

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	PIHII (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 4.102	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2018 Issue: 02 Volume: 58

Published: 28.02.2018 <http://T-Science.org>

Ismatulla Khujaev

Leading Researcher

Scientific and innovation center of information and communication technologies at TUIT

i_k_hujayev@mail.ru

Jamol Khujaev

Junior Researcher

Scientific and innovation center of information and communication technologies at TUIT

jamolhoja@mail.ru

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

MODIFICATION OF THE METHOD OF LINES FOR SOLVING ONE-DIMENSIONAL EQUATION OF PARABOLIC TYPE UNDER THE BOUNDARY CONDITIONS OF THE SECOND AND FIRST GENERA

Abstract: In the article an algorithm for solving a one-dimensional inhomogeneous parabolic equation is described under boundary conditions of the first kind at the beginning and of the second kind at the end of the interval. By introduction of a grid with respect to the coordinate of the functions involved in the initial and boundary conditions, a matrix equation is built with respect to the grid function. The success of the work is the formation of fundamental and diagonal matrices, with the help of which a transition to individual ordinary equations with respect to the grid functions is carried out from the matrix equation. Formulas for the direct and inverse transition from the desired and newly formed functions are presented. The obtained ordinary differential equations admit an exact and approximate method of solution.

The results are useful in solving one and many-dimensional equations of parabolic, elliptic and hyperbolic types under mixed boundary conditions of the second and first genera.

Key words: partial differential equation, method of lines, boundary conditions, approximation, algorithm, computational experiment.

Language: Russian

Citation: Khujaev I, Khujaev J (2018) MODIFICATION OF THE METHOD OF LINES FOR SOLVING ONE-DIMENSIONAL EQUATION OF PARABOLIC TYPE UNDER THE BOUNDARY CONDITIONS OF THE SECOND AND FIRST GENERA. ISJ Theoretical & Applied Science, 02 (58): 144-153.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-02-58-31> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.02.58.31>

УДК 51-7:519.63:519.614

МОДИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВТОРОГО И ПЕРВОГО РОДОВ

Аннотация: В статье описан алгоритм решения одномерного неоднородного параболического уравнения при граничных условиях первого рода в начале и второго рода в конце отрезка. Введением сетки по координате, функций, участвующих в начальном и граничных условиях, составлено матричное уравнение относительно сеточных функций. Успехом работы является формирование фундаментальной и диагональной матриц, с помощью которых из матричного уравнения осуществляется переход к отдельным обыкновенным уравнениям относительно сеточных функций. Представлены формулы прямого и обратного перехода от искомой и вновь образованной функций. Полученные обыкновенные дифференциальные уравнения допускают точного и приближенного метода решения.

Ключевые слова: Результаты полезны при решении одно- и многомерных уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов при смешанных граничных условиях второго и первого родов.

Введение

Широким применением методов математического моделирования при изучении различных форм движения обусловлены формирования различных способов решения

дифференциальных уравнений в частных производных [1-4]. Усложнения математических моделей за счет новых линейных и нелинейных факторов и обращение к многомерным задачам привели к тому, что ресурсы ПЭВМ стали



недостаточными для решения практических задач. Начали разрабатывать различные экономичные методы с привлечением расщепления, методов параллельных вычислений и других «щадящих» ресурсов ПЭВМ «ухищрения».

В рамках работы обращаемся к методу прямых, который входит в числа дифференциально-разностных методов решения уравнений математической физики [5-6]. Метод позволяет использовать положений матричного исчисления, метода прогонки и аналитического решения обыкновенных дифференциальных уравнений по отдельно взятым независимым переменным. Сущность использования положений матричного исчисления заключается в приведении взаимосвязанных систем уравнений к автономным уравнениям относительно сеточных функций. Основной задачей его является составление вспомогательных матриц, способствующих к переходу к автономным уравнениям. Такие матрицы ранее составлены для граничных условий первого и третьего родов. Ниже они построены для смешанных граничных условий второго и первого родов в начале и конце расчетного отрезка соответственно и использованы при решении неоднородного параболического уравнения.

Постановка задачи. В терминах теории теплопередачи в конце $x=0$ задана интенсивность потока тепла, приведенная к коэффициенту теплоотдачи:

$$-\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = q_0(t). \quad (1)$$

На втором конце отрезка задан закон изменения температуры:

$$T(l,t) = \mu_l(t). \quad (2)$$

Объектом исследования при такой постановке задачи могут быть однородный стержень длиной l внутренними и внешними источниками тепла или масса одинаковой толщины по x и достаточно большими размерами по двум остальным координатам. Процесс описывается неоднородным уравнением параболического типа

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x,t). \quad (3)$$

Здесь $f(x,t)$ – мощность внутренних и внешних источников тепла в сечении x , приведенная по коэффициенту температуропроводности материала. Переменная t представляет произведение реального времени на коэффициент температуропроводности и имеет размерность m^2 .

