SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2018 **Issue:** 10 **Volume:** 66

Published: 05.10.2018 http://T-Science.org

QR – Issue QR – Article

SECTION 1. Theoretical research in mathematics

Ablakul Abdirashidov
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent to department of theoretical and applied mechanics,
Samarkand State University, Uzbekistan,
abdira@mail.ru

Bekzod Ortikov
Student of Mechanical and Mathematical Faculty, Samarkand State University, Uzbekistan

Nurshod Kadirov
Student of Mechanical and Mathematical Faculty, Samarkand State University, Uzbekistan

Akmaljon Abdurashidov
Assistant to department of theoretical and applied mechanics,
Samarkand State University, Uzbekistan,

SOLUTION OF FRACTIONAL TELEGRAPH AND DIFFUSION EQUATIONS USING THE APPROXIMATION METHODS

***Abstract**: In this paper, variational iteration method, Adomian decomposition method and method of separation of variables has been applied to obtain exact solutions of fractional telegraph and diffusion equations. It is shown that these methods are effective and more powerful mathematical tools for solution of the partial differential equations of a fractional order.*

***Key words**: equations of telegraph and diffusion of fractional order, variational iteration method, Adomian decomposition method, method of separation of variables, exact solutions.*

***Language**: Russian*

Citation: Abdirashidov, A., Ortikov, B., Kadirov, N., & Abdurashidov, A. (2018). Solution of fractional telegraph and diffusion equations using the approximation methods. *ISJ Theoretical & Applied Science, 10 (66),* 30-36.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-10-66-4 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.10.66.4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕЛЕГРАФА И ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПРИБЛИЖЕННЫМИ МЕТОДАМИ

***Аннотация**: В работе применены метод вариационных итераций, метод разложения Адомиана и метод разделения переменных для нахождения решения уравнений телеграфа и диффузии дробного порядка. Показано, что эти методы являются эффективными и более мощными математическими инструментами для решения дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка.*

***Ключевые слова**: уравнения телеграфа и диффузия дробного порядка, метод вариационных итераций, метод разложения Адомиана, метод разделения переменных, точное решение.*

Введение.

Исследование некоторых физико-механических явлений, описываемых линейными и нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП) дробного порядка занимают особое место в механике, математике и физике. Постановки задач усложняются и все более полно соответствуют реальным условиям. Кроме ограниченного количества этих уравнений, трудно найти их точные или приближенные решения. Поэтому нахождение точных или приближенных решений ДУЧП дробного порядка очень важно. Для этого предложены некоторые новые методы, чтобы решить их (например, метод разложения Адомиана [20, 21], метод вариационных итераций [1, 2, 10, 11, 20], упрощенный метод укороченных разложений [3-5, 14, 16, 17, 24], метод sin-cos функций [20-22], метод tanh-coth функций [20-22], метод exp-функции [12, 16, 20], метод гомотопических возмущений [9, 20] и их различные модифицированные варианты). Из них метод вариационных итераций (МВИ), метод разложения Адомиана (МРА) и метод разделения переменных (МРП) широко используются, чтобы получить точные и приближенные решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений целого или дробного порядка в науке и практике. В данной работе эти методы применены для нахождения точного решения некоторых уравнений телеграфа и диффузии дробного порядка, а затем их результаты сравниваются.

Постановка задачи. Некоторые основные понятия.

Нелинейную дифференциальную уравнению в частных производных дробного порядка в общем виде можно записать так $Lu(x,t)+Nu(x,t)=q(x,t),$ где L – линейный, а N – нелинейный оператор; $q(x,t)$ – аналитическая, а $u(x,t)$ – неизвестная функция.

Дробные производные и интегралы Римана-Лиувилля. Пусть $\Omega=[a,b]$ – конечный интервал на действительной оси R^1. Дробные интегралы $I_{ax}^{\alpha} f$ (левосторонний) и $I_{xb}^{\alpha} f$ (правосторонний) Римана-Лиувилля порядка α $(\mathrm{Re}\,\alpha>0)$:

$$I_{ax}^{\alpha} f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}},\ (x>a),$$

$$I_{xb}^{\alpha} f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{1-\alpha}},\ (x<b),$$

$$I_{ax}^{\alpha} f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x f(\xi)(d\xi)^{\alpha},\quad 0<\alpha\le 1.$$

