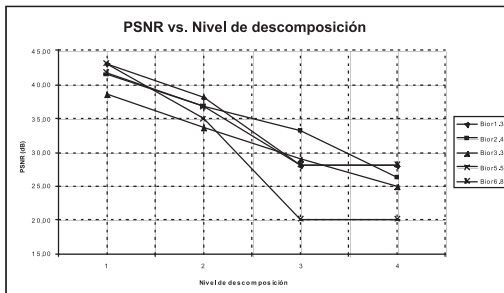
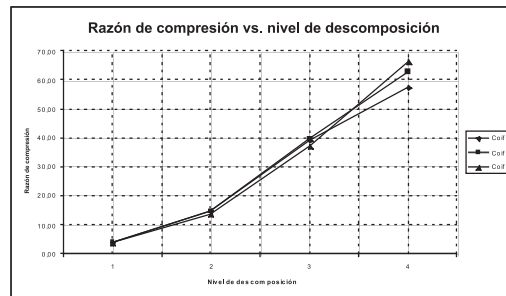


Figura 12 Compresión de huella dactilar 1 con el método Entropía por niveles

Como se puede observar en las figuras anteriores, la calidad de la imagen comprimida (PSNR) disminuye a medida que aumenta el nivel de descomposición; en contraparte, la razón de compresión aumenta a la par del nivel de descomposición.

El método que obtuvo una mayor tasa de compresión fue el *Balance sparsity norm* utilizando la ondícula Biortogonal de orden 2.4 con 4 niveles de descomposición, ya que comprimió la imagen original 45,97 veces, lo que significa que el tamaño de la imagen original de 214,144 KB, pasa en su versión comprimida a ocupar solo 4,658 KB. Sin embargo, el PSNR de la imagen comprimida está por debajo de los 23 dB, lo que la cataloga como una imagen de calidad regular.

Igualmente, se puede apreciar que los parámetros con los que se obtuvo un equilibrio entre la razón de compresión y el PSNR fueron: para el método *Balance sparsity norm*, la ondícula Coiflet de orden 5 con un nivel de descomposición; para los métodos *Entropía general* y *Scarce high*, la ondícula Coiflet de orden 5 al nivel de descomposición  $n=4$ ; finalmente, para el método *Entropía por niveles* la ondícula Biortogonal 2.4 con 3 niveles de descomposición fue la que arrojó mejores resultados. Con estos parámetros se lograron imágenes con PSNR superiores a los 25 dB y tasas de compresión desde 1,72 a 12,08 veces.

Para determinar cuales métodos ofrecen mejores resultados, se comparó el valor de PSNR y la razón de compresión (RC) de las ondículas que tuvieron un mejor desempeño para cada nivel de descomposición en los 2 métodos utilizados (los basados estrictamente en la descomposición en ondícula o los basados en las propiedades de la imagen). La tabla 1, resume los resultados obtenidos:

Método	Ondícula	n	PSNR (dB)	RC
Balance sparsity norm	db2	1	27,42	4
	db1	2	19,14	15,95
	Bior6.8	3	19,53	40,12
	Coif5	4	18,31	66,35
Entropía general	db2	1	42,88	1,73
	db1	2	36,90	2,44
	Bior6.8	3	31,49	6,20
	Coif5	4	27,87	10,89
Scarce high	Bior1.3	1	314,87	1,03
	Bior1.3	2	31,12	2,95
	Bior2.4	3	27,24	8,52
	Bior6.8	4	23,86	17,70
Entropía por niveles	Bior1.3	1	43,15	1,42
	Bior1.3	2	38,06	1,56
	Bior2.4	3	33,17	1,72
	Bior6.8	4	28,14	1,69

Tabla 1 Resumen de los resultados obtenidos para la huella dactilar 1

En la tabla 1 se observa como los métodos que determinar el valor del umbral basándose en las propiedades de la imagen (entropía general y entropía por niveles) presentan valores de PSNR altos (superiores) a los 23 dB pero sacrificando las tasas de compresión, en contraparte, los métodos basados en la descomposición en ondículas, obtienen razones de compresión superiores.