Начальное распределение температуры по массе задано:

$$T(x,0) = T_0(x). \quad (4)$$

Требуется построить алгоритм решения данной задачи с применением положений дифференциально-разностного метода.

Составление матричного уравнения.

Вводится равномерная сетка по координате x :

$$\omega_x = \left(x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, N+1; \quad h = \frac{l}{N+1} \right).$$

Вводятся сеточные функции искомой $u_i(t)$, правой части $f_i(t)$ уравнения и граничных функций $q_0(t)$ и $\mu_l(t)$ для фиксированного значения t . Наша задача, в такой постановке, состоит из составления отдельных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных сеточных функций $u_0(t), u_1(t), \dots, u_N(t)$.

Во внутренних узлах сетки расчетной области уравнение (3) аппроксимируется в виде

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + f_i. \quad (5)$$

Реализация условия (1) произведена согласно [5]:

$$\frac{du_0}{dt} = -\frac{2}{h^2}u_0 + \frac{2}{h^2}u_1 + f_0 + \frac{2}{h}q_0. \quad (6)$$

При $i=N$ реализуется граничное условие (2) задачи как

$$u_{N+1}(t) = \mu_l(t).$$

Дифференциально-разностные уравнения (5) и (6) с учетом последнего условия составят матричное уравнение вида [5,6]

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{h^2}AU + F, \quad (7)$$

где $U = (u_0, u_1, \dots, u_N)^*$,

$$F = \left(f_0 + \frac{2}{h}q_0, f_1, \dots, f_N + \frac{1}{h^2}\mu_l \right)^*$$

$$A = \|a_{p,q}\|_{N+1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{N+1} \quad (8)$$

Как видно, индексы искомых и элементов матрицы меняются от 0 до N . Верхний знак «*» означает операции транспонирования матрицы.

Формирование фундаментальной и диагональной матриц.

Необходимо в (7) произвести видоизменения, которые позволили бы выделить отдельные уравнения относительно

$u_i(t)$.

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 4.102	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

Матрицу A представим в виде произведения [5]:

$$A = V\Lambda V^{-1},$$

где V и Λ – неизвестные матрицы, а V^{-1} является обратной V матрицей.

Умножим это равенство на V^{-1} слева и, с учетом $V^{-1}V = E$, получим:

$$V^{-1}A = \Lambda V^{-1}. \quad (9)$$

Если матрица Λ диагональная, то по положениям линейной алгебры [7-9], его элементы составляют собственные значения (числа) λ_s матрицы A , а матрица $V^{-1} = \|v_{s,p}^{-}\|$

состоит из компонентов $v_{s,p}^{-}$ собственных векторов матрицы A . Отсюда следует, что нам необходимо найти собственные числа λ_s матрицы A и составить с их помощью диагональную матрицу $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N \}$.

$$\tilde{D}_{N+1} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta_s & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2\cos\theta_s & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta_s & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta_s \end{vmatrix}_{N+1}. \quad (11)$$

Вычислим значение данного определителя, разложив по первому столбцу, что приводит к уравнению

$$\cos\theta_s D_N - D_{N-1} = 0,$$

где

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta_s & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta_s & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta_s & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta_s \end{vmatrix}_n$$

согласно [5,6] $D_n = \frac{\sin(n+1)\theta_s}{\sin\theta_s}$.

Простые преобразования приводят уравнение к виду $\cos(N+1)\theta_s = 0$. Первые положительные корни уравнения при $s=0, 1, \dots, N$ определим в виде $\theta_s = \frac{2s+1}{2(N+1)}\pi$.

Раскрытие равенства (9) относительно собственного числа λ_s по элементам приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} (-2 - \lambda_s)v_{s,0}^{-} + v_{s,1}^{-} = 0, \\ 2v_{s,0}^{-} + (-2 - \lambda_s)v_{s,1}^{-} + v_{s,2}^{-} = 0, \\ v_{s,k-1}^{-} + (-2 - \lambda_s)v_{s,k}^{-} + v_{s,k+1}^{-} = 0 \text{ при } k=2..N-1, \\ v_{s,N-1}^{-} + (-2 - \lambda_s)v_{s,N}^{-} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Система (10) имеет $N+2$ неизвестных: $\lambda_s, v_{s,0}^{-}, v_{s,1}^{-}, \dots, v_{s,N}^{-}$, т.е. она не замкнута. Чтобы она имела не тривиальное решение, ее определитель должен иметь нулевое решение. Этим

$$\tilde{D}_{N+1} = 0,$$

условием и замыкается система (10).