Здесь $\Gamma(\alpha)$ – Гамма функция Эйлера. С учетом предыдущие дробные производные Римана-Лиувилля $D_{ax}^{\alpha} f$ и $D_{xb}^{\alpha} f$ порядка α $(\mathrm{Re}\,\alpha>0)$:

$$D_{ax}^{\alpha} f(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[I_{ax}^{n-\alpha} f(x)\right]=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1+\alpha-n}},\ (n=[\mathrm{Re}\,\alpha]+1;\ x>a),$$

$$D_{xb}^{\alpha} f(x)=\left(\frac{-d}{dx}\right)^n\left[I_{xb}^{n-\alpha} f(x)\right]=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{d}{dx}\right)^n\int_x^b \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{1+\alpha-n}},\ (n=[\mathrm{Re}\,\alpha]+1;\ x<b),$$

где $[\mathrm{Re}\,\alpha]$ – целая часть $\mathrm{Re}\,\alpha$. Основные формулы производных и интегралов для дробного порядка:

$$D_{ax}^{\alpha}(uv)=u^{(\alpha)}v+uv^{(\alpha)},$$

$$I_{ax}^{\alpha}D_{ax}^{\alpha} f(x)=f(x)-f(0),\ 0<\alpha\le 1,$$

$$I_{ab}^{\alpha}u^{(\alpha)}v=(uv)\big|_a^b-I_{ab}^{\alpha}uv^{(\alpha)}.$$

Функция Миттаг-Лефлера. Функция Миттаг-Лефлера [3, 9, 20, 23] задается на множестве значений комплексного аргумента z с помощью бесконечного ряда и зависит от двух параметров α и β:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\beta+n\alpha)},\ \alpha\in R_+,\ \beta\in R,\ z\in C,$$

$$\cos_{\alpha} x=\frac{E_{\alpha}(ix)+E_{\alpha}(-ix)}{2},$$

$$\sin_{\alpha} x=\frac{E_{\alpha}(ix)-E_{\alpha}(-ix)}{2i},\quad \alpha\in R_+,\ i\in C.$$

Если $\alpha=\beta=1$, то приведенная формула определяет экспоненциальную функцию e^z

$$E_{1,1}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(1+n)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z.$$

Функция Миттаг-Лефлера играет важную роль в решении интегро-дифференциальных уравнений нецелых порядков. Многие специальные функции могут быть выражены через функции Миттаг-Лефлера с различными параметрами. К таким функциям, в частности, относятся гиперболические синус и косинус, функции Миллера-Роса, Работнова и др. [19].

Алгоритм решения задачи методом вариационных итераций.

По идею вариационно-итерационного метода [20] итерационную решению этого уравнения можно записать следующее соотношение

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)+\int_0^t \lambda(t,s)\left[Lu_n(x,s)+\right.$$
$$\left.+N\tilde{u}_n(x,s)-q(x,s)\right]ds, \quad n\geq 0,$$

где λ– множитель Лагранжа; $\tilde{u}_n$ – вариационный член, т.е. $\delta\tilde{u}_n$=0; $u_0(x,t)=u(x,0)+u_t(x,0)t+\dots$. Окончательно имеем: $u(x,t)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x,t)$.

Алгоритм решения задачи методом разложения Адомиана.

Нелинейную дифференциальную уравнению в частных производных перепишем в виде $Lu(x,t)=q(x,t)-Nu(x,t)$, где L – дифференциальный оператор; L^{-1} – интегральный оператор. Применение обратного оператора к заданному уравнению: $u(x,t)=f(x,t)-L^{-1}\left[Nu(x,t)\right]$. Основная идея МРА это составление функциональное уравнение вида $u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)$. Отсюда имеем рекуррентное соотношение вида [20]:

$$u_0(x,t)=f(x,t);\quad u_{n+1}=-L^{-1}\left[Nu_n(x,t)\right],$$
$$n\geq 0.$$

Пример 1.

