Impact Factor:

ISRA (India) = **1.344**	**SIS** (USA) = **0.912**	**ICV** (Poland) = **6.630**
ISI (Dubai, UAE) = **0.829**	**РИНЦ** (Russia) = **0.207**	**PIF** (India) = **1.940**
GIF (Australia) = **0.564**	**ESJI** (KZ) = **4.102**	**IBI** (India) = **4.260**
JIF = **1.500**	**SJIF** (Morocco) = **2.031**	

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2018 **Issue:** 03 **Volume:** 59

Published: 14.03.2018 **http://T-Science.org**

SECTION 1. Theoretical research in mathematics

Akmaljon Ablakulovich Abdurashidov
Assistant to department of theoretical and applied mechanics,
Samarkand State University, Uzbekistan,
abdira@mail.ru

Bekzod Baxtiyor ogli Ortiqov
Student of Mechanical and Mathematical Faculty, Samarkand State University, Uzbekistan

Nurshod Xolmuhammad ogli Qadirov
Student of Mechanical and Mathematical Faculty, Samarkand State University, Uzbekistan

Ablakul Abdirashidov
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent to department of theoretical and applied mechanics,
Samarkand State University, Uzbekistan

EXACT SOLUTION OF SOME NONLINEAR EVOLUTIONARY EQUATIONS USING THE MODIFIED SIMPLE EQUATION METHOD

Abstract: *In this paper, modified simple equation method, sine-cosine method and tanh-coth method has been applied to obtain generalized solutions of Nakoryakov-Pokusayev-Shreyber and Klein-Gordon equations. The new exact solutions of these equations have been obtained. It has been shown that the proposed methods provide a very effective, and powerful mathematical tool for solving nonlinear partial differential equations.*

Key words: *equation Nakoryakov-Pokusayev-Shreyber, equation Klein-Gordon, modified simple equation method, sine-cosine method, tanh-coth method, exact solutions.*

Language: *Russian*

Citation: Abdurashidov AA, Ortiqov BB, Qadirov NX, Abdirashidov A (2018) EXACT SOLUTION OF SOME NONLINEAR EVOLUTIONARY EQUATIONS USING THE MODIFIED SIMPLE EQUATION METHOD. ISJ Theoretical & Applied Science, 03 (59): 101-107.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-03-59-14 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.03.59.14

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ УПРОЩЕННЫМ МЕТОДОМ УКОРОЧЕННЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Аннотация: *Упрощенный метод укороченных разложений, метод синус-косинус функций и метод tanh-coth функций применены для нахождения точного решения нелинейных уравнений Накорякова-Покусаева-Шрейбера и Клейна-Гордона. Получены новые точные решения этих уравнений. Показано, что эти методы являются эффективные и более мощные математические инструменты для решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.*

Ключевые слова: *уравнения Накорякова-Покусаева-Шрейбера, уравнения Клейна-Гордона, упрощенный метод укороченных разложений, метод синус-косинус функций, метод tanh-coth функций, точное решение.*

Введение.

Математическое моделирование многих реальных явлений приводится к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных. Особенно эволюционные уравнения появляются в широком диапазоне научного исследования в различных областях, таких как плазменная физика, высокая энергетика, ядерная физика, оптоволокно, твердая физика, гидроаэромеханика, биомеханика, газовая динамика, теории упругости, химические реакции, геохимия, биохимия, метеорология, и т.д. Во многих задачах очень важно сначала анализировать стационарное решение краевой задачи и сделать некоторые физические выводы смотря по результатам расчетов, которые описывают поведение уединенных волн в исследуемой области. До настоящего времени разработаны многие уникальные методы, чтобы исследовать почти все виды эволюционные уравнения и получить их точное решение. Например, предложены много сильных методов для решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, таких как гомотопический метод малого параметра [3; 9; 10; 17], метод exp-функции [5; 8; 14; 15], метод tanh-coth функций [16; 17; 21], метод синус-косинус функций [17; 18], метод вариационных итераций [1; 2; 6; 7; 17], метод разложения Адомина [17], упрощенный метод укороченных разложений [4; 11-13; 19; 21; 23] и другие, а также их различные модификации. Эти методы получили популярность в широком диапазоне научных исследований из-за их прямой простой процедуры вычисления.