При введении обозначения $-2 - \lambda = 2\cos\theta_s$ определитель \tilde{D}_{N+1} приобретает вид

В связи с этим формула для собственных чисел λ_s матрицы A имеет вид:

$$\lambda_s = -2 \left(1 + \cos \frac{2s+1}{2(N+1)}\pi \right). \quad (12)$$

Значения $v_{s,p}^{-}$ можно определить из системы (10) с точностью постоянного

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 4.102	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

множителя C_s , т.к. уравнения однородны относительно $V_{s,p}^-$:

$$v_{s,p}^- = c_s A_{s,p},$$

где $A_{s,p}$ – алгебраическое дополнение 1-й строки p -го столбца определителя \tilde{D}_{N+1} , подсчитанное

$$a_{k,1}A_{s,1} + a_{k,2}A_{s,2} + \dots + a_{k,N_s}A_{s,N_s} + a_{k,N_s+1}A_{s,N_s+1} = \begin{cases} \tilde{D}_{N+1} & \text{при } s = k, \\ 0 & \text{при } s \neq k. \end{cases}$$

Так как $\tilde{D}_{N+1} = 0$, то система уравнений (10) удовлетворяется данными значениями элементов собственных векторов.

Вычислим и упростим значения алгебраических дополнений без знаменателя для $s, p = 0, 1, \dots, N$:

$$A'_{s,p} = (-1)^{s+p} \begin{cases} 1 & \text{при } p = 0, \\ 2 \cos p\theta_s & \text{при } p > 0. \end{cases}$$

Из условия нормированности составляющих собственного вектора $c_s^2 \sum_{p=0}^N (A'_{s,p})^2 = 1$ находим

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{2N+1}}.$$

С учетом этого для $s = 0, 1, \dots, N$ имеем

$$v_{s,p}^- = \frac{(-1)^{s+p}}{\sqrt{2N+1}} \begin{cases} 1 & \text{при } p = 0, \\ 2 \cos p\theta_s & \text{при } 0 < p \leq N. \end{cases}$$

Верность полученных результатов доказали подстановкой полученных элементов собственного вектора и чисел в уравнения системы (10).

$$V^{-1}U = \left(\sum_{p=0}^N v_{0,p}^- u_p, \sum_{p=0}^N v_{1,p}^- u_p, \dots, \sum_{p=0}^N v_{N,p}^- u_p \right)^* = (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{N+1})^* = \bar{U}, \quad (13)$$

то уравнение приобретает вид

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \frac{1}{h^2} \Lambda \bar{U} + \bar{F}, \quad (14)$$

где

$$\bar{F} = (\bar{f}_0, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_N)^* = V^{-1}F = \left(\sum_{p=0}^N v_{0,p}^- F_p, \sum_{p=0}^N v_{1,p}^- F_p, \dots, \sum_{p=0}^N v_{N,p}^- F_p \right)^*,$$

F_p – p -й элемент вектор-столбца F .

для θ_s . А значение C_s можно найти из условия нормированности собственного вектора.

Данное суждение обоснуется теоремами высшей алгебры [7-9], что при разложении определителя по строке результат равняется нулю, если алгебраические дополнения принадлежат другой строке, и результат равняется значению определителя, если алгебраические дополнения берутся для данной строки:

Значения элементов матрицы V , обратной матрице V^{-1} , находили, используя метод Гаусса с выбором главного элемента по [9]. Результаты обращения матрицы проверяется вычислениями $V^{-1}V$ и $V\Lambda V^{-1}$, которые должны составлять матриц E и Λ соответственно.

Переход к автономным уравнениям относительно сеточных функций. Умножим обеих сторон уравнения (7) на V^{-1} слева. С учетом коммутативности операций дифференцирования и умножения матриц, получим

$$\frac{dV^{-1}U}{dt} = \frac{1}{h^2} V^{-1}AU + V^{-1}F.$$

т.к. $A = V\Lambda V^{-1}$, то

$$V^{-1}AU = V^{-1}V\Lambda V^{-1}U = (V^{-1}V)\Lambda(V^{-1}U) = \Lambda\bar{U}$$

Отсюда следует, что если ввести новый вектор-столбец

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 4.102	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

Из (14) можно выделить отдельное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно \bar{u}_i :

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = \frac{\lambda_i}{h^2} \bar{u}_i + \bar{f}_i. \quad (15)$$

Необходимые начальные условия \bar{u}_i^0 при $i = 0..N$ вычисляются как:

$$\bar{u}_i^0 = \sum_{p=0}^N v_{i,p}^- u_p^0,$$

где значения $u_p^0 = T_0(ph)$ берутся согласно начальному условию (4).

Обратный переход от \bar{u}_i^n к u_i^n , т.к. $U = V\bar{U}$, осуществляется по формуле $u_i^n = \sum_{p=0}^N v_{i,p} \bar{u}_p^n$.

Решение автономных уравнений.