Требуется точно решить следующую смешанную задачу для неоднородного уравнения телеграфа дробного порядка методом разложения Адомиана (МРА):

$$D_t^{2\alpha}u(x,t)+D_t^{\alpha}u(x,t)+D_x^2u(x,t)-u(x,t)+$$
$$+x^2-2=0,\ 0{,}5<\alpha\leq 1,\ 0<x<\pi, \qquad (1)$$
$$u(0,t)=E_\alpha(t^\alpha),\ u_x(0,t)=0, \qquad (2)$$
$$u(x,0)=\cos x+x^2,\ D_t^\alpha u(x,0)=\cos x. \qquad (3)$$

1) Для МРА имеем формулу приближенного решения задачи (1) и (2):

$$\int_0^x d\eta\int_0^\eta\frac{\partial^2u(\xi,t)}{\partial\xi^2}d\xi=\int_0^x d\eta\int_0^\eta\left[u(\xi,t)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^{2\alpha}u(\xi,t)}{\partial t^{2\alpha}}-\frac{\partial^{\alpha}u(\xi,t)}{\partial t^{\alpha}}-\xi^2+2\right]d\xi\Rightarrow$$
$$u(x,t)=E_\alpha(t^\alpha)+x^2-\frac{2x^4}{4!}+\int_0^x d\eta\cdot$$
$$\cdot\int_0^\eta\left[u(\xi,t)-\frac{\partial^{2\alpha}u(\xi,t)}{\partial t^{2\alpha}}-\frac{\partial^{\alpha}u(\xi,t)}{\partial t^{\alpha}}\right]d\xi.$$

По идее МРА: $u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)\Rightarrow$

$$u_0(x,t)+u_1(x,t)+\dots=E_\alpha(t^\alpha)+x^2-\frac{2x^4}{4!}+$$
$$+\int_0^x d\eta\int_0^\eta\left\{\left[u_0(\xi,t)+u_1(\xi,t)+\dots\right]-\right.$$
$$-\frac{\partial^{2\alpha}\left[u_0(\xi,t)+u_1(\xi,t)+\dots\right]}{\partial t^{2\alpha}}-$$
$$\left.-\frac{\partial^{\alpha}\left[u_0(\xi,t)+u_1(\xi,t)+\dots\right]}{\partial t^{\alpha}}\right\}d\xi;$$
$$u_0(x,t)=E_\alpha(t^\alpha)+x^2-\frac{2x^4}{4!};$$
$$u_1(x,t)=-\frac{x^2}{2!}E_\alpha(t^\alpha)+\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^6}{6!};$$
$$u_2(x,t)=\frac{x^4}{4!}E_\alpha(t^\alpha)+\frac{2x^6}{6!}-\frac{2x^8}{8!};\ \dots;$$
$$u_n(x,t)=(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}E_\alpha(t^\alpha)+$$
$$+\frac{2x^{2n+2}}{(2n+2)!}-\frac{2x^{2n+4}}{(2n+4)!}$$

и т.д. Решение задачи:

$$u(x,t)=u_0(x,t)+u_1(x,t)+\dots=$$
$$=E_\alpha(t^\alpha)\left[1-\frac{x^2}{2!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots\right]+$$
$$+x^2-\frac{2x^4}{4!}+\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^6}{6!}+\dots+\frac{2x^{2n+2}}{(2n+2)!}-$$
$$-\frac{2x^{2n+4}}{(2n+4)!}+\dots=\cos x\cdot E_\alpha(t^\alpha)+x^2.$$

2) Для МРА имеем формулу приближенного решения задачи (1) и (3):

$$I_{0t}^{2\alpha}D_t^{2\alpha}u(x,t)=I_{0t}^{2\alpha}\left[u(x,t)-D_x^2u(x,t)-\right.$$
$$\left.-D_t^\alpha u(x,t)-x^2+2\right]\Rightarrow$$
$$u(x,t)=\cos x+x^2+\cos x\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+$$
$$+(2-x^2)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(1+2\alpha)}\int_0^t\left[u(x,\xi)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2(x,\xi)}{\partial x^2}-\frac{\partial^\alpha u(x,\xi)}{\partial\xi^\alpha}\right](d\xi)^{2\alpha}.$$

По идею МРА: $u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)\Rightarrow$

$$u_0(x,t)+u_1(x,t)+u_2(x,t)+\dots=\cos x+x^2+$$
$$+\cos x\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+(2-x^2)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+2\alpha)}\int_0^t\{[u_0(x,\xi)+u_1(x,\xi)+...]-$$
$$-\frac{\partial^2[u_0(x,\xi)+u_1(x,\xi)+...]}{\partial x^2}-$$
$$-\frac{\partial^\alpha[u_0(x,\xi)+u_1(x,\xi)+...]}{\partial\xi^\alpha}\Big\}(d\xi)^{2\alpha};$$

$$u_0(x,t)=\cos x+x^2+\cos x\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+$$
$$+(2-x^2)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)};$$
$$u_1(x,t)=\cos x\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}+(x^2-2)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}+$$
$$+\cos x\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}+(2-x^2)\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}-\frac{x^2t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}$$

и т.д. Решение задачи:

$$u(x,t)=u_0(x,t)+u_1(x,t)+u_2(x,t)+...=$$
$$=\cos x\left[1+\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}+...\right]+x^2=$$
$$=\cos x\cdot E_\alpha(t^\alpha)+x^2.$$

В частности, если $\alpha=1$, то вместо уравнение (1) получим уравнение телеграфа и ее точное решение имеет вид $u(x,t)=e^t\cos x+x^2$.