Цель данной статьи состоит в том, чтобы показать эффективности упрощенного метода укороченных разложений, метода синус-косинус функций и метода tanh-coth функций, возможности легко, быстро и точно решать большой класс нелинейных задач. Ниже кратко изложены основной суть этих методов, и они применены для решения конкретных тестовых задач для демонстрации быстроты и точности данных методов.

Постановка задачи, алгоритмы упрощенного метода укороченных разложений, метода синус-косинус функций и метода tanh-coth функций.

Требуется решить следующую нелинейное уравнение, заданное в неявной форме

$$F(u,u_t,u_x,u_{tt},u_{xx},\dots)=0\,, \qquad (1)$$

где $u=u(x,t)$ - неизвестная функция, а F является неявной функцией зависящая от $u(x,t)$ и его различные частные производные; $u_t=\partial u/\partial t$; $u_x=\partial u/\partial x$ и т.д.

1) Основные этапы *упрощенного метода укороченных разложений*:

Шаг 1. Используя преобразование

$$u(x,t)=u(\xi),\qquad \xi=x-ct\,, \qquad (2)$$

где c – постоянный. Мы можем переписать уравнение (1) как следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ):

$$P(u,u',u'',u''',\dots)=0\,, \qquad (3)$$

где верхние индексы обозначают производные относительно ξ; P - неявная функция u и его полных производных относительно ξ. Затем интегрируем ОДУ (3) столько раз, сколько это возможно, устанавливая постоянную интегрирования равной нулю.

Шаг 2. Предположим, что формальное решение уравнения (2) может быть выражено следующим образом

$$u(\xi)=\sum_{k=0}^{N}a_k\left[\frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)}\right]^k\,, \qquad (4)$$

где a_k (k = 0, 1, 2, …, N) - произвольные постоянные, которые будут определены таким образом, который $a_N\neq 0$; $\psi(\xi)$ - неизвестная функция, которая будет определена позже.

Шаг 3. Положительное целое число N может быть определено, считая гомогенный баланс между самым высоким порядком производной и с самым высоком порядком нелинейности, появляющимся в уравнение (3).

Шаг 4. Вычисление всех необходимых производных $u',u'',u''',\dots$, входящие в уравнение (3) на основе (4) и подстановка их на место. Приравнивание все коэффициенты $\psi^{-j}(\xi)$ к нулю, где $j\geq 0$. Эта операция приводит к системе который может быть решен, чтобы найти a_k (k = 0, 1, 2, …, N) и $\psi(\xi)$. Замена значений a_k и $\psi(\xi)$ в (4) заканчивает определение решения уравнение (1).

2) основные этапы метода *синус-косинус функций*:

Шаг 1. Повторяется.

Шаг 2. Следуя выводам работ [17; 18], решения (3) могут быть установлены в виде

$$u(\xi)=\lambda\sin^{\beta}(\mu\xi)\quad\text{или}\quad u(\xi)=\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi), \qquad (5)$$

где λ, μ, β - определяемые параметры; $|\xi|\leq\dfrac{\pi}{2\mu}$.

Шаг 3. Как следствие, производные (5) становятся

$$u_\xi=\lambda\beta\mu\sin^{\beta-1}(\mu\xi)\cos(\mu\xi),$$
$$u_{\xi\xi}=\lambda\beta(\beta-1)\mu^2\sin^{\beta-2}(\mu\xi)-\lambda\beta^2\mu^2\sin^{\beta}(\mu\xi)$$

или

$$u_\xi=-\lambda\beta\mu\cos^{\beta-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi), \qquad (6)$$
$$u_{\xi\xi}=-\lambda\beta^2\mu^2\cos^{\beta}(\mu\xi)+\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi)$$

и так далее.