Преимущество дифференциально-разностного метода заключается в том, что образованные отдельные дифференциальные уравнения (15) можно решить аналитическим путем. В частности, если функция $f(x,t)$ правой части уравнения имеет не зависящее от времени значение, для решения уравнения (15) можно использовать следующий способ.

Введением замены $w_i = \bar{u}_i + \frac{h^2}{\lambda_i} \bar{f}_i$ уравнению (15) придается вид: $\frac{dw_i}{w_i} = \frac{\lambda_i}{h^2} dt$.

Интегрирование его от t_{n-1} до t_n дает:

$$\ln w_i \Big|_{t_{n-1}}^{t_n} = \ln \frac{w_i^n}{w_i^{n-1}} = \frac{\lambda_i}{h^2} \tau_n,$$

где $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ – постоянное или переменное значение n -го шага «времени» t , значение которого выбирается согласно интервалу изменения значений функций \bar{f}_i^{n+1} , $\mu_i(t)$ и $q_0(t)$, а также их производных.

Из логарифмов в решении переходим к степенной зависимости: $w_i^n = w_i^{n-1} e^{\lambda_i \tau_n / h^2}$. Подстановка значения w_i дает возможность записать рекуррентную зависимость

$$\bar{u}_i^n = -\frac{h^2}{\lambda_i} \bar{f}_i^n + \left(\bar{u}_i^{n-1} + \frac{h^2}{\lambda_i} \bar{f}_i^{n-1} \right) e^{\lambda_i \tau_n / h^2}.$$

Если правая часть $f(x,t)$ уравнения зависит от времени, то уравнение (15) можно представить в виде:

$$d(\bar{u}_i e^{-\lambda_i t / h^2}) = \bar{f}_i e^{-\lambda_i t / h^2} dt.$$

Интегрируя данное уравнение от t_{n-1} до t_n , составим рекуррентную зависимость для искомой функции

$$\bar{u}_i^n = \bar{u}_i^{n-1} e^{-\lambda_i \tau_n / h^2} + e^{\lambda_i t_n / h^2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \bar{f}_i(t) e^{-\lambda_i t / h^2} dt.$$

Программное обеспечение задачи. По представленному материалу составлена программа для изучения динамики термического состояния однородного стержня при реализации граничных условий второго рода при $x=0$ и первого рода при $x=l$.

Программа состоит из частей описания скалярных, векторных и матричных величин, ввода исходных данных, формирования и проверки матриц V , Λ , V^{-1} , формирования начального условия для \bar{u}_i^0 , вычислений в цикле по времени и условной печати.

В цикле по n формировали граничные условия и свободные члены для u_i^{n-1} и \bar{u}_i^{n-1} , а также вычисляли значения u_0^n и \bar{u}_i^n . В части условной печати программы через заданные шаги по времени осуществляли переход к u_i^n и сохраняли значения времени и u_i^n для дальнейшей визуализации и анализа результатов.

Достоверность определенных значений элементов диагональной и фундаментальной матриц проверяли для случая $N=9$ ($h=0.1$ м). При этом элементы диагональной матрицы, соответствующие собственным значениям трехдиагональной матрицы A , составили последовательность $-3.9754, -3.782, -3.4142, -2.9080, -1.6871, -1.092, -0.5858, -0.2180$ и -0.0246 . Соответствующие этим собственным значениям элементы V^{-1} – собственных векторов матрицы A представлены построчно в следующей табл. 1. Составленная по методу Гаусса фундаментальная матрица V приведена на следующей табл. 2.

Произведения матриц $V^{-1}V$ и VV^{-1} , при отбрасывании нулей в первых восьми разрядах после десятичной запятой, составили матрицу единичную матрицу. Проверка выполнения равенства $A = V\Lambda V^{-1}$ привела к результату из $-2, 0, 1$ и 2 с нулями в первых восьми разрядах.



Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 4.102	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

Пробные расчеты проводились при $f(x, t) = 0$ для граничных условий

$q_l(t) = Q_0 = const$, $\mu_l(t) = U_0 = const$, и начального условия $T(x, 0) = \varphi(x)$.