Пример 2.

Требуется точно решить следующую смешанную задачу для неоднородного уравнения диффузии дробного порядка методом вариационных итераций (МВИ) и методом разложения Адомиана (МРА) [15, 19]:

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}=A\sin_\alpha\frac{3\pi x}{2p}\cos_\alpha\frac{\pi y}{2s}+$$
$$+a^2\left(\frac{\partial^{2\alpha}u(x,y,t)}{\partial x^{2\alpha}}+\frac{\partial^{2\alpha}u(x,y,t)}{\partial y^{2\alpha}}\right);$$
$$0<\alpha\le 1,\ 0<x<p,\ 0<y<s,\ t>0,$$
$$u(0,y,t)=u_x(p,y,t)=0,$$
$$u_y(x,0,t)=u(x,s,t)=0, \qquad (4)$$
$$u(x,y,0)=B\sin_\alpha\frac{\pi x}{2p}\cos_\alpha\frac{3\pi y}{2s}.$$

1) По идее МВИ имеем формулу приближенного решения задачи (4):

$$u_{n+1}(x,y,t)=u_n(x,y,t)+\int_0^t\lambda(\xi)\left[\frac{\partial u(x,y,\xi)}{\partial\xi}-\right.$$
$$-a^2\left(\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}(x,y,\xi)}{\partial x^{2\alpha}}+\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}(x,y,\xi)}{\partial y^{2\alpha}}\right)-$$
$$\left.-A\sin_\alpha\frac{3\pi x}{2p}\cos_\alpha\frac{\pi y}{2s}\right]d\xi.$$

Здесь $\lambda(\xi)$ - множитель Лагранжа, а для стационарного случая $\left.\frac{\partial^\alpha\lambda(\xi)}{\partial\xi^\alpha}\right|_{\xi=t}=0$, $1+\lambda(\xi)|_{\xi=t}=0$ и отсюда имеем $\lambda(\xi)=-1$.

$$u_{n+1}(x,y,t)=u_n(x,y,t)-\int_0^t\left[\frac{\partial u(x,y,\xi)}{\partial\xi}-\right.$$
$$-a^2\left(\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}(x,y,\xi)}{\partial x^{2\alpha}}+\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}(x,y,\xi)}{\partial y^{2\alpha}}\right)-$$
$$\left.-A\sin_\alpha\frac{3\pi x}{2p}\cos_\alpha\frac{\pi y}{2s}\right]d\xi.$$

Применяя МВИ, получим следующие результаты:

$$u_0(x,y,t)=u(x,y,0)=B\sin_\alpha\frac{\pi x}{2p}\cos_\alpha\frac{3\pi y}{2s};$$
$$u_1(x,y,t)=B\sin_\alpha\frac{\pi x}{2p}\cos_\alpha\frac{3\pi y}{2s}+At\sin_\alpha\frac{3\pi x}{2p}\cos_\alpha\frac{\pi y}{2s}-$$
$$-\frac{Ba^2\pi^2t}{4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{9}{s^2}\right)\sin_\alpha\frac{\pi x}{2p}\cos_\alpha\frac{3\pi y}{2s};$$
$$u_2(x,y,t)=B\sin_\alpha\frac{\pi x}{2p}\cos_\alpha\frac{3\pi y}{2s}\cdot$$
$$\cdot\left[1-\frac{a^2\pi^2t}{4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{9}{s^2}\right)+\frac{a^4\pi^4t^2}{32}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{9}{s^2}\right)^2\right]+$$
$$+A\sin_\alpha\frac{3\pi x}{2p}\cos_\alpha\frac{\pi y}{2s}\left[t-\frac{a^2\pi^2t^2}{8}\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)\right]$$

