

## Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344  
ISI (Dubai, UAE) = 0.829  
GIF (Australia) = 0.564  
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
PIHII (Russia) = 0.207  
ESJI (KZ) = 3.860  
SJIF (Morocco) = 2.031

ICV (Poland) = 6.630  
PIF (India) = 1.940  
IBI (India) = 4.260

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

## International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2017 Issue: 09 Volume: 53

Published: 30.09.2017 <http://T-Science.org>

**S.U. Zhanatauov**

candidate of physics and mathematical sciences,  
Department «Automation and information technologies»,

Associate professor,

Noncommercial joint-stock company

"Kazakh national agrarian university", Kazakhstan

[sapagtu@mail.ru](mailto:sapagtu@mail.ru)

SECTION 2. Applied mathematics.  
Mathematical modeling

## THEOREM ON THE $\Lambda$ - SAMPLES

**Abstract:** The proof of the theorem on the existence of infinite sets of  $\Lambda$ -samples simulated within framework of the inverse model of the principal component analysis (IM PCA) [2-5,8] with  $n=2$  is given in the article. IM PCA was developed for any integer value of  $n$  greater than 2:  $n>2$  [2-5,8]. Within the framework of the IM PCA, the inverse problem of the principal component analysis (IP PCA) having an infinite set of associated solutions- $\Lambda$ -samples  $Z^{(t, \ell)}_{m_n}$ , 1-dimensional  $z$ -variables in which is modeled and histogrammically adequate to 1-dimensional  $z$ -variables in a real multidimensional sample [8,12-16]. It is shown how to quantify the effect of the coefficient  $r_{12}=r_{21}=r$  on the  $f$ -parameters  $f_2, \dots, f_6$  [2-5,8] of the spectrum  $\Lambda_{m_n}$  of the correlation matrix  $R^{(\ell)}_{m_n}$  and on the elements of the matrices  $\Lambda_{22}, C^{(\ell)}_{22}$ , the multidimensional  $\Lambda$ -samples  $Y^{(t)}_{m_2}, Z^{(t, \ell)}_{m_2}$ ,  $t=1, \dots, k_t < \infty$ ,  $\ell=1, \dots, k_\ell < \infty$ .

**Key words:** inverse model of the principal component analysis,  $\Lambda$ -sample

**Language:** Russian

**Citation:** Zhanatauov SU (2017) THEOREM ON THE  $\Lambda$ - SAMPLES. ISJ Theoretical & Applied Science, 09 (53): 177-192.

**Soi:** <http://s-o-i.org/1.1/TAS-09-53-27> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2017.09.53.27>

## ТЕОРЕМА О $\Lambda$ -ВЫБОРКАХ

**Аннотация:** В статье дано доказательство теоремы о существовании бесконечных множеств  $\Lambda$ -выборок, моделируемых в рамках обратной модели главных компонент (ОМ ГК) [2-5,8] при  $n=2$ . ОМ ГК была разработана при  $n>2$ . В рамках ОМ ГК решена обратная задача анализа главных компонент (ОЗ АГК), имеющая бесконечное множество ассоциированных решений- $\Lambda$ -выборок  $Z^{(t, \ell)}_{m_n}$ , 1-мерные  $z$ -переменные в которых модельно и гистограммно адекватны 1-мерным  $z$ -переменным в реальной многомерной выборке [8,12-16]. Показано как количественно измерить влияние коэффициента  $r_{12}=r_{21}=r$  на  $f$ -параметры  $f_2, \dots, f_6$  [2-5,8] спектра  $\Lambda_{m_n}$  корреляционной матрицы  $R^{(\ell)}_{m_n}$  и на элементы матриц  $\Lambda_{22}, C^{(\ell)}_{22}$ , многомерных  $\Lambda$ -выборок  $Y^{(t)}_{m_2}, Z^{(t, \ell)}_{m_2}$ ,  $t=1, \dots, k_t < \infty$ ,  $\ell=1, \dots, k_\ell < \infty$ .

