SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2019 **Issue:** 05 **Volume:** 73

Published: 01.05.2019 **http://T-Science.org**

QR – Issue QR – Article

SECTION 1. Theoretical research in mathematics

Ablakul Abdirashidov
Corresponding member of International Academy, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent to department of Theoretical and Applied mechanics, Samarkand State University, Uzbekistan
abdira@mail.ru

Abdusattor Babayarov
Candidate of Technical Sciences, Docent to Department of Mathematical modeling and complex programming, Samarkand State University, Uzbekistan

Bahrom Aminov
Assistant to Department of Mathematical modeling and complex programming, Samarkand State University, Uzbekistan,

Akmaljon Abdurashidov
Researcher Samarkand State University, Uzbekistan,

APPLICATION THE HOMOTOPY PERTURBATION METHOD FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF LINEAR INTEGRAL EQUATIONS FREDHOLM

Abstract*: The purpose of this operation is to apply a method of homotopy perturbation method to the solution of the linear integral equations of Fredholm, and also to confirm reliability of this method in processing of scientific problems. In this operation the homotopy perturbation method is used to approximate solution typical the linear integral equations of Fredholm of a different order and different type. Results of this method meets quicker to the exact decision for some linear and nonlinear problems. Homotopy perturbation method very effective and idle time.*

Key words*: integral equations, homotopy perturbation method, initial approach, approximate solution.*

Language*: Russian*

Citation: Abdirashidov, A., Babayarov, A., Aminov, B., & Abdurashidov, A. (2019). Application the homotopy perturbation method for the approximate solution of linear integral equations Fredholm. *ISJ Theoretical & Applied Science, 05 (73)*, 11-16.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-05-73-3 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2019.05.73.3

ПРИМЕНЕНИЕ ГОМОТОПИЧЕСКОГО МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

Аннотация*: Целью данной работы является применить гомотопического метода малого параметра к решению линейных интегральных уравнений Фредгольма, а также подтвердить надежность данного метода в обработке научных проблем. В этой работе гомотопический метод малого параметра использован к приближенному решению типичных линейных интегральных уравнений Фредгольма разного* *порядка и разного типа. Результаты этого метода сходится быстрее к точному решению для некоторых линейных и нелинейных проблем. Гомотопический метод малого параметра очень эффективные и простой.*

Ключевые слова: *интегральные уравнения, гомотопический метод малого параметра, начальное приближение, приближенное решение.*

Введение.

Многие нелинейные явления, возникающие в таких областях науки, как гидроаэродинамика, физика твердого тела, физика плазмы, математическая биология и химическая кинетика, могут быть смоделированы линейными или нелинейными уравнениями. Для решения таких задач разработаны многочисленные аналитические, приближенные и численные методы. Один из таких методов гомотопический метод малого параметра (ГММП, homotopy perturbation method (HPM)) впервые была предложена ученым J.H.He [8-11]. Далее этот метод были развиты многими учеными [4, 6, 7, 12, 13, 15-17], а последние годы ее модифицированным вариантом (МГММП) были решены многие прикладные задачи, связанные с обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями [1-17]. Ниже кратко изложены суть ГММП и МГММП, с этими методами решены конкретные примеры, связанные с линейными интегральными уравнениями Фредгольма.

Постановка задачи.

Общая форма этого интегрального уравнения имеет вид $L[y(x)]+N[y(x)]=g(x),$ где L – линейный оператор; N – нелинейных оператор; $g(x)$ – известная, а $y(x)$ – неизвестная функция. Требуется решить следующую линейную интегральную уравнению (ИУ) Фредгольма

$$y(x)=f(x)+\int_a^b K(x,t)y(t)dt \qquad (1)$$

ГММП и МГММП, где $y(x)$ – искомая функция; $f(x)$ – известная функция; $K(x,t)$ – ядро интегрального уравнения (1) [10, 12-16].

Алгоритм ГММП.