и т.д. Решение задачи:

$$u(x,y,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,y,t)=$$
$$=Be^{-\frac{a^2\pi^2}{4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{9}{s^2}\right)t}\cdot\sin_\alpha\frac{\pi x}{2p}\cos_\alpha\frac{3\pi y}{2s}+$$
$$+\frac{4A}{a^2\pi^2\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)}\left[1-e^{-\frac{a^2\pi^2}{4}\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)t}\right]\cdot$$
$$\cdot\sin_\alpha\frac{3\pi x}{2p}\cos_\alpha\frac{\pi y}{2s}.$$

2) Для МРА имеем формулу приближенного решения задачи (4):

$$\int_0^t\frac{\partial u(x,y,\xi)}{\partial\xi}d\xi=\int_0^t\left[A\sin_\alpha\frac{3\pi x}{2p}\cos_\alpha\frac{\pi y}{2s}+\right.$$
$$\left.+a^2\left(\frac{\partial^{2\alpha}u(x,y,\xi)}{\partial x^{2\alpha}}+\frac{\partial^{2\alpha}u(x,y,\xi)}{\partial y^{2\alpha}}\right)\right]d\xi.$$

$$u(x,y,t)=B\sin_\alpha \frac{\pi x}{2p}\cos_\alpha \frac{3\pi y}{2s}+$$

$$+At\sin_\alpha \frac{3\pi x}{2p}\cos_\alpha \frac{\pi y}{2s}+$$

$$+\int_0^t a^2\left(\frac{\partial^{2\alpha}u(x,y,\xi)}{\partial x^{2\alpha}}+\frac{\partial^{2\alpha}u(x,y,\xi)}{\partial y^{2\alpha}}\right)d\xi.$$

По идее МРА:

$$u(x,y,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y,t)\ \Rightarrow$$

$$u_0(x,y,t)+u_1(x,y,t)+...=B\sin_\alpha \frac{\pi x}{2p}\cos_\alpha \frac{3\pi y}{2s}+$$

$$+At\sin_\alpha \frac{3\pi x}{2p}\cos_\alpha \frac{\pi y}{2s}+$$

$$+\int_0^t a^2\left(\frac{\partial^{2\alpha}[u_0(x,y,\xi)+u_1(x,y,\xi)+...]}{\partial x^{2\alpha}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^{2\alpha}[u_0(x,y,\xi)+u_1(x,y,\xi)+...]}{\partial y^{2\alpha}}\right)d\xi;$$

$$u_0(x,y,t)=B\sin_\alpha \frac{\pi x}{2p}\cos_\alpha \frac{3\pi y}{2s}+$$

$$+At\sin_\alpha \frac{3\pi x}{2p}\cos_\alpha \frac{\pi y}{2s};$$

$$u_1(x,y,t)=-\frac{Ba^2\pi^2 t}{4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{9}{s^2}\right)\sin_\alpha \frac{\pi x}{2p}\cdot$$

$$\cdot\cos_\alpha \frac{3\pi y}{2s}-\frac{Aa^2\pi^2t^2}{8}\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)\sin_\alpha \frac{3\pi x}{2p}\cos_\alpha \frac{\pi y}{2s};$$

$$u_2(x,y,t)=\frac{Ba^4\pi^4t^2}{32}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{9}{s^2}\right)^2\sin_\alpha \frac{\pi x}{2p}\cdot$$

$$\cdot\cos_\alpha \frac{3\pi y}{2s}+\frac{Aa^4\pi^4t^3}{96}\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)^2\sin_\alpha \frac{3\pi x}{2p}\cos_\alpha \frac{\pi y}{2s}$$ и

т.д. Решение задачи:

$$u(x,y,t)=u_0(x,y,t)+u_1(x,y,t)+...=$$

$$=Be^{\frac{-a^2\pi^2}{4}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{9}{s^2}\right)t}\sin_\alpha \frac{\pi x}{2p}\cos_\alpha \frac{3\pi y}{2s}+$$

$$+\frac{4A}{a^2\pi^2\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)}\cdot\left[1-e^{\frac{-a^2\pi^2}{4}\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)t}\right].$$

$$\cdot\sin_\alpha \frac{3\pi x}{2p}\cos_\alpha \frac{\pi y}{2s}.$$

Пример 3.