Таблица 1

Значения элементов $v_{s,p}^-$ собственных векторов матрицы A при $N = 9$

s\p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,2294	-0,4532	0,4364	-0,4088	0,3712	-0,3244	0,2697	-0,2083	0,1418	-0,0718
1	-0,2294	0,4088	-0,2697	0,0718	0,1418	-0,3244	0,4364	-0,4532	0,3712	-0,2083
2	0,2294	-0,3244	0	0,3244	-0,4588	0,3244	0	-0,3244	0,4588	-0,3244
3	-0,2294	0,2083	0,2697	-0,4532	0,1418	0,3244	-0,4364	0,0718	0,3712	-0,4088
4	0,2294	-0,0718	-0,4364	0,2083	0,3712	-0,3244	-0,2697	0,4088	0,1418	-0,4532
5	-0,2294	-0,0718	0,4364	0,2083	-0,3712	-0,3244	0,2697	0,4088	-0,1418	-0,4532
6	0,2294	0,2083	-0,2697	-0,4532	-0,1418	0,3244	0,4364	0,0718	-0,3712	-0,4088
7	-0,2294	-0,3244	0	0,3244	0,4588	0,3244	0	-0,3244	-0,4588	-0,3244
8	0,2294	0,4088	0,2697	0,0718	-0,1418	-0,3244	-0,4364	-0,4532	-0,3712	-0,2083
9	-0,2294	-0,4532	-0,4364	-0,4088	-0,3712	-0,3244	-0,2697	-0,2083	-0,1418	-0,0718

Таблица 2

Элементы $v_{s,p}$ фундаментальной матрицы V при $N = 9$

s\p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,4359	-0,4359	0,4359	-0,4359	0,4359	-0,4359	0,4359	-0,4359	0,4359	-0,4359
1	-0,4305	0,3884	-0,3082	0,1979	-0,0682	-0,0682	0,1979	-0,3082	0,3884	-0,4305
2	0,4146	-0,2562	0	0,2562	-0,4146	0,4146	-0,2562	0	0,2562	-0,4146
3	-0,3884	0,0682	0,3082	-0,4305	0,1979	0,1979	-0,4305	0,3082	0,0682	-0,3884
4	0,3526	0,1347	-0,4359	0,1347	0,3526	-0,3526	-0,1347	0,4359	-0,1347	-0,3526
5	-0,3082	-0,3082	0,3082	0,3082	-0,3082	-0,3082	0,3082	0,3082	-0,3082	-0,3082
6	0,2562	0,4146	0	-0,4146	-0,2562	0,2562	0,4146	0	-0,4146	-0,2562
7	-0,1979	-0,4305	-0,3082	0,0682	0,3884	0,3884	0,0682	-0,3082	-0,4305	-0,1979
8	0,1347	0,3526	0,4359	0,3526	0,1347	-0,1347	-0,3526	-0,4359	-0,3526	-0,1347
9	-0,0682	-0,1979	-0,3082	-0,3884	-0,4305	-0,4305	-0,3884	-0,3082	-0,1979	-0,0682

При такой постановке решение уравнения (3), полученное методом разделения переменных [10], составило

$$T(x, t) = Q_0(l - x) + U_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} b_m - \frac{8l}{\pi^2 (2m-1)^2} Q_0 + \frac{4(-1)^m}{\pi(2m-1)} U_0 \right] e^{-\frac{(2m-1)^2 \pi^2 t}{4l^2}} \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2l}.$$

Проверка показывает, что при $t = 0$ в решении остается только $\varphi(x)$, а при $x = l$ – только U_0 . Этим доказывается верность полученного аналитического решения.

Расчеты проводились для 51 расчетных равноотстоящих узлов по длине l . Шаг по «времени» при численном решении составлял

0.001 м^2 , а при реализации аналитического решения – 0.020 м^2 . При численном решении через каждые 20 шагов по времени осуществляли переход к исходной функции и данные записывали в новом файле.

Сравнения результатов показали, что при малых «временах» результаты аналитического и

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 4.102	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

численного решений совпадают в рамках точности графического представления.

Результаты вычислительного эксперимента. На рис. 1 в расчетной плоскости (t, x) представлены изменения температурного поля однородного стержня при начальной температуре 10^0C . Через границу $x=0$ осуществляли подвод тепла с интенсивностью $10^0\text{C}/\text{м}$. С момента $t=0$ на границе $x=l$ сохраняли одинаковую температуру 20^0C .

Скачкообразное изменение температуры на границе $x=l$ в рамках 10^0C сохранялось до «времени» 0.4 м^2 . Пучок кривых изотерм, образованный в точке $(0; l)$, демонстрирует скачкообразное изменение температуры от 10^0C до 20^0C в этой точке. До 0.4 м^2 кривые температуры имеют локальные минимумы, поэтому изотермы имеют выпуклую справа форму. После $t=0.4 \text{ м}^2$ устанавливается монотонно убывающая по координате x температура.