Шаг 4. Подставим соотношений (6) в приведенного уравнения (3) и будем решать полученную систему алгебраических уравнений с помощью компьютеризированных символических пакетов. Далее мы собираем все члены с функциями $\sin^{\beta}(\mu\xi)$ для балансирования синусов или $\cos^{\beta}(\mu\xi)$ для балансирования косинусов, и приравниваем к нулю их коэффициентов, чтобы получить систему алгебраических уравнений с неизвестными λ, μ, β. Далее решим последующую систему, чтобы получить все возможные значения этих параметров.

3) основные этапы метода *tanh-coth функций*:

Шаг 1. Повторяется 1-шаг 1-го алгоритма.

Шаг 2. Следуя выводам работ [16; 17; 21], решения (3) могут быть установлены в виде

$$u(\xi)=\sum_{k=0}^{N} a_k y^k+\sum_{k=1}^{N} b_k y^{-k}, \qquad (7)$$

где $y=y(\xi)=\tanh(\mu\xi)$ или $y=y(\xi)=\coth(\mu\xi)$; a_k (k = 0, 1, 2, …, N) и b_k (k = 1, 2, …, N) - произвольные постоянные, которые будут определены таким образом, который $a_N \neq 0$ или $b_N \neq 0$; □- определяемый параметр.

Шаг 3. Повторяется 3-шаг 1-го алгоритма.

Шаг 4. Повторяется 4-шаг 1-го алгоритма, но с учетом неизвестных коэффициентов a_k, b_k и неизвестной функции $y=y(\xi)=\tanh(\mu\xi)$ или $y=y(\xi)=\coth(\mu\xi)$.

Основным преимуществом этих методов являются то, что они может быть применены непосредственно к большинству типов дифференциальных уравнения. Другим важным преимуществом этих методов являются то, что они способны значительно сократить размер вычислительной работы.

Пример 1.

Рассмотрим уравнение Накорякова-Покусаева-Шрейбера в виде [20; 22]

$$u_{tt}-c_0^2 u_{xx}+\beta(u_{tt}-c_1^2 u_{xx})_{tt}=\alpha(u^2)_{xx}, \qquad (8)$$

где α и β – некоторые константы.

Впервые это уравнение было применена для изучения распространения и взаимодействия нелинейных волн в жидкостях с газовыми пузырьками [22]. Там константы c_0 и c_1 – скорость распространения основного и предвестника сигналов соответственно, α – коэффициент нелинейности; β – параметр дисперсии. Упрощенный метод укороченных разложений позволяет исследовать процессов распространения и взаимодействия локализованных стационарных волн возмущений в дисперсной среде, описываемой уравнением [20; 22].

Чтобы применить упрощенного метода укороченных разложений и метода синус-косинус функций к уравнению (8), надо вводит переменную ξ как $\xi=x-ct$. Тогда вместо уравнение (8) получим следующую уравнение

$$u''''+au''+b(u^2)''=0,$$

где a и b – постоянные зависящие от скорости стационарной волны [1]:

$$a=\frac{c^2-c_0^2}{\beta c^2(c^2-c_1^2)}, \qquad b=-\frac{\alpha}{\beta c^2(c^2-c_1^2)}.$$

Интегрируя этого уравнения в два раза и приравнивая к нулю постоянные интегрирования, получим

$$u''+au+bu^2=0. \qquad (9)$$

1) *Упрощенный метод укороченных разложений*. Предположим, что решение уравнение ОДУ (9) может быть выражено полиномом по $\psi'(\xi)/\psi(\xi)$ как показано в (4). Условие балансирование u^2 и u'' в уравнении (9) дает: N + 2 = 2N, т.е. N = 2. Таким образом, мы можем написать (4) как следующая простая форма

$$u(\xi)=a_0+a_1\frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)}+a_2\left[\frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)}\right]^2, \qquad (10)$$