**Ключевые слова:** обратная модель главных компонент,  $\Lambda$ -выборка

### Введение.

Объектами теоремы служат модели, задачи, конусы и их образующие, гиперэллипсоиды, множества, многомерные выборки, их переменные, векторы значений переменных, символы связи объектов (переменных, матриц), формулы. Применяются разные переходы (повороты, преобразования) от одного числового объекта к нескольким. Решаемые алгебраические задачи, визуализированы с применением геометрических объектов 2- и  $n$ -мерного евклидова пространства (гиперэллипсоид, конус, орграф), позволяющие визуализировать, анализировать разные сложные связи между объектами, функциями с параметрами разного уровня управления. Все это позволяет выявлять

новые цифровые факты, знания. Ниже в статье при  $n=2$  выделены новые детали взаимосвязей между указанными выше объектами. Это позволяет найти и увидеть аналогичность ситуации при анализе многомерной и 2-мерной выборки реальных данных. Большое внимание уделяется обоснованию применяемых инструментов в тексте и в отсылках читателя к другим публикациям, где обсуждаемое изложено более полно. Результаты численно и визуально иллюстрированы, чтобы показать полный цикл «Данные-Преобразования-Визуализация-Анализ-Интерпретация-Выводы» при применении теоремы о  $\Lambda$ -выборках. Такое исследование может быть неверно понято (истолковано), не всегда присутствуют прямые фразы в моих



статьях, а их наличие в контексте письменного предложения не позволяет другому автору, прочитавшему его, делать ссылку. В работе будет показана “алгебра” (модели, задачи) перехода от одного числа - от значения коэффициента корреляции  $r$ , к многомерной геометрии: гиперэллипсоиду, многомерному конусу и к его образующим. Многомерные векторы чисел из  $n$ -мерного числового пространства преобразуются в  $\ell$ -мерные гиперэллипсоиды, в  $\ell < n$  образующие (прямые отрезки) многомерного конуса. Геометризация соотношений из рассматриваемых в теореме о  $\Lambda$ -выборках моделей позволили применить для извлечения цифровых знаний графические объекты теории графов, схемотехники. Они помогли конструированию письменных предложений «прочтения» рассматриваемых моделей, задач, объектов теоремы.

### Модели и задачи.

В теореме о  $\Lambda$ -выборках применяются прямая модель главных компонент (ПМ ГК (схематичное изображение  $Z_{mn} \Rightarrow (R_{nn}, C_{nn}, \Lambda_{nn}, Y_{mn})$ ), обратная модель главных компонент (ОМ ГК [2], схематичное изображение  $\Lambda_{nn} \Rightarrow (R_{nn}, C_{nn}, Y_{mn}, Z_{mn})$ ). Известные в ПМ ГК 2 матрицы  $n$ -мерных выборок известная и вычисляемая и 3 матрицы корреляций, дисперсий будут охарактеризованы в процессе изложения. В основе ПМ ГК лежит прямая задача анализа главных компонент (ПЗ АКГ[2-4]), решенная Г. Хо-геллингом [1]. В ПЗ АКГ решается прямая спектральная задача (ПСЗ) диагонализации симметрической матрицы [1,2]:  $R_{nn} \Rightarrow (C_{nn}, \Lambda_{nn})$ . Под ПЗ АКГ (ее схематическое изображение:  $Z_{mn} \Rightarrow Y_{mn}$ ) понимается задача преобразования (вычисления) для матрицы  $Z_{mn}$  стандартизованных коррелированных  $z$ -переменных с одинаковыми дисперсиями в новые некоррелированные  $y$ -переменные из матрицы  $Y_{mn}$  ( $m$  значений  $n$   $y$ -переменных) с разными дисперсиями. И в ПЗ АКГ при  $n > 2$  обязательно решается ПСЗ, а при  $n = 2$  ПСЗ решается по другому, а именно так, как изложено ниже.