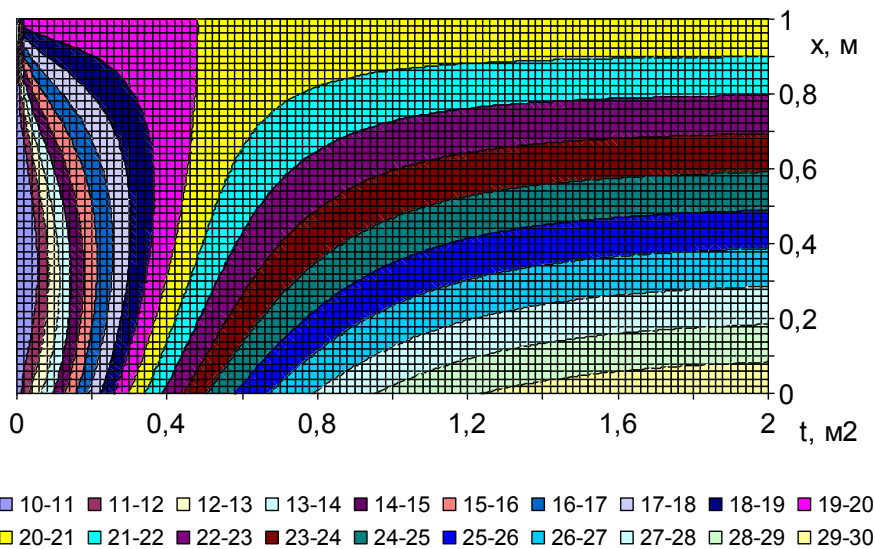


Рис. 1. Изменение температурного поля однородного стержня по t . $l=1 \text{ м}$, $N=50$, $\tau=0.001 \text{ м}^2$, $T_0(x)=10^0\text{C}$, $q_0(t)=10^0\text{C}/\text{м}$, $T(l,t)=20^0\text{C}$, $f(x,t)=0^0\text{C}/\text{м}^2$.

На границе $x=0$ наблюдается монотонное возрастание температуры – сначала интенсивно, потом меньше и меньше – за счет постоянного подвода тепла. При $t=2.0 \text{ м}^2$ на этой границе достигается 30^0C . В связи с этим снизу вверх проникают полосы высокой температуры.

На рис. 2 представлены результаты варианта скачкообразного изменения температуры от 10^0C до 20^0C при $t=0$ на границе $x=l$, а другой конец стержня теплоизолирован: $q_0(t)=0^0\text{C}/\text{м}$.

Изотермы получились s-образными. Притом, в конце кривых со стороны $x=0$ кривые перпендикулярны координатной прямой $x=0$, что соответствует природе теплоизоляции.

По координатной прямой $x=0$ температура растет постепенно, но медленно чем на рис. 1. При $t=2.0 \text{ м}^2$ по длине стержня устанавливается практически линейное распределение температуры.

На рис. 3 представлены результаты варианта, когда через конец $x=0$ осуществляется отбор тепла с интенсивностью $q_0(t)=-10^0\text{C}/\text{м}$. В начальный момент в этом конце также образуется пучок изотерм, но с меньшей чем в начальной температуры. Поэтому температура по координатной прямой $x=0$ сначала убывает до 7^0C , а дальше растет, достигая в конце расчетного времени 10^0C . В это время достигается также равномерное возрастание температуры по длине стержня. Т.е. процесс практически устанавливается: дальнейшее изменение температурного поля будет незначительным.

Преимущество численного метода решения задач заключается в том, что не налагаются какие-нибудь ограничения к формированию правой части уравнения, граничным условиям или начальному распределению температуры. При численном решении этих данных можно задавать в табличной форме. Например, наличие

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 4.102	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

точечного стока или источника тепла в области расчета, как это сделано при формировании следующей задачи, пришлось бы использовать дельта- функцию Дирака, а точное аналитическое решение задачи занимало бы огромное количество страниц, т.к. пришлось бы разлагать решения и дельта-функцию Дирака в ряд. Но при численном решении задачи это осуществляется

легко и на рис. 4 представлены результаты для случая $q_0(t) = 10^0 C / м$,

$$f(x,t) = \begin{cases} 10^0 C / м^2 & \text{при } x = 0.3 м, \\ -10^0 C / м^2 & \text{при } x = 0.7 м, \\ 0^0 C / м^2 & \text{при } x \neq 0.3 \text{ и } x \neq 0.7 м. \end{cases}$$