где a_0, a_1 и a_2 - константы, которые будут определены таким образом, чтобы выполнялось условие a_2 □ 0. Легко получим следующие равенства:

$$u^2=a_0^2+2a_0a_1\frac{\psi'}{\psi}+$$
$$+\left(a_1^2+2a_0a_2\right)\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2+2a_1a_2\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^3+a_2^2\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^4;$$
$$u''=2a_2\left[\frac{\psi''}{\psi}-\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2\right]^2+$$
$$+\left(a_1+2a_2\frac{\psi'}{\psi}\right)\left[\frac{\psi'''}{\psi}-3\frac{\psi'\psi''}{\psi^2}+2\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^3\right]. \qquad (11)$$

Эти выражения (10) и (11) подставляем в уравнение (9) и приравниваем к нулю коэффициентов ψ^0, ψ^{-1}, ψ^{-2}, ψ^{-3}, ψ^{-4}. Тогда имеем следующую систему уравнений относительно неизвестных констант a_0. a_1 и a_2:

$$\psi^0:\ aa_0+ba_0^2=0 \ □\ a_0(a+ba_0)=0; \qquad (12)$$

$$\psi^{-1}:\ (aa_1+2ba_0a_1)\psi'+a_1\psi'''=0 \ □$$
$$(a+2ba_0)\psi'+\psi'''=0; \qquad (13)$$

$$\psi^{-2}:\ (aa_2+ba_1^2+2ba_0a_2)(\psi')^2+$$
$$+2a_2(\psi'')^2-3a_1\psi'\psi''+2a_2\psi'\psi'''=0; \qquad (14)$$

$$\psi^{-3}:\ 2(ba_1a_2+a_1)(\psi')^3-10a_2(\psi')^2\psi''=0 \ □$$
$$(ba_1a_2+a_1)\psi'-5a_2\psi''=0; \qquad (15)$$

$$\psi^{-4}:\ (ba_2^2+6a_2)(\psi')^4=0 \ □\ ba_2+6=0 \qquad (16)$$

Из уравнений (12) и (16) имеем:

$$a_0=0 \text{ или } a_0=-\frac{a}{b};\quad a_2=-\frac{6}{b}\ (a_2\neq 0).$$

Рассмотрим частные случаи:

Случай 1. $a_0=-\dfrac{a}{b}$ и $a_2=-\dfrac{6}{b}$, тогда из уравнений (13) и (15) получим

$$\frac{\psi'''}{\psi''}=\delta \Rightarrow \psi''=c_2e^{\delta\xi};$$

$$\psi'=c_2me^{\delta\xi} \Rightarrow \psi(\xi)=c_1+\frac{c_2m}{\delta}e^{\delta\xi},$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования;

$$m=\frac{5a_2}{a_1+ba_1a_2};\ \delta=-m(a+2ba_0).$$

Из уравнения (14) получим уравнение относительно неизвестного a_1:

$$ba_1^2-\frac{3}{m}a_1+\frac{2}{m^2}a_2-aa_2-2ba_0a_2=0.$$

Отсюда $a_1=\frac{6}{b}\sqrt{a}$; $m=\frac{1}{\sqrt{a}}$; $\delta=\sqrt{a}$.

Тогда точное решение уравнение (9) имеет форму

$$u(\xi)=a_0+a_1\frac{c_2m\delta e^{\delta\xi}}{c_1\delta+c_2me^{\delta\xi}}+a_2\left(\frac{c_2m\delta e^{\delta\xi}}{c_1\delta+c_2me^{\delta\xi}}\right)^2 \quad (17)$$

Если $c_1=1,\ c_2m=\delta$, то

$$u(\xi)=a_0+\frac{1}{2}a_1\delta\left(1+\tanh\frac{\delta\xi}{2}\right)+ \quad (18)$$

$$+\frac{1}{4}a_2\delta^2\left(1+\tanh\frac{\delta\xi}{2}\right)^2=-\frac{a}{b}\left(1-\frac{3}{2}\mathrm{sech}^2\frac{\sqrt{a}\xi}{2}\right).$$