Прикладная ценность теоремы о  $\Lambda$ -выборках выражается в применении ПМ ГК, ОМ ГК для проведения анализа, интерпретации и формулирования выводов, используя единственную многомерную стандартизованную выборку  $Z_{mn}$  [9-10]). При решении ПЗ АКГ матрицы  $R_{nn}, C_{nn}, \Lambda_{nn}, Y_{mn}$  вычисляются для имеющейся реальной стандартизованной выборки-матрицы  $Z_{mn}$ . Поэтому всегда считаем, что для известной выборки  $Z_{mn}$  всегда существуют и вычислены (или не вычислены, если они не используются нами, так как мы намерены вместо них иметь модельные) матрицы  $R_{nn}, C_{nn}, \Lambda_{nn}, Y_{mn}$ . Будем предполагать, что

теоретически всегда реализована последовательность вычислений:  $Z_{mn} \rightarrow R_{nn} \rightarrow C_{nn}, \Lambda_{nn} \rightarrow Y_{mn}$ . В одних ситуациях мы используем это предположение, в других - нет. В теореме-критерии равенства решений прямой и обратной задач анализа главных компонент [1] предполагается теоретическое существование реализации приведенной последовательности вычислений. Теорема существования и единственности решения  $Y_{mn}$  ПЗ АКГ доказана в [1]. В современных исследованиях часто делают ссылку на теорему 10.2.1 существования и единственности решения  $Y_{mn}$  ПЗ АКГ, доказанную в монографии Т.Андерсона “Введение в многомерный статистический анализ”.

Данные о значениях свойств объектов следует преобразовать до начала анализа в многомерную стандартизованную выборку с помощью инструмента «стандартизация», это позволяет сопоставлять друг с другом значения безразмерных [17, стр.26] признаков объектов. Если мы имеем реальную многомерную стандартизованную выборку  $Z_{mn}$  то, считаем не требующими доказательств наличие и доступность для нас всех матриц  $R_{nn}, C_{nn}, \Lambda_{nn}, Y_{mn}$ . Вопросом для нас является выбор из них входного объекта, т. е. матрицы из их перечня. В ПЗ АКГ входной объект - матрица  $Z_{mn}$ . В обратной модели главных компонент (ОМ ГК) решается обратная задача анализа главных компонент (ОЗ АКГ, [2-6]), где входным объектом является диагональная матрица дисперсий главных компонент  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Спектр  $\Lambda_{nn}$  корреляционной матрицы  $R_{nn}$  может быть модельным [2], восстановленным [13] или реальным [8]. ПЗ АКГ считается всегда решенной в ОМ ГК, но, как доказано в [9-10], единственное решение  $Y_{mn}$  ПЗ АКГ содержится среди бесконечного множества решений ОЗ АКГ. Схематичное изображение ОМ ГК [2,3,8]:  $\Lambda_{nn} \Rightarrow (R^{(\ell)}_{nn}, C^{(\ell)}_{nn}, Y^{(\ell)}_{mn}, Z^{(\ell)}_{mn})$ ,  $t = 1, \dots, k_t < \infty$ ,  $\ell = 1, \dots, k_t < \infty$ . Здесь при  $n > 2$  обязательно решается обратная спектральная задача (ОСЗ [1]):  $\Lambda_{nn} \Rightarrow (C^{(\ell)}_{nn}, R^{(\ell)}_{nn})$ ,  $\ell = 1, \dots, k_t$ , реализующая алгоритм из работы [11]. Методы решения ОСЗ при  $n > 2$  и при  $n = 2$  отличаются. При решении ОЗ АКГ для  $n = 2$  применяется один из набора инструментов-моделей, применяемых при  $n > 2$ . Другие обратные задачи рассматривались в [7].

### Конус и его образующие.

В теореме о  $\Lambda$ -выборках классическая задача диагонализации получила особый статус после применений [2-5, 7-8, 12, 13, 17-20] Леммы Chalmers С.Р [11]. Она стала рассматриваться как «прямая спектральная задача» (ПСЗ) [1,2]:  $R_{nn} \Rightarrow (C_{nn}, \Lambda_{nn})$ . Обратная спектральная задача (ОСЗ[1]):  $\Lambda_{nn} \Rightarrow (C^{(\ell)}_{nn}, R^{(\ell)}_{nn})$ ,  $\ell = 1, \dots, k_t$ , реализующая алгоритм из работы [11]. В

## Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

формулировке ОСЗ применяется геометрический объект-конус, в ПСЗ-гиперэллипсоид. Отличие ПСЗ от ОСЗ в том, что в ОСЗ моделируются  $i$ -ые компоненты ( $i=1, \dots, n$ ) всех  $n$  собственных векторов, т.е. моделируются строки  $c_i=(c_{i1}, \dots, c_{in})$ ,  $i=1, \dots, n$ , матрицы  $C_{nn}$  (они имеют номер  $\ell=1, \dots, k_\ell < \infty$ ). Компоненты вектор-строки  $c_i$  интерпретируются как координаты  $n$  точек на одной (из бесконечного числа) образующей конуса  $K_{nn}$ [2,8,11]. В проекции на плоскость, перпендикулярную основанию конуса (на плоскость, проходящую через вершину конуса перпендикулярно основанию конуса). При этом на боковой поверхности конуса получаются 2 прямые - 2 образующих конуса. По Лемме из [11] угол между ними равен  $\pi/2$ . За одно обращение к программе CORMAT [18] алгоритма моделируются  $n$  образующих конуса, а на каждой образующей моделируются  $n$  точек с координатами  $c_{i1}, \dots, c_{in}$ ,  $i=1, \dots, n$ . Из этих  $n^2$  чисел образуется модельная матрица  $C^{(\ell)}_{nn}$ , с номером  $\ell=1, \dots, k_\ell < \infty$ , если моделируются  $k_\ell$  матриц  $C^{(\ell)}_{nn}$ . Ее столбцы - их  $n$  штук, интерпретируются как компоненты собственных векторов неизвестной корреляционной матрицы с заданным спектром  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Теперь для заданной  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  модельная матрица  $C^{(\ell)}_{nn}$  определяет корреляционную матрицу  $R^{(\ell)}_{nn} = C^{(\ell)}_{nn} \Lambda_{nn} C^{(\ell)T}_{nn}$ . Если в ОСЗ неизвестна симметричная корреляционная матрица  $R_{nn}$ , то в ПСЗ диагонализуют известную симметричную корреляционную матрицу  $R_{nn}$  методом Холецкого и вычисляют столбцы, а не строки матрицы  $C_{nn}$  собственных векторов для  $R_{nn}$ . При этом в ОСЗ значения собственных чисел (в ПСЗ)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  интерпретируются как длины полуосей гиперэллипсоида [3,8], а компоненты собственных векторов - как косинусы (синусы) углов между  $i$ -ой  $z$ -переменной и  $j$ -ой  $u$ -переменной  $c_{ij} = \cos(z_i, u_j)$ .

Вычислительные отличия в ПСЗ, ОСЗ зависят от размерности матриц  $\Lambda_{nn}, C_{nn}$ : при значениях  $n$ , превышающих приблизительно 15, у тестовых симметричных матриц с заранее известными собственными векторами и собственными числами элементы матриц  $\Lambda_{nn}, C_{nn}$  в ПСЗ вычисляются с заметными погрешностями. В ОСЗ таких ограничений при  $n \leq 30$  не замечено. При моделировании только спектра  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  по схеме:  $(\varphi, n) \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  и с заданными значениями основных (не всех)  $f$ -параметров спектра. Задание значений всех  $6f$ -параметров - пока нерешенная задача.

### Гиперэллипсоиды.

В ПМ ГК, где решается ПЗ АГК зафиксирована неизменность значений элементов  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , т.е. постоянство длин полуосей гиперэллипсоида. Внутри него располагаются

модельные  $n$ -мерные точки координатной системы для  $u$ -переменных, полученных линейным преобразованием исходных, но стандартизованных  $z$ -переменных. Так как единственным решением ПСЗ является матрица  $C_{nn}$ , то в ПЗ АГК [1] выделено только единственное решение  $Y_{mn}$ . Матрица  $C_{nn}$  вычисляется единственным образом методом Якоби. Причем вычисляются только те собственные векторы, которые соответствуют ненулевым собственным числам. В ОСЗ вычисляются все  $n > 2$  собственных векторов, даже соответствующие нулевым собственным числам. Поэтому общепринято существование единственного решения  $Y_{mn}$  в ПЗ АГК для единственного входного объекта  $Z_{mn}$  в ПМ ГК.