En la figura 13 se muestra una comparación entre el tamaño en bytes de la imagen original y el tamaño en bytes de la imagen 1 comprimida con los métodos y parámetros señalados en la tabla 1, para cada nivel de descomposición utilizado.

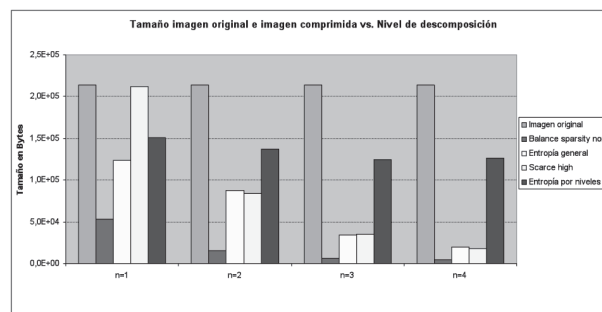


Figura 13 Tamaño imagen original e imágenes comprimidas huella dactilar 1

En la figura 14 se presentan las imágenes comprimidas y los errores obtenidos con respecto a la imagen original, para uno de los casos estudiados:



Figura 14 Compresión de la huella dactilar 1 utilizando la ondícula Coiflet de orden 5 con 4 niveles de descomposición (a) Imagen Original (b) Imagen comprimida con Balance Sparsity Norm (c) Imagen del error con Balance Sparsity Norm (d) Imagen comprimida con Entropía general y (e) Imagen del error con Entropía general

### 5.2.2. Imagen 2

La imagen utilizada es de 256x364 píxeles (93,184 KB), con 256 niveles de grises, como se muestra en la figura 15:



Figura 15 Imagen Patrón: huella dactilar 2

En las figuras 16 y 17, se muestran los métodos que arrojaron mejores resultados.

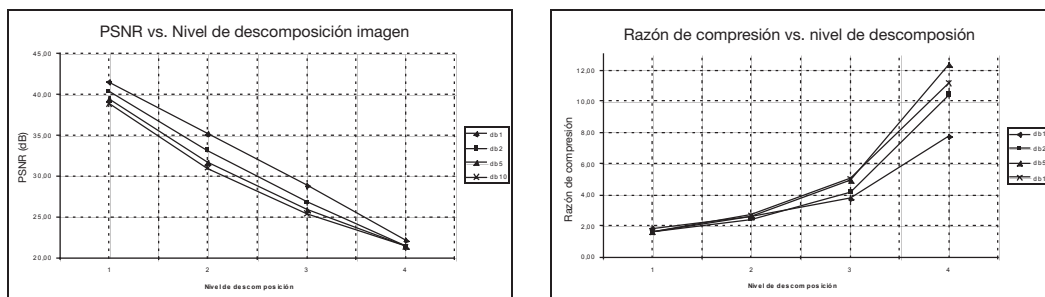


Figura 16 Compresión de huella dactilar 2 con el método Entropía general

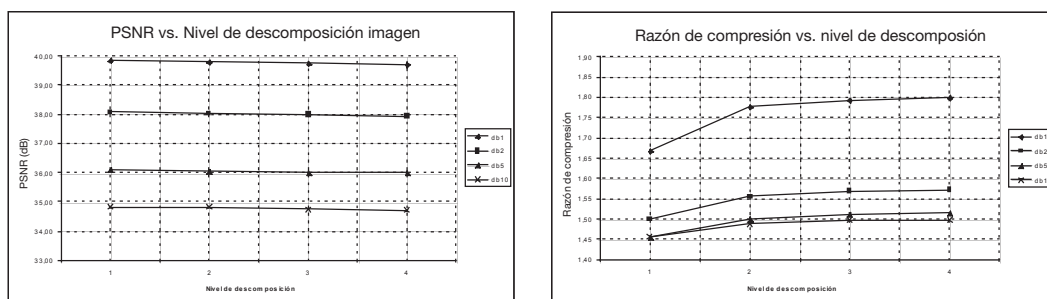


Figura 17 Compresión de huella dactilar 2 con el método Entropía por niveles

Como se puede apreciar en las gráficas 16 y 17, los parámetros que arrojaron mejores resultados para el método *Balance sparsity norm* fueron: la ondícula Coiflet de orden 5 con un nivel de descomposición; mientras que para la imagen comprimida con el método *Entropía general*, la ondícula Daubechies de primer orden con 3 niveles de descomposición presenta la mejor relación entre la tasa de compresión y el PSNR; para el método *Scarce high*, nuevamente la ondícula Coiflet de orden 5 con 3 niveles de descomposición, obtuvo buenos resultados; finalmente, para el método *Entropía por niveles*, la ondícula Daubechies de primer orden con 4 niveles de descomposición presentó resultados ligeramente superiores que los obtenidos con niveles de descomposición inferiores.