Если $c_1=-1,\ c_2m=\delta$, то

$$u(\xi)=a_0+\frac{1}{2}a_1\delta\left(1+\coth\frac{\delta\xi}{2}\right)+ \quad (18')$$

$$+\frac{1}{4}a_2\delta^2\left(1+\coth\frac{\delta\xi}{2}\right)^2=-\frac{a}{b}\left(1+\frac{3}{2}\mathrm{csch}^2\frac{\sqrt{a}\xi}{2}\right).$$

Случай 2. $a_0=0$ и $(a_2\neq 0)$, тогда получим $a_1=\frac{6}{b}\sqrt{-a}$; $m=\frac{1}{\sqrt{-a}}$; $\delta=\sqrt{-a}$.

Если $c_1=1,\ c_2m=\delta$, то

$$u(\xi)=\frac{1}{2}a_1\delta\left(1+\tanh\frac{\delta\xi}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}a_2\delta^2\left(1+\tanh\frac{\delta\xi}{2}\right)^2=-\frac{3a}{2b}\left(1-\tanh^2\frac{\sqrt{-a}\xi}{2}\right).$$

Если $c_1=-1,\ c_2m=\delta$, то

$$u(\xi)=\frac{1}{2}a_1\delta\left(1+\coth\frac{\delta\xi}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}a_2\delta^2\left(1+\coth\frac{\delta\xi}{2}\right)^2=-\frac{3a}{2b}\left(1-\coth^2\frac{\sqrt{-a}\xi}{2}\right).$$

Для определенных значений параметров в обобщенном точные решения (17) и (18), получаем уединенную волновую решению. Различные значения произвольные постоянные c_1 и c_2, приводят к разнообразным уединенным формам волны. Свободные параметры могут подразумевать некоторые физические значащие результаты в гидроаэромеханике, газовой динамике и т.д.

2) *Метод синус-косинус функций.*

Подставив (5) и (6) в (9) получаем

$$-\lambda\beta^2\mu^2\cos^{\beta}(\mu\xi)+\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi)+$$
$$+a\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi)+b\lambda^2\cos^{2\beta}(\mu\xi)=0.$$

Приравнивая показатели степени и коэффициенты каждой пары функций косинуса в этом уравнение, мы находим следующую алгебраическую систему:

$$2\beta=\beta-2,\ \cos^{-2}(\mu\xi):\ a\lambda-\lambda\beta^2\mu^2=0,$$

$$\cos^{-4}(\mu\xi):\ b\lambda^2+\beta(\beta-1)\mu^2\lambda=0.$$

Решение этой системы приводит к $\beta=-2$, $\mu=\pm\frac{\sqrt{a}}{2}$, $\lambda=-\frac{3a}{2b}$. Тогда подставив это в уравнение (6), получим точное решение уравнения (9) аналогично (18):

$$u(\xi)=-\frac{3a}{2b}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right).$$

При замене $u(\xi)=\lambda\sin^{\beta}(\mu\xi)$ получим точное решение уравнения (9) аналогично (18′):

$$u(\xi)=-\frac{3a}{2b}\mathrm{csch}^2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right).$$

Таким образом, оба методы дают точное решение уравнения (8).

Пример 2.

Рассмотрим нелинейное уравнение Клейна-Гордона в виде [17; 21]

$$u_{tt}-c_0^2u_{xx}+u-\frac{1}{6}u^3=0, \quad (19)$$

где u - смещение; x - лагранжевая координата; t - время; c_0 - скорость волны; γ - константа.

Чтобы применить упрощенного метода укороченных разложений и метода tanh-функции к уравнению (19), надо вводит переменную ξ как $\xi=x-ct$, где c - волновое число. Тогда вместо уравнение (19) получим следующую уравнение

$$u''+au+bu^3=0, \quad (20)$$

где $a=1/(c^2-c_0^2);\ b=-a/6$.