В ОЗ АГК при номере  $t=1, \dots, k_t < \infty$  рассматривается ситуация когда внутри одного гиперэллипсоида (при неизменных значениях элементов  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ) существует  $k_t$  штук множеств (из бесконечного числа) сгущений точек, состоящих из  $m$   $n$ -мерных точек с координатами  $\{(y^{(t)}_{k1}, \dots, y^{(t)}_{kn}), k=1, \dots, m\}$ ,  $t=1, \dots, k_t$ . Ниже в теореме о  $\Lambda$ -выборках доказано существование для каждого решения  $Y^{(t)}_{mn}$  в ОЗ АГК бесконечного множества ассоциированных решений  $Z^{(t, \ell)}_{mn}$ ,  $\ell=1, \dots, k_\ell < \infty$ . Геометрически это означает (при фиксированном  $t$ ) существование для каждого множества из  $m$   $n$ -мерных точек с координатами  $\{(y^{(t)}_{k1}, \dots, y^{(t)}_{kn}), k=1, \dots, m\}$   $k_\ell < \infty$  штук множеств точек с координатами  $\{(z^{(t, \ell)}_{k1}, \dots, z^{(t, \ell)}_{kn}), k=1, \dots, m\}$ ,  $\ell=1, \dots, k_\ell < \infty$ . Внутри каждого из  $k_\ell < \infty$  гиперэллипсоидов, у которых фиксированы значения длин их полуосей  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , существует множество из  $m$   $n$ -мерных точек с координатами  $\{(y^{(t)}_{k1}, \dots, y^{(t)}_{kn}), k=1, \dots, m\}$  и множество из  $m$   $n$ -мерных точек с координатами  $\{(z^{(t, \ell)}_{k1}, \dots, z^{(t, \ell)}_{kn}), k=1, \dots, m\}$ . Таких пар множеств существует  $k_t$  штук. Это геометрическая иллюстрация существования для решения из бесконечного множества решений ОЗ АГК  $Y^{(t)}_{mn}$  бесконечного множества ассоциированных решений  $Z^{(t, \ell)}_{mn}$ ,  $t=1, \dots, k_t$ ,  $\ell=1, \dots, k_\ell < \infty$ . Этот результат наглядно иллюстрирует вывод из теоремы 2.3 [2,8,12,13,17]: одни и те же содержательные выводы получаются не только из анализа одной рассматриваемой реальной  $(C, \Lambda)$ -выборки, но из анализа других модельных  $(C^{(\ell)}, \Lambda)$ -выборок, являющихся решениями ОЗ АГК, что показано, например, в исследовании из [17].

Примеров адекватности как  $(C, \Lambda)$ -выборок [13], так и других  $\Lambda$ -выборок, достаточно много [2,8,12, 13]. Из ассоциированных решений ОЗ АГК- $(C, \Lambda)$ -выборок  $Z^{(t, \ell)}_{mn}$  после когнитивного анализа извлекаются одинаковые для всех значений  $t$  "цифровые" знания. Пример добычи фактического знания о рисках изменения доходностей ГЦБ (6 стандартизованных

## Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

изотермных рядов из матрицы  $Z^{(\ell)}$  [13,11,6 для значений  $\ell=1, \dots, 1000$ ) приведен в [17].