Требуется точно решать следующую смешанную задачу для неоднородного уравнения диффузии дробного порядка МРП, МВИ и МРА [15]:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,y,z,t)}{\partial t^\alpha}=\frac{\partial^{2\alpha}u(x,y,z,t)}{\partial x^{2\alpha}}+$$

$$+\frac{\partial^{2\alpha}u(x,y,z,t)}{\partial y^{2\alpha}}+\frac{\partial^{2\alpha}u(x,y,z,t)}{\partial z^{2\alpha}}-$$

$$-u(x,y,z,t),\ 0<\alpha<1,\ \ 0<x,y,z<\pi,\ \ t>0,$$

$$u(0,y,z,t)=u(\pi,y,z,t)=0,$$

$$u(x,0,z,t)=u(x,\pi,z,t)=0,$$

$$u(x,y,0,t)=u(x,y,\pi,t)=0,$$

$$u(x,y,z,0)=\sin_\alpha x\sin_\alpha y\sin_\alpha z. \qquad (5)$$

1) По идее МРП имеем:

$$u(x,y,z,t)=X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)\cdot T(t).$$

Подставляя это выражение к уравнению (5) имеем одно уравнение вида

$$T^{(\alpha)}XYZ=TX^{(2\alpha)}YZ+TXY^{(2\alpha)}Z+TXYZ^{(2\alpha)}-TXYZ$$

$$\Rightarrow\frac{T^{(\alpha)}}{T}+1=\frac{X^{(2\alpha)}}{X}+\frac{Y^{(2\alpha)}}{Y}+\frac{Z^{(2\alpha)}}{Z}=$$

$$=-\lambda^2-\mu^2-\upsilon^2=-\eta^2=const.$$

$$T^{(\alpha)}+\left(1+\eta^2\right)T=0$$

и три спектральные задачи

$$X^{(2\alpha)}+\lambda^2X=0,\ \ X(0)=X(\pi)=0;$$

$$Y^{(2\alpha)}+\mu^2Y=0,\ \ Y(0)=Y(\pi)=0;$$

$$Z^{(2\alpha)}+\upsilon^2Z=0, Z(0)=Z(\pi)=0.$$

Получим следующие результаты:

$X(x)=a_1\cos_\alpha \lambda x+b_1\sin_\alpha \lambda x$,

$X(0)=0$ и $X(\pi)=0\ \Rightarrow\ X_n(x)=\sin_\alpha(nx),\ n\in N;$

$Y(y)=a_2\cos_\alpha \mu y+b_2\sin_\alpha \mu y$,

$Y(0)=0$ и $Y(\pi)=0\ \Rightarrow\ Y_m(y)=\sin_\alpha(my),\ m\in N;$

$Z(z)=a_3\cos_\alpha \upsilon y+b_3\sin_\alpha \upsilon y$, $Z(0)=Z(\pi)=0\ \Rightarrow$

$Z_p(z)=\sin_\alpha(pz),\ p\in N;$

$$T_{nmp}(t)=C_{nmp}E_\alpha\left[-\left(1+n^2+m^2+p^2\right)t^\alpha\right].$$

Общее решение задачи:

$$u(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}C_{nmp}\cdot$$

$$\cdot E_\alpha\left[-\left(1+n^2+m^2+p^2\right)t^\alpha\right]\cdot$$

$$\cdot\sin_\alpha(nx)\sin_\alpha(my)\sin_\alpha(pz).$$

Из условия $u(x,y,z,0)=\sin_\alpha x\sin_\alpha y\sin_\alpha z$ имеем

$$u(x,y,z,0)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}C_{nmp}E_\alpha\left[-\left(1+n^2+m^2+p^2\right)t^\alpha\right]\cdot$$

$$\cdot\sin_\alpha(nx)\sin_\alpha(my)\sin_\alpha(pz)\ \ \Rightarrow$$

$$C_{111}=1,\ C_{mnp}=0\ \ m\neq 1,\ n\neq 1,\ p\neq 1.$$

Решение задачи:

$$u(x,y,z,t)=E_\alpha\left(-4t^\alpha\right)\sin_\alpha x\sin_\alpha y\sin_\alpha z.$$

2) По идее МВИ имеем формулу приближенного решения задачи (5):

$$u_{n+1}(x,y,z,t)=u_n(x,y,z,t)+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\cdot$$
$$\cdot\int_0^t \lambda(\xi)\left[\frac{\partial^\alpha u_n(x,y,z,\xi)}{\partial\xi^\alpha}-\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_n(x,y,z,\xi)}{\partial x^{2\alpha}}-\right.$$
$$-\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_n(x,y,z,\xi)}{\partial y^{2\alpha}}-\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_n(x,y,z,\xi)}{\partial z^{2\alpha}}-$$
$$\left.-\tilde{u}_n(x,y,z,\xi)\right](d\xi)^\alpha.$$