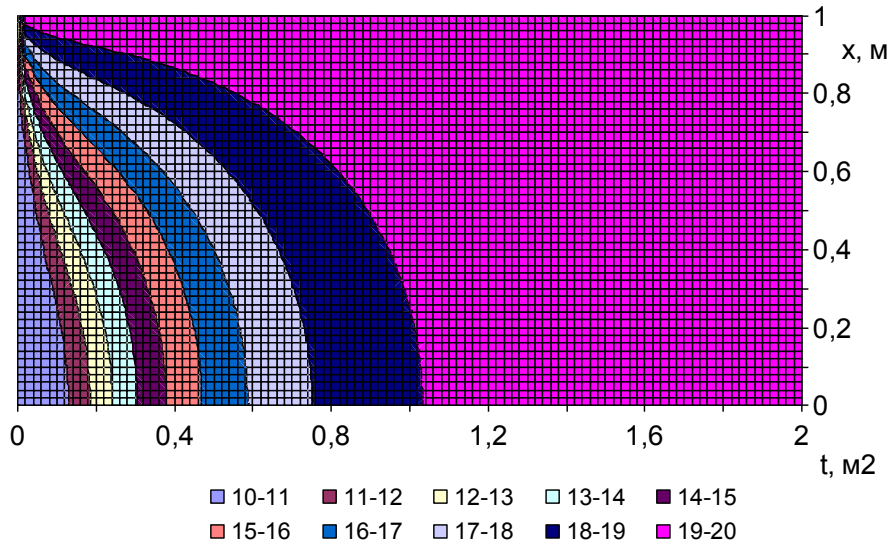


Рис. 2. Изменение температурного поля однородного стержня по t . $q_0(t) = 0^0 C / м$. Остальные данные см. рис. 1.

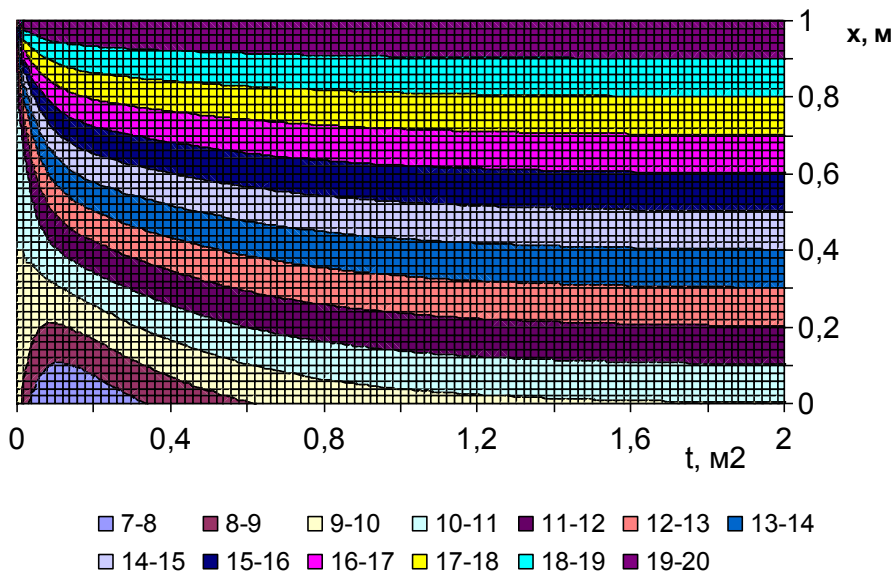


Рис. 3. Изменение температурного поля однородного стержня по t . $q_0(t) = -10^0 C / м$. Остальные данные см. рис. 1.

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	РИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 4.102	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

Картина получилась аналогичной, представленной на рис. 1. Причиной тому является, по-видимому, малые значения интенсивностей отбора и подвода тепла в

отдельных узлах (с учетом деления исходного уравнения на коэффициент температуропроводности).

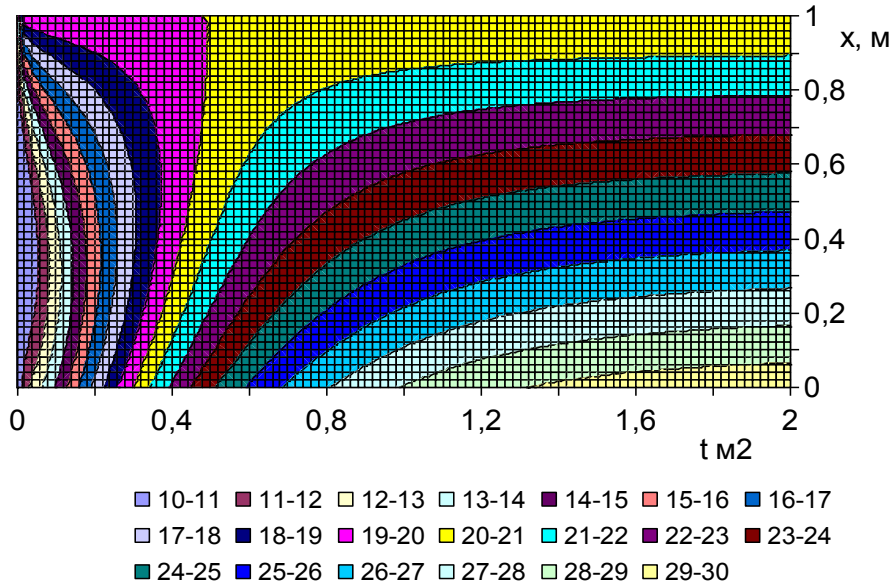


Рис. 4. Изменение температурного поля однородного стержня по t . $q_0(t) = 10^0 C/m$, $f(0.3, t) = 10^0 C/m^2$, $f(0.7, t) = -10^0 C/m^2$. Остальные данные см. рис. 1.