1) *Упрощенный метод укороченных разложений.*

Предположим, что решение уравнение ОДУ (20) может быть выражено полиномом по $\psi'(\xi)/\psi(\xi)$ как показано в (4). Условие балансирование между u^3 и u'' в уравнении (20) дает: N + 2 = 3N, т.е. N = 1. Таким образом, мы можем написать (4) как следующая простая форма

$$u(\xi)=a_0+a_1\frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)}, \quad (21)$$

где a_0 и a_1 - константы, которые будут определены таким образом, чтобы выполнялось условие a_1 $\square$ 0. Легко получим следующие равенства:

$$u^3 = a_0^3 + 3a_0^2 a_1 \frac{\psi'}{\psi} + 3a_0 a_1^2 \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 + a_1^3 \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^3;$$

$$u'' = a_1\left[\frac{\psi'''}{\psi} - 3\frac{\psi'\psi''}{\psi^2} + 2\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^3\right]. \qquad (22)$$

Эти выражения (21) и (22) подставляем в уравнение (20) и приравниваем к нулю коэффициентов ψ^0, ψ^{-1}, ψ^{-2}, ψ^{-3}. Тогда имеем следующую систему уравнений относительно неизвестных констант a_0 и a_1:

$$\psi^0:\ a_0 - \frac{1}{6}a_0^3 = 0 \ \square\ a_0\left(1 - \frac{1}{6}a_0^2\right) = 0; \qquad (23)$$

$$\psi^{-1}:\ \left(a_1 - \frac{1}{2}a_0^2 a_1\right)\psi' + \frac{a_1}{a}\psi''' = 0 \ \square$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}a_0^2\right)\psi' + \frac{1}{a}\psi''' = 0; \qquad (24)$$

$$\psi^{-2}:\ -\frac{1}{2}a_0 a_1^2(\psi')^2 - 3\frac{a_1}{a}\psi'\psi'' = 0 \ \square$$

$$\frac{1}{2}a_0 a_1 \psi' + \frac{3}{a}\psi'' = 0; \qquad (25)$$

$$\psi^{-3}:\ \left(2\frac{a_1}{a} - \frac{1}{6}a_1^3\right)(\psi')^3 = 0 \ \square$$

$$\frac{2}{a} - \frac{1}{6}a_1^2 = 0. \qquad (26)$$

Из уравнений (23) и (26) имеем:

$$a_0 = 0; \quad a_0 = \pm\sqrt{6}; \quad a_1 = \pm 2\sqrt{\frac{3}{a}}.$$

Рассмотрим частные случаи:

Случай 1. $a_0 = \pm\sqrt{6}$ и $a_1 = \pm 2\sqrt{\frac{3}{a}}$, тогда из уравнений (24) и (25) получим

$$\frac{\psi'''}{\psi''} = \delta \ \square\ \psi'' = c_2 e^{\delta\xi};$$

$$\psi' = c_2 m e^{\delta\xi} \ \square\ \psi(\xi) = c_1 + \frac{c_2 m}{\delta} e^{\delta\xi},$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования;

$$m = \frac{1}{b a_0 a_1}; \quad \delta = \frac{3(2 - a_0^2)}{a_0 a_1}.$$

Отсюда имеем точное решение уравнение (20)

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \frac{c_2 m \delta e^{\delta\xi}}{c_1\delta + c_2 m e^{\delta\xi}} \qquad (27)$$

или точное решение уравнение (19)

$$u(x,t) = a_0 + a_1 \frac{c_2 m \delta e^{\delta(x-ct)}}{c_1\delta + c_2 m e^{\delta(x-ct)}}. \qquad (28)$$

Если $c_1 = 1$, $c_2 m = \delta$, то

$$u(x,t) = a_0 + \frac{1}{2}a_1\delta\left(1 + \tanh\frac{\delta(x-ct)}{2}\right).$$