Здесь $\lambda(\xi)$ - множитель Лагранжа, $\lambda(\xi)=-1$.

$$u_{n+1}(x,y,z,t)=u_n(x,y,z,t)-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\cdot$$
$$\cdot\int_0^t\left[\frac{\partial^\alpha u_n(x,y,z,\xi)}{\partial\xi^\alpha}-\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_n(x,y,z,\xi)}{\partial x^{2\alpha}}-\right.$$
$$-\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_n(x,y,z,\xi)}{\partial y^{2\alpha}}-\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_n(x,y,z,\xi)}{\partial z^{2\alpha}}-$$
$$\left.-\tilde{u}_n(x,y,z,\xi)\right](d\xi)^\alpha.$$

Применяя МВИ, получим следующие результаты:

$$u_0(x,y,z,t)=u(x,y,z,0)=\sin_\alpha x\sin_\alpha y\sin_\alpha z;$$
$$u_1(x,y,z,t)=\left[1-\frac{4t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right]\sin_\alpha x\sin_\alpha y\sin_\alpha z;$$
$$u_2(x,y,z,t)=\left[1-\frac{4t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{16t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right]\cdot$$
$$\cdot\sin_\alpha x\sin_\alpha y\sin_\alpha z;\ \ldots;$$

$$u_n(x,y,z,t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-4t^\alpha)^k}{\Gamma(1+k\alpha)}\sin_\alpha x\sin_\alpha y\sin_\alpha z$$

и т.д. Решение задачи:

$$u(x,y,z,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,y,z,t)=$$
$$=E_\alpha\left(-4t^\alpha\right)\sin_\alpha x\sin_\alpha y\sin_\alpha z.$$

2) Для МРА имеем формулу приближенного решения задачи (5):

$$\mathrm{I}_{0t}^\alpha\left[\frac{\partial^\alpha u(x,y,z,\xi)}{\partial\xi^\alpha}\right]=\mathrm{I}_{0t}^\alpha\left[\frac{\partial^{2\alpha}u(x,y,z,\xi)}{\partial x^{2\alpha}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^{2\alpha}u(x,y,z,\xi)}{\partial y^{2\alpha}}+\frac{\partial^{2\alpha}u(x,y,z,\xi)}{\partial z^{2\alpha}}-u(x,y,z,\xi)\right];$$

$$u(x,y,z,t)=\sin_\alpha x\sin_\alpha y\sin_\alpha z+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\cdot$$
$$\cdot\int_0^t\left[\frac{\partial^{2\alpha}u(x,y,z,\xi)}{\partial x^{2\alpha}}+\frac{\partial^{2\alpha}u(x,y,z,\xi)}{\partial y^{2\alpha}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^{2\alpha}u(x,y,z,\xi)}{\partial z^{2\alpha}}-u(x,y,z,\xi)\right](d\xi)^\alpha.$$

По идее МРА:

$$u(x,y,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y,z,t)\Rightarrow$$
$$u_0(x,y,z,t)=\sin_\alpha x\sin_\alpha y\sin_\alpha z;$$
$$u_1(x,y,z,t)=-\frac{4t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sin_\alpha x\sin_\alpha y\sin_\alpha z;$$
$$u_2(x,y,z,t)=\frac{16t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\sin_\alpha x\sin_\alpha y\sin_\alpha z$$

и т.д. Решение задачи:

$$u(x,y,z,t)=u_0(x,y,z,t)+u_1(x,y,z,t)+\ldots=$$
$$=E_\alpha\left(-4t^\alpha\right)\sin_\alpha x\sin_\alpha y\sin_\alpha z.$$

Если α=1, то вместо уравнение (5) получим уравнение теплопроводности и ее точное решение имеет вид $u(x,t)=e^{-4t}\sin x\sin y\sin z$.

Выводы.

VIM и ADM - мощные и эффективные методы в нахождении точных и приближенных решений для одномерных и многомерных дифференциальных уравнений в частных производных для случаев дробного порядка по пространству, по времени и их смешенного варианта. Законность и эффективность этих методов показывают, что методика решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка дает очень быструю достижимость точных решений. Результаты данной работы показывают, что эти методы очень сильные и эффективные, помогают построить точное решение нелинейных дифференциальных уравнений, и эти эффективные методы могут быть использованы в дальнейших работах, чтобы получить точное решение многих других нелинейных уравнений дробного порядка в математической физике [6, 7, 13, 15, 19, 23].