En el caso particular del método *Balance sparsity norm*, aunque se alcanzan buenas tasas de compresión, el PSNR de las huellas dactilares comprimidas está por debajo de los 23 dB, lo que las clasifica como imágenes de calidad regular e incluso mala. Por tanto, la utilización de este método para comprimir imágenes con características iguales o similares a la imagen 2, no es recomendable.

Todo lo contrario ocurre con el método *Entropía por niveles*, donde la calidad de la imagen comprimida es excelente (superior a los 23 dB), sin embargo, la razón de compresión es aproximadamente 2 veces la imagen original. En este sentido, aunque la tasa de compresión no sea lo suficientemente elevada, la utilización de este método se justifica para aquellos casos donde sea requisito indispensable conservar la calidad de la imagen original.

Para determinar cuales métodos ofrecen mejores resultados, se comparó el valor de PSNR y la razón de compresión (RC) de las ondículas que tuvieron un mejor desempeño para cada nivel de descomposición en los 2 métodos utilizados (los basados estrictamente en la descomposición en ondícula o los basados en las propiedades de la imagen). La tabla 2, resume los resultados obtenidos:

Método	Ondícula	n	PSNR (dB)	RC
Balance sparsity norm	Coif5	1	22,80	4,00
	Coif5	2	19,19	12,77
	Bior3.3	3	17,43	29,61
	db2	4	17,27	42,39
Entropía General	Coif5	1	39,54	1,69
	Coif5	2	31,79	2,76
	Bior3.3	3	22,79	7,08
	db2	4	21,40	10,42
Scarce High	db1	1	311,76	1,23
	db1	2	26,91	3,20
	db1	3	19,56	10,35
	db1	4	15,86	35,91
Entropía por Niveles	db1	1	39,85	1,67
	db1	2	39,79	1,78
	db1	3	39,75	1,79
	db1	4	39,72	1,80

Tabla 2 Resumen de los resultados obtenidos para la huella dactilar 2

En la tabla 2, se observa claramente como los métodos basados en las propiedades de la imagen (entropía general y entropía por niveles) conservan la calidad de la imagen (PSNR superiores a los 23dB) pero sacrificando en cierta medida la razón de compresión, mientras que los métodos basados en la descomposición en ondículas obtienen tasas de compresión elevadas, sin embargo, los valores de PSNR tienden a estar por debajo de los 23dB.

En la figura 18 se muestra una comparación entre el tamaño en bytes de la imagen original y el tamaño en bytes de la imagen comprimida con los distintos métodos y parámetros especificados en la tabla 2.

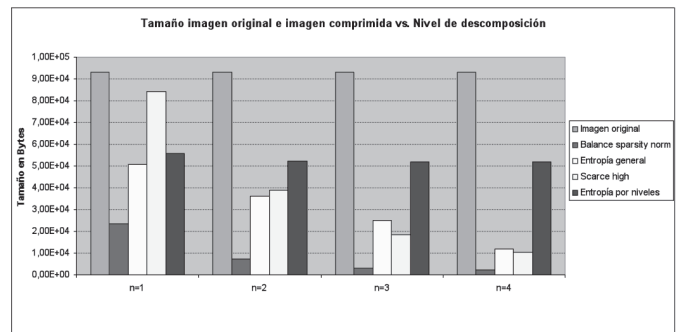


Figura 18 Tamaño imagen original e imágenes comprimidas huella dactilar 2

A continuación se presentan las imágenes comprimidas y los errores obtenidos con respecto a la imagen original, para cada caso estudiado:

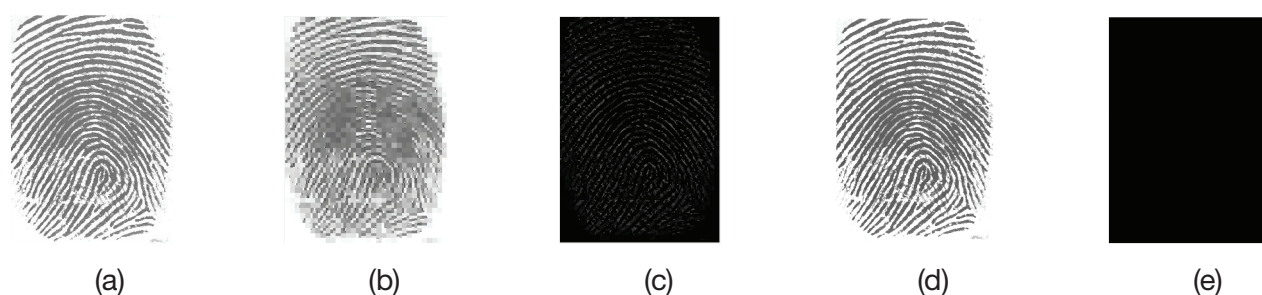


Figura 19 Compresión de la huella dactilar 2 utilizando la ondícula Daubechies de primer orden con 4 niveles de descomposición (a) Imagen Original (b) Imagen comprimida con Scarce high (c) Imagen del error con Scarce high (d) Imagen comprimida con Entropía por niveles y (e) Imagen del error con Entropía por niveles

## Conclusiones

La compresión de imágenes de huellas dactilares empleando la Transformada Ondícula posee un gran potencial. Al comprimir imágenes con métodos transformados, en particular, con ondículas, se logra que los errores de cuantificación producidos por la misma transformación y por la codificación de los píxeles, se distribuyan sobre toda la imagen al realizar la transformada inversa. Además, como la transformada es aplicada sobre toda la imagen, no se presentan los problemas de distorsión típicos de aquellos esquemas que dividen la imagen en bloques de tamaño uniforme y luego aplican alguna transformación, como es el caso del estándar JPEG.

Al variar el nivel de descomposición, cambia la cantidad de detalles en la descomposición. En este sentido, mientras mayor es el nivel de descomposición, mayores tasas de compresión pueden ser alcanzadas. Sin embargo, una mayor cantidad de energía de la imagen es vulnerable a perderse, ocasionando que la imagen comprimida esté distorsionada.

La imagen de la huella dactilar tiene un efecto en la compresión, ya que son los valores de los píxeles de la imagen los que determinan el tamaño de los

coeficientes de aproximación y detalles, y por tanto, cuanta energía está contenida en cada subimagen. Por esta razón, al utilizar huellas dactilares de características diferentes, se obtiene resultados (PSNR y tasas de compresión) diferentes.

Los algoritmos basados en las propiedades de la imagen (Entropía general y Entropía por niveles), poseen muy poca degradación de la imagen comprimida obteniendo valores de PSNR superiores a los 23 dB, pero sacrifican en cierta medida la tasa de compresión, la cual varía entre 1,42 y 10,89 veces el tamaño en bytes de la imagen original. En cambio los algoritmos basados estrictamente en la descomposición en ondículas (*Balance sparsity norm* y *Scarce high*) ofrecen tasas de compresión más elevadas 4 y 45,97 veces la imagen original) pero afectando la calidad de la imagen (alrededor de los 20dB). Por tanto, considerando el hecho de que trabajar con imágenes de huellas dactilares requiere un alto grado de precisión, sería conveniente optar por aquellos métodos que se basan en las propiedades de los datos de la imagen, con los cuales se garantiza la calidad de la imagen comprimida y se obtienen tasas de compresión aceptables.

Con base a los resultados obtenidos en este trabajo, se puede observar que no existe un método que sea el mejor para comprimir imágenes de huellas dactilares. La eficiencia de cada método está íntimamente relacionada con el tipo de imagen de entrada (huella dactilar original), la ondícula utilizada,



los niveles de descomposición empleados y del tamaño de muestras.