Если $c_1 = -1$, $c_2 m = \delta$, то

$$u(x,t) = a_0 + \frac{1}{2}a_1\delta\left(1 + \coth\frac{\delta(x-ct)}{2}\right).$$

Случай 2. $a_0 = 0$ и $a_1 \neq 0$, тогда получим

$$u(x,t) = a_1 \frac{c_2 m \delta e^{\delta(x-ct)}}{c_1\delta + c_2 m e^{\delta(x-ct)}}.$$

Если $c_1 = 1$, $c_2 m = \delta$, то

$$u(x,t) = \frac{1}{2}a_1\delta\left(1 + \tanh\frac{\delta(x-ct)}{2}\right). \qquad (29)$$

Если $c_1 = -1$, $c_2 m = \delta$, то

$$u(x,t) = \frac{1}{2}a_1\delta\left(1 + \coth\frac{\delta(x-ct)}{2}\right), \qquad (29')$$

где $\delta = \sqrt{2a}$; $a_1\delta/2 = \sqrt{-a/b}$.

2) *Метод tanh-coth функций.*

Предположим, что решение уравнение ОДУ (20) может быть выражено полиномом по $y(\xi)$ как показано в (7). Условие балансирование u^3 и u'' в уравнении (20) дает: $N + 2 = 3N$, т.е. $N = 1$. Таким образом, мы можем написать (7) как следующая простая форма

$$u(\xi) = a_0 + a_1 y(\xi) + b_1 / y(\xi) \qquad (30)$$

где a_0, a_1 и b_1 - константы, которые будут определены таким образом, чтобы выполнялось условие a_1 $\square$ 0. Легко получим следующие равенства:

$$u(\xi) = a_0 + a_1 y + b_1 / y;$$

$$u''(\xi) = 2\mu^2(y^2 - 1)(a_1 y - b_1 / y^3). \qquad (31)$$

Эти выражения (31) подставляем в уравнение (20) и приравниваем к нулю коэффициентов y^0, y^1, y^2, y^3. Тогда имеем следующую систему уравнений относительно неизвестных констант a_0, a_1 и b_1:

$$a_0 a_1 = 0; \quad 2\mu^2 + b a_1^2 = 0;$$

$$-2\mu^2 + a + 3b a_0^2 + 3b a_1 b_1 = 0;$$

$$a_0\left(a + b a_0^2 + 6b a_1 b_1\right) = 0. \qquad (32)$$

Если в (32) $a_0 = 0$; $a_1 = \sqrt{-a/b}$ $b_1 = 0$; $\mu = \sqrt{a/2}$, то получим точное решение уравнения (19) аналогично (29):

$$u(x,t) = a_1 y(x,t) = \sqrt{-a/b}\,\tanh\left(\sqrt{a/2}(x-ct)\right)$$

,

а при замене $y = y(\xi) = \coth(\mu\xi)$ получим точное решение уравнения (19) аналогично (29′):

$$u(x,t) = a_1 y(x,t) = \sqrt{-a/b}\,\coth\left(\sqrt{a/2}(x-ct)\right)$$

.

Таким образом, оба методы дают точное решение уравнения (19).

Выводы.

В данной работе получены точное решение уравнений Накорякова-Покусаева-Шрейбера и Клейна-Гордона упрощенным методом укороченных разложений, а также показан возможности применения методов синус-косинус функций и tanh-coth функций. Законность и эффективность этих методов показывают, что методика решения нелинейных дифференциальных уравнений дает очень быстрая достижимость к точным решениям. Кроме того, можно прийти к заключению, что эти методы очень сильные и эффективные, которые может построить точное решение нелинейных дифференциальных уравнений. Поэтому эти эффективные методы могут быть использоваться в дальнейших работах, чтобы получить точное решение многих других нелинейных уравнений математической физики.