По идею метода уравнение (1) перепишем в виде [9, 10]:

$$R(x)=y(x)-f(x)-$$

$$-\int_a^b K(x,t)[L(y(t))+N(y(t))]dt=0.$$

Введем новую функцию

$$H(y,p)=(1-p)F(y)+pL(y),$$

для которой верны следующие равенства:

$$H(y,0)=F(y)=y(x)-f(x);$$

$$H(y,1)=L(y)=y(x)-f(x)-$$

$$-\int_a^b K(x,t)y(t)dt.$$

Найдем такое значение малого параметра $p\epsilon[0,1]$, чтобы выполнялось тождество $L(y)=0$. Тогда мы имеем точное решение (1) вида

$$y(x)=\lim_{p\to1} y(x)=$$

$$=\lim_{p\to1}(y_0(x)+py_1(x)+p^2y_2(x)+...)$$

или

$$y(x)=y_0(x)+y_1(x)+y_2(x)+...,$$

где

$$y_0(x)=f(x),$$

$$y_{n+1}(x)=\int_a^b K(x,t)y_n(t)dt, \quad n=0,1,2,\dots .$$

Алгоритм МГММП.

Введем новую функцию

$$H(y,p,m)=(1-p)F(y)+$$

$$+pL(y)+p(1-p)mK^*f=0,$$

которые верны следующие равенства:

$$H(y,0)=F(y)=y(x)-f(x);$$

$$H(y,1)=L(y)=y(x)-f(x)-$$

$$-\int_a^b K(x,t)y(t)dt;$$

$$K^*f=\int_a^b K(x,t)f(t)dt \quad [6].$$

Тогда

$$(1-p)(y-f)+p\left[y-f-\int_a^b K(x,t)y(t)dt\right]+$$

$$+p(1-p)mK^*f=0$$

или

$$y-f-p\int_a^b K(x,t)y(t)dt+$$

$$+p(1-p)mK^*f=0.$$

Отсюда

p^0: $y_0(x)-f(x)=0 \Rightarrow y_0(x)=f(x);$

p^1: $y_1(x)-\int_a^b K(x,t)y_0(t)dt + +mK^* f=0 \Rightarrow y_1(x)=(1-m)K^* f$;

p^2: $y_2(x)-\int_a^b K(x,t)y_1(t)dt - mK^* f=0 \Rightarrow y_2(x)=(1-m)K^*K^* f+mK^* f$;

p^3: $y_3(x)-\int_a^b K(x,t)y_2(t)dt=0 \Rightarrow y_3(x)=\int_a^b K(x,t)y_2(t)dt$; …;

p^{n+1}: $y_{n+1}(x)=\int_a^b K(x,t)y_n(t)dt$.

Выбираем малого параметра p так, чтобы выполнялись равенств

$$y_2(x)=y_3(x)=y_4(x)=...=0.$$

Отсюда имеем решение

$$y(x)=y_0(x)+y_1(x),$$

где

$$y_2(x)=0 \Rightarrow (1-m)K^*K^* f+mK^* f=0$$

$$\Rightarrow m(x)=\frac{K^*K^* f}{K^*K^* f-K^* f}.$$

Далее решены несколько примеры, посвященные к решению (1), гомотопическим методом малого параметра и ее модификацией [6-15].

Пример 1.

Требуется решить следующую линейную интегральную уравнению Фредгольма ГММП и МГММП:

$$y(x)=x^2-\frac{x}{3}+\int_0^1 xy(t)dt.$$

1) *ГММП*. Введем следующие обозначения вида:

$$F(y)=y(x)-x^2+\frac{x}{3};$$

$$L(y)=y(x)-x^2+\frac{x}{3}-\int_0^1 xy(t)dt.$$

Тогда имеем следующие приближения:

p^0: $y_0(x)=x^2-\frac{x}{3}$;

p^1: $y_1(x)=\int_0^1 xy_0(t)dt=\frac{x}{6}$;

p^2: $y_2(x)=\int_0^1 xy_1(t)dt=\frac{x}{12}$;

p^3: $y_3(x)=\int_0^1 xy_2(t)dt=\frac{x}{24}$;

p^4: $y_4(x)=\int_0^1 xy_3(t)dt=\frac{x}{48}$;

p^5: $y_5(x)=\int_0^1 xy_4(t)dt=\frac{x}{96}$; … .