## 6. Referencias

- [1] Amura, A. (2004). *Seminario de Imagen y Sonido Digital*. [<http://pub.ufasta.edu.ar/SISD/jpeg/compressionimagen.htm>] (6 Nov. 2006).
- [2] Castleman, K. (1996). *Digital image processing*. New Jersey: McGraw-Hill.
- [3] Graps, A. *An Introduction to Wavelets*. IEEE Computational Science and Engineering, Vol. 2, num. 2. IEEE Computer Society. Los Alamitos USA, 1997.
- [4] Grasmann, U., Miiikkulainen, R. (2005). *Effective Image Compression using Evolved Wavelets*. Departamento de Computación. Universidad de Texas. [<http://www.genetic-programming.org/hc2005/f472-grasmann.pdf>] (26 de Ago. de 2007).
- [5] JPEG 2000. (2007) [<http://www.jpeg.org/jpeg/index.html>] (9 Feb. 2007).
- [6] Kouro, S. y Musalem, R. (2002). Tutorial introductivo a la teoría de wavelet [<http://www.elo.utfsm.cl/~elo377/Wavelet.pdf>] (30 Nov. 2006).
- [7] Lees, K. (2002). *Image compression using wavelets*. Department of Computer Science at the University of Sheffield [<http://www.dcs.shef.ac.uk/intranet/teaching/projects/archive/ug2002/pdf/u9kvl.pdf>] (7 de Jun. 2007).
- [8] Mallat, S. *A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation*. IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence. Vol. II No. 7. Julio 1989.
- [9] Miedema, R., Steed J. (2002). *Reducing Noise Using Wavelet*. Departamento de matemáticas. Universidad Grand Valley State. [[http://www.gvsu.edu/math/wavelets/student\\_work/Ms/Welcome\\_Home.html](http://www.gvsu.edu/math/wavelets/student_work/Ms/Welcome_Home.html)] (15 de abr. De 2007).
- [10] Misiti, M., Misiti, Y., Oppenheim, G. y Poggi J. (2000). *Wavelet Toolbox for use with MATLAB*. Versión 2. The Math Works, Inc. 2000.
- [11] Olgún, P. (1999). *Sensores Biométricos*. Revista Electrónica de la Escuela de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Central de Venezuela N° 6. [[http://neutron.ing.ucv.ve/revista-e/No6/Olguin%20Patricio/SEN\\_BIOMETRICOS.html](http://neutron.ing.ucv.ve/revista-e/No6/Olguin%20Patricio/SEN_BIOMETRICOS.html)] (16 de Jun. 2007).
- [12] Pérez, O. (2004). *Algoritmos de compresión de imágenes sin movimiento para comunicaciones móviles (3G) utilizando teoría de wavelets*. Tesis de Licenciatura. Universidad de las Américas. Puebla, México.
- [13] Quijada, R. (s.f.). *Compresión de imágenes utilizando la transformada wavelet*. [<http://neutron.ing.ucv.ve/comunicaciones/Asignaturas/DifusionMultimedia/Tareas%202005-1/DIFUSION-MULTIMEDIA%20QUIJADA.doc>.] (16 Abr. 2007).
- [14] Ramírez, J. (2001). *Nuevas Estructuras RNS para la Síntesis VLSI de Sistemas de Procesamiento Digital de Señales*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.
- [15] Rodríguez, F., Suárez, F. (2004). *Identificación dactilar basada en filtros de Garbor*. Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones. Universidad de Vigo. [<http://www.gpi.tsc.uvigo.es/pub/papers/said.pdf>] (16 de Jun. 2007).
- [16] Sánchez, R. (2002). *Verificación automática de personas mediante huella dactilar*. Departamento de tecnología Electrónica - Grupo de Microelectrónica. Universidad Carlos III de Madrid. [[http://www.revistasic.com/revista50/pdf\\_50/SIC\\_50\\_agora.PDF](http://www.revistasic.com/revista50/pdf_50/SIC_50_agora.PDF)] (31 de Mar. de 2007).
- [17] Schröder, P. (1995). *Wavelet Image Compression*. University of South Carolina [<http://www.wired.com/wired/archive/3.05/geek.html>] (12 de Jun. 2007).