References:

1. Abbasbandy S. (2007) Numerical solutions of nonlinear Klein-Gordon equation by variational iteration method. Internat. J. Numer. Meth. Engr., 70 (2007), 876-881.
2. Abdou M. A., Soliman A. A. (2005) New applications of variational iteration method. Phys. D, 211 (1-2) (2005), 1-8.
3. Aghazadeh N. and Mohammadi S. (2012) A modified homotopy perturbation method for solving linear and nonlinear equations. International Journal of Nonlinear Science. Vol. 13 (2012), No.3, pp. 308-316.
4. Bekir A., Akbulut A., Kaplan M. (2015) Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations by Using Modified Simple Equation Method // International Journal of Nonlinear Science. Vol.19 (2015) No.3, pp.159-164
5. He J. H., Wu X. H. (2006) Exp-function method for nonlinear wave equations. Chaos, Solitons and Fractals, 30 (2006), 700-708.
6. He J.H. (2007) Variational iteration method – some recent results and new interpretations, Journal of Computational and Applied Mathematics 207(1) (2007) 3–17.
7. He J.H., Wu X.H. (2007) Variational iteration method: New development and applications, Computers and Mathematics with Applications. 2007, 54 (7-8): 881-894.
8. He, Y., Li, S., Long, Y. (2012). Exact solutions of the Klein-Gordon equation by modified Exp-function method. Int. Math. Forum, 7, 175–182.
9. He. J.H. (2009) An elementary introduction to the homotopy perturbation method. Computers and Mathematics with Applications. 57 (2009), pp. 410-412.
10. He. J.H. (1999) Homotopy perturbation technique. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 178 (1999), pp. 257-262.
11. Jawad A.J.M., Petkovic M.D., Biswas A. (2010) Modified simple equation method for nonlinear evolution equations // Appl. Math. Comput. 217 (2010), pp. 869-877.
12. Kudryashov N.A. (2009) Seven common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations // Preprint submitted to Elsevier Science, 2009. - 41 p.
13. Mirzazadeh M. (2014) Modified Simple Equation Method and its Applications to Nonlinear Partial Differential Equations // Inform. Sci. Lett. No. 1 (2014), pp. 1-9.
14. Naher H., Abdullah A. F., Akbar M. A. (2011) The Exp-function method for new exact solutions of the nonlinear partial differential equations. International Journal of the Physical Sciences, vol. 6, no. 29, pp. 6706–6716, 2011.
15. Naher H., Abdullah F. A., Akbar M.A. (2012) New traveling wave solutions of the higher dimensional nonlinear partial differential equation by the exp-function method. Journal of Applied Mathematics, Article ID575387, 14 pages, 2012.
16. Wazwaz A. M. (2004) The tanh method for traveling wave solutions of nonlinear equations, Appl. Math. Comput., 154 (2004) 714-723.
17. Wazwaz A.M. (2009) Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory. Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. – 761 p.
18. Wazwaz, A. M. (2004) A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations. Mathematical and Computer Modelling, 40, 499–508.
19. Zayed E.M.E., Ibrahim S.A.H. (2012) Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics Using the Modified Simple Equation Method // Chin. Phys. Lett. Vol. 29, No. 6 (2012), 060201.
20. Bodunova Yu.P., Konoplev S.A., Potapov A.I. (2011) Rasprostraneniye i vzaimodeystviye nelineynix voln v jidkosti s puzirkami gaza //

Akusticheskiy jurnal, 2011, tom 57, №2. – p.228-233.

21. Kudryashov N.A. (2010) Metodi nelineynoy matematicheskoy fiziki: Uchebnoye posobiye. 2-ye izd.- Dolgoprudniy: Intellekt, 2010.-368 p.
22. Nakoryakov V.B. (1990) Volnovaya dinamika gazo- i parojidkostnix sred. – M.: Energoatomizdat, 1990. – 249 p.
23. Abdurashidov A.A. (2018) Tochnoye resheniye nekotorix nelineynix uravneniy Gardnera uproshyennim metodom ukorochennix razlojeniy // Mejdunarodniy setevoy nauchno-prakticheskiy jurnal «Nauka sredi nas». – Vipusk: 6, Feb. 2018.