Точное решение задачи:

$$y(x)=\lim_{p\to 1} y(x)= = y_0(x)+y_1(x)+y_2(x)+...=x^2.$$

2) *МГММП*. Введем следующие обозначения вида:

$$F(y)=y(x)-x^2+\frac{x}{3};$$

$$L(y)=y(x)-x^2+\frac{x}{3}-\int_0^1 xy(t)dt.$$

Тогда имеем следующие приближения:

$$y_0(x)=x^2-\frac{x}{3}; \quad y_1(x)=(1-m)K^* f,$$

где

$$m(x)=\frac{K^*K^* f}{K^*K^* f-K^* f};$$

$$K^* f=\int_a^b K(x,t)f(t)dt;$$

$$y(x)=y_0(x)+y_1(x).$$

Отсюда

$$K^* f=\frac{x}{6}; \quad K^*K^* f=\frac{x}{12};$$

$$m(x)=-1; \quad y_1(x)=\frac{x}{3}; \quad y(x)=x^2.$$

Пример 2.

Требуется решить следующую линейную интегральную уравнению Фредгольма ГММП и МГММП:

$$y(x) = xe^x - x + x\int_0^1 y(t)dt.$$

1) *ГММП*. Введем следующие обозначения вида:

$$F(y) = y(x) - xe^x + x;$$

$$L(y) = y(x) - xe^x + x - x\int_0^1 y(t)dt.$$

Тогда имеем следующие приближения:

$$p^0:\ y_0(x) = xe^x - x;$$

$$p^1:\ y_1(x) = \int_0^1 xy_0(t)dt = \frac{x}{2};$$

$$p^2:\ y_2(x) = \int_0^1 xy_1(t)dt = \frac{x}{4};$$

$$p^3:\ y_3(x) = \int_0^1 xy_2(t)dt = \frac{x}{8};$$

$$p^4:\ y_4(x) = \int_0^1 xy_3(t)dt = \frac{x}{16};$$

$$p^5:\ y_5(x) = \int_0^1 xy_4(t)dt = \frac{x}{32};\ \ldots.$$

Точное решение задачи:

$$y(x) = \lim_{p\to 1} y(x) =$$

$$= y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \ldots = xe^x.$$

2) *МГММП*. Введем следующие обозначения вида:

$$F(y) = y(x) - xe^x + x;$$

$$L(y) = y(x) - xe^x + x - x\int_0^1 y(t)dt.$$

Тогда имеем следующие приближения:

$$y_0(x) = xe^x - x;$$

$$y_1(x) = (1-m)K^* f,$$

где

$$m(x) = \frac{K^*K^* f}{K^*K^* f - K^* f};$$

$$K^* f = \int_a^b K(x,t) f(t)dt;$$

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x).$$

Отсюда

$$K^* f = \frac{x}{2};\quad K^*K^* f = \frac{x}{4};$$

$$m(x) = -1;\quad y_1(x) = x;\quad y(x) = xe^x.$$

Пример 3.

Требуется решить следующую линейную интегральную уравнению Фредгольма ГММП и МГММП:

$$y(x) = \frac{9}{10}x^2 + \frac{1}{2}x^2\int_0^1 t^2 y(t)dt.$$

1) *ГММП*. Введем следующие обозначения вида:

$$F(y) = y(x) - \frac{9}{10}x^2;$$

$$L(y) = y(x) - \frac{9}{10}x^2 - \frac{1}{2}x^2\int_0^1 t^2 y(t)dt.$$

Тогда имеем следующие приближения:

$$p^0:\ y_0(x) = \frac{9}{10}x^2;$$

$$p^1:\ y_1(x) = \frac{1}{2}x^2\int_0^1 t^2 y_0(t)dt = \frac{9}{100}x^2;$$

$$p^2:\ y_2(x) = \frac{1}{2}x^2\int_0^1 t^2 y_1(t)dt = \frac{9}{1000}x^2;$$

$$p^3:\ y_3(x) = \frac{1}{2}x^2\int_0^1 t^2 y_2(t)dt = \frac{9}{10000}x^2;$$

$$p^4:\ y_4(x) = \frac{1}{2}x^2\int_0^1 t^2 y_3(t)dt = \frac{9}{100000}x^2;\ \ldots.$$

Точное решение задачи:

$$y(x) = \lim_{p\to 1} y(x) =$$

$$= y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \ldots = x^2.$$

2) *МГММП*. Введем следующие обозначения вида:

$$F(y) = y(x) - \frac{9}{10}x^2;$$

$$L(y) = y(x) - \frac{9}{10}x^2 - \frac{1}{2}x^2\int_0^1 t^2 y(t)dt.$$

Тогда имеем следующие приближения:

$$y_0(x) = \frac{9}{10}x^2;$$

$$y_1(x) = (1-m)K^* f,$$

где

$$m(x) = \frac{K^*K^* f}{K^*K^* f - K^* f};$$

$$K^* f = \int_a^b K(x,t) f(t) dt;$$

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x).$$

Отсюда

$$K^* f = \frac{9}{100}x^2;$$

$$K^*K^* f = \frac{9}{1000}x^2;$$

$$m(x) = -\frac{1}{9};\quad y_1(x) = \frac{1}{10}x^2;\quad y(x) = x^2.$$

Эти примеры также были решены с помощью методом вариационных итераций [11] и были получены такие точные решения.