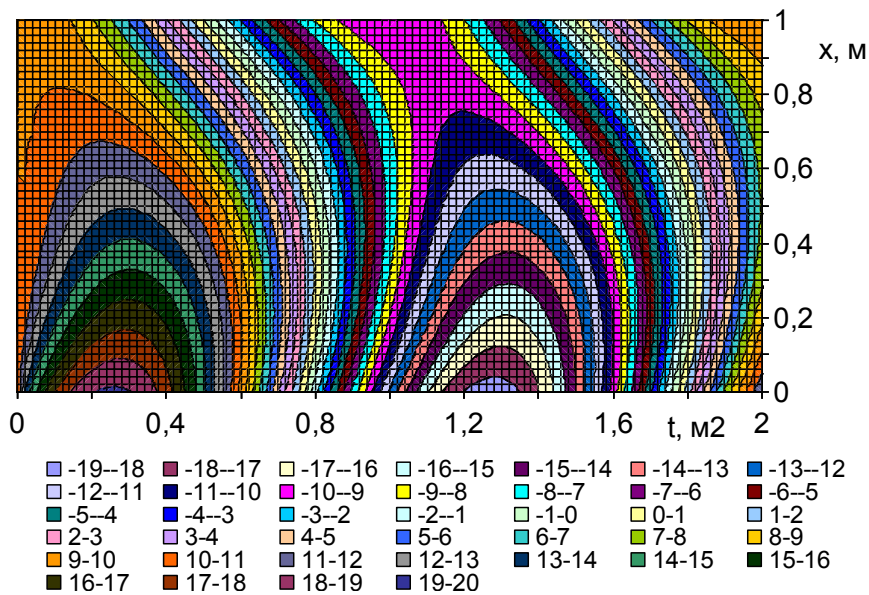


Рис. 5. Изменение температурного поля однородного стержня по t . $q_0(t) = 40 \cos \pi t$ $^0 C/m$, $\mu_1(t) = 10 \cos \pi t$. Остальные данные см. рис. 1.

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 4.102	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

На рис. 5 представлены изотермы в расчетной плоскости $(t; x)$, полученные при $q_0(t) = 40 \cos \pi t$ °C / м, $\mu_l(t) = 10 \cos \pi t$.

Концы изотерм, принадлежащие интервалу температуры $(-10; 10)$, находятся на двух граничных прямых $x=0$ и $x=l$. Остальные изотермы начинаются и кончаются на координатной прямой $x=0$. При $x=0$ и $x=l$ температура проходит полный цикл, характерный функции косинус: убывает, возрастает и начинает убывать.

Заключение

Таким образом, в рамках данной статьи продемонстрировали особенности дифференциально-разностного метода решения параболического уравнения. Основным успехом работы является то, что аналитическим путем определили собственные числа и векторы матрицы перехода A для граничных условий второго и первого родов при $x=0$ и $x=l$ соответственно. Их можно использовать при решении одно- и многомерных задач теплопередачи, фильтрации, теории упругости и др.

References:

1. Samarskiy A.A. (1977) Teoriya raznostnykh skhem. – M.: Nauka, 1977. – 656 p.
2. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. (2003) Vychislitel'naya teploperedacha. – M.: Editorial URSS, 2003. – 784 p.
3. Paskonov V.M., Polezhaev V.I., Chudov L.A. (1984) Chislennoe modelirovanie protsessov teplo- i massoobmena. – M.: Nauka, 1984. – 288 p.
4. Marchuk G.I. (1977) Metody vychislitel'noy matematiki. – M.: Nauka, 1977. – 456 p.
5. Karimberdieva S. (1983) Chislennyye metody resheniya differentsial'no-raznostnykh uravneniy v parallelepipedе, share i tsilindre. – Tashkent: Fan, 1983. – 112 p.
6. Faddeeva V.N. (1949) Metod pryamykh v primeneniі k nekotorym kraevym zadacham. – Tr. MI AN SSSR, 1949, tom 28. – p. 73-103. (Iz Obshcherossiyskogo matematicheskogo portala Math-Net).
7. Faddeev D.K., Faddeeva V.N. (1963) Vychislitel'nye metody lineynoy algebrы. – M.: Fizmatgiz, 1963.
8. Gel'fand I.M. (1971) Lektsii po lineynoy algebre (izd. 4-e dopoln.). – M.: Nauka, 1971. – 272 p.
9. Kopchenova N.V., Maron I.A. (1972) Vychislitel'naya matematika v primerakh i zadachakh. – M.: Nauka, 1972. – 368 p.
10. Budak B.M., Samarskiy A.A., Tikhonov A.N. (1972) Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. – M.: Nauka, 1972. – 688 p.