References:

1. Abdirashidov, A., Kadirov, N., Ortikov, B., & Abdurashidov, A. (2018). Exact solution of fractional diffusion equations using the variational iteration method and Adomian decomposition method. *International Scientific Journal «Theoretical & Applied Science», №5,* 101-107.
2. Abdou, M.A., & Soliman, A.A. (2005). New applications of variational iteration method. *Phys. D, 211 (1-2),* 1-8.
3. Abdurashidov, A.A. (2018, Feb.). Tochnoye resheniye nekotorix nelineynix uravneniy Gardnera uproshyennim metodom ukorochennix razlojeniy. *Mejdunarodniy setevoy nauchno-prakticheskiy jurnal «Nauka sredi nas», Vipusk: 6, fevral 2018.*
4. Abdurashidov, A.A., Ortiqov, B.B., Qadirov, N.X., & Abdirashidov, A. (2018). Exact solution of nonlinear equations Burgers-Huxley, Korteweg-de Vries-Burgers and Klein-Gordon using the modified simple equation method. *International Scientific Journal «Theoretical & Applied Science», №3*, 101-107.
5. Bekir, A., Akbulut, A., & Kaplan, M. (2015). Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations by Using Modified Simple Equation Method. *International Journal of Nonlinear Science, Vol.19, No.3*, 159-164
6. Bisadze, A.V., & Kalinichenko, D.F. (1985). *Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. Ucheb. posobiye dlya mexaniko-matemat. i fiz. spes. vuzov.* - 2-ye izd., dop., Moscow, Nauka, pp. 1-310.
7. He, J.H. (2014). A Tutorial Re view on Fractal Spacetime and Fractional Calculus, *International Journal of Theoretical Physics, 53, 2014, 11*, 3698-3718.
8. He, J.H. (2009). An elementary introduction to the homotopy perturbation method. *Computers and Mathematics with Applications. 57,* 410-412.
9. He, J.H. (1999). Homotopy perturbation technique. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 178,* 257-262.
10. He, J.H. (2007). Variational iteration method – some recent results and new interpretations. *Journal of Computational and Applied Mathematics 207(1),* 3–17.
11. He, J.H., Wu, X.H. (2007). Variational iteration method: New development and applications. *Computers and Mathematics with Applications, 54 (7-8)*, 881-894.
12. He, J.H., & Wu, X.H. (2006). Exp-function method for nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, *30,* 700-708.
13. Hu, Y., & He, J.H. (2016). On Fractal Space-Time and Fractional Calculus. *Thermal Science, Vol. 20, No. 3,* 773-777
14. Jawad, A.J.M., Petkovic, M.D., & Biswas, A. (2010). Modified simple equation method for nonlinear evolution equations. *Appl. Math. Comput. 217,* 869-877.
15. Kilbas, A.A. (2009). Teoriya i prilojeniya differensialnix uravneniy drobnogo poryadka. *Samara: Izd-vo Samarskogo GU*, pp. 1-121.
16. Kudryashov, N.A. (2010). *Metodi nelineynoy matematicheskoy fiziki*. Uchebnoye posobiye, 2-ye izd.- Dolgoprudniy: Intellekt, pp. 1-368.
17. Mirzazadeh, M. (2014). Modified Simple Equation Method and its Applications to Nonlinear Partial Differential Equations. *Inform. Sci. Lett. No. 1,* 1-9.
18. Salohiddinov, M. (2002). *Matematik fizika tenglamalari*. Toshkent, O'zbekiston, pp.1-448.
19. Samko, S.G., Kilbas, A.A., & Marichev, O.I. (1987). *Integrali i proizvodniye drobnogo poryadka i nekotorie ix prilojeniya.* Minsk, Nauka i texnika, pp.1-688.
20. Wazwaz, A.M. (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp.1-761.
21. Wazwaz, A.M. (2004). The tanh method for traveling wave solutions of nonlinear equations. *Appl. Math. Comput., 154,* 714-723.
22. Wazwaz, A.M. (2004). A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations. *Mathematical and Computer Modelling, 40,* 499–508.
23. Wu, G., & Lee, E.W.M. (2010). Fractional variational iteration method and its application. *Physics Letters A 374*, 2506-2509.
24. Zayed, E.M.E., & Ibrahim, S.A.H. (2012). Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics Using the Modified Simple Equation Method. *Chin. Phys. Lett. Vol. 29, No. 6,* 060201.