Выводы.

Таким образом, гомотопический метод малого параметра и ее модифицированный вариант успешно применены к решению линейных интегральных уравнений Фредгольма. Результаты расчетов проверены с помощью Maple. Эти методы полезны и для линейных и для нелинейных уравнений. Эти методы очень эффективны для нахождения точных и приближенных решений для широких классов линейных и нелинейных проблем.

References:

1. Abdirashidov, A., Kadirov, N. X., Ortikov, B. B., & Abdurashidov, A. A. (2018). Solution of fractional telegraph and diffusion equations using the approximation methods. *International Scientific Journal «Theoretical & Applied Science», №10,* pp.101-107.
2. Abdirashidov, A., Kadirov, N. X., Ortikov, B. B., & Abdurashidov, A. A. (2018). Solution of fractional telegraph and diffusion equations using the approximation methods. *International Scientific Journal «Theoretical & Applied Science», №10*, pp.101-107.
3. Abdirashidov, A., Ortiqov, B. B., Qadirov, N. X., & Abdurashidov, A. A. (2018). Exact solution of fractional diffusion equations using the variational iteration method and Adomian decomposition method. *International Scientific Journal «Theoretical & Applied Science», №5*, pp.101-107.
4. Abdou, M. A., & Soliman, A. A. (2005). New applications of variational iteration method. *Phys. D,* ***211*** *(1-2),* 1-8.
5. Abdurashidov, A. A., Ortiqov, B. B., Qadirov, N. X., & Abdirashidov, A. Exact solution of nonlinear equations Burgers-Huxley, Korteweg-de Vries-Burgers and Klein-Gordon using the modified simple equation method. *International Scientific Journal «Theoretical & Applied Science», №3*, pp.101-107.
6. Aghazadeh, N., & Mohammadi, S. (2012). A modified homotopy perturbation method for solving linear and nonlinear equations. *International Journal of Nonlinear Science. Vol. 13, No.3*, pp. 308-316.
7. Golbabai, A., & Keramati, B. (2008). Modified homotopy perturbation method for solving Fredholm integral equations. *Chaos, Solitons and Fractals, 37,* pp.1528-1537.
8. He, J. H., & Wu, X. H. (2007). Variational iteration method: New development and applications. *Computers and Mathematics with Applications, 54 (7-8)*: 881-894.
9. He, J. H. (2009). An elementary introduction to the homotopy perturbation method. *Computers and Mathematics with Applications*, *57*, pp. 410-412.
10. He, J. H. (1999). Homotopy perturbation technique. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 178*, pp. 257-262.
11. He, J. H. (2007). Variational iteration method-Some recent results and new interpretations. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 207*, 3-17.
12. Javidi, M. (2009). Modified homotopy perturbation method for solving system of linear Fredholm integral equations. *Mathematical and Computer Modeling, 50*, pp. 159-165.

13. Kudryashov, N. A. (2010). *Metodi nelineynoy matematicheskoy fiziki:* Uchebnoye posobiye. 2-ye izd. (p.368). Dolgoprudniy: Intellekt.
14. Mamatov, S. S., & Abdirashidov, A. (2014). *Integral tenglamalarni taqribiy yechish usullari. Uslubiy qo'llanma*. (p.124). Samarqand: SamDU nashri.
15. Saberi-Nadjafi, J., & Ghorbani, A. (2009). Hes homotopy perturbation method: an effective tool for solving nonlinear and integro-differential equations. *Computers and Mathematics with Applications, 58*, pp. 2379-2390.
16. Wazwaz, A. M. (2015). *A First Cours in Integral Equations. Second Edition*. (p.331). Chicago: Saint Xavier University.
17. Wazwaz, A. M. (2011). *Linear and Nonlinear Integral Equations: Method and Applications*. (p.658). Chicago: Saint Xavier University.