В этих моделях вычисляют (в ПМ ГК при  $t=0, \ell=0$ ) или моделируют (в ОМ ГК при  $t=1, \dots, k_t < \infty, \ell=1, \dots, k_\ell < \infty$ ) 2 конечные многомерные выборки  $Y^{(t)}_{mn}, Z^{(t,\ell)}_{mn}$ . В выборках значений  $n$   $u$ -переменных и  $n$   $z$ -переменных (в ОМ ГК моделируют еще значения  $n$   $u$ -переменных) вычисляют или моделируют три матрицы коэффициентов парных корреляций  $R^{(\ell)}_{nn}, \Lambda_{nn}, C^{(\ell)}_{nn}$ , характеризующие парные корреляции в множествах  $z$ -переменных:  $r_{ij} = \text{corr}(z_i, z_j)$ ,  $u$ -переменных:  $\text{corr}(y_i, y_j) = 0$  и между парами  $(z, u)$ -переменных:  $c_{ij} = \text{corr}(z_i, y_j)$ . Диагональные элементы в двух матрицах  $R^{(\ell)}_{nn}$  и  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  равны дисперсиям  $z$ -переменных и  $u$ -переменных,  $n > 2$ . При этом выполняется “закон сохранения суммы дисперсий”: сумма одинаковых дисперсий  $z$ -переменных равна сумме различных дисперсий  $u$ -переменных:  $\text{tr}(R_{nn}) = 1 + \dots + 1 = \text{tr}(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$ . Для моделируемых и рассматриваемых здесь  $\Lambda$ -выборок ОМ ГК  $Y^{(t)}_{mn}, Z^{(t,\ell)}_{mn}$  законы распределения  $\Lambda$ -выборок из бесконечных множеств, из которых они извлечены [2,8,13], не известны. Выбранные в качестве входных объектов статистики, стали в ОМ ГК параметрами бесконечных множеств, обозначенных ниже в теореме. Таким образом введенное в [2,8] понятие параметра множества выборок, вместо параметра генеральной совокупности, отличается от соответствующего численно неизвестного параметра неизвестной функции распределения теоретической статистической совокупности. В работах [2,13] показано почему распределения вероятностей  $n$  1-мерных переменных в выборке  $Z_{mn}$  становятся неизвестными (теряются в процессах случайных линейных преобразований) как в ОМ ГК, так и в ПМ ГК. Реальная  $\Lambda$ -выборка  $Z_{mn}$  и модельные  $\Lambda$ -выборки  $Z^{(t)}_{mn}, t=1, \dots, k_t$ , имеют [2,12-14] одинаковые корреляционные матрицы  $R_{nn} = (1/m)Z^T_{mn}Z_{mn}$  и  $R_{nn} = (1/m)Z^{(t)T}_{mn}Z^{(t)}_{mn}$ , которые, имеют одни и те же спектр  $\Lambda_{nn}$  и матрицу  $C_{nn}$  собственных векторов:  $R_{nn}C_{nn} = C_{nn}\Lambda_{nn}, C^T_{nn}C_{nn} = C_{nn}C^T_{nn} = I_{nn}$ . Выборка  $Y_{mn}$  называется единственным решением ОЗ АГК:  $Z_{mn} \Rightarrow (R_{nn}, C_{nn}, \Lambda_{nn}, Y_{mn})$ , а выборка  $Z_{mn}$  называется ассоциированным решением ОЗ АГК [2]. Пояснения насчет того почему переменные случайны в матрицах  $Z_{mn}, Y_{mn}$ , и почему они преобразовываются случайным линейным преобразованием [2, стр.63-70], почему неизвестны их законы распределения вероятностей изложены в [2,8].

### Цифровые знания.

В ПЗ АГК используется факт неизменности значений элементов  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , т.е. постоянство

длин полуосей гиперэллипсоида. В прикладных исследованиях генерируются внутри него модельные  $n$ -мерные точки координатной системы  $u$ -переменных, которые при любых  $\ell$ -отклонениях в координатной системе  $z$ -переменных, преобразуемой ортогональным преобразованием  $C^{(\ell)}_{nn}$  в другую координатную систему  $u$ -переменных.

Единственное решение  $Y_{mn}$  ПЗ АГК является одним из бесконечного множества решений ОЗ АГК [2, стр.110-112] согласно теореме 2.2 [2, стр.110-112, 10,11]. Из теоремы 2.2 следует, что одни и те же содержательные выводы (цифровые знания) формулируются из анализа рассматриваемой реальной  $(C, \Lambda)$ -выборки или других модельных  $\Lambda$ -выборок ОМ ГК, являющихся ассоциированными решениями ОЗ АГК [2]. ПЗ АГК решена в [1], ОЗ АГК решена в [2-4], ОМ ГК и ее применения описаны в [2,3,8,12-17,20].

Ассоциированные решения  $Z^{(t)}_{16,4} = Y^{(t)}_{16,4}C^T_{4,4}$ , т.е.  $(C, \Lambda)$ -выборки  $Z^{(t)}_{16,4}$ , соответствующие решению  $Y_{mn}$  ОЗ АГК генерируются в ОМ ГК [2,12]:  $\Lambda_{4,4} \Rightarrow (C_{4,4}, R_{4,4}, Y^{(t)}_{16,4}, Z^{(t)}_{16,4}), t=1, \dots, k_t$ , модельно и гистограммно адекватные реальной выборке  $Z_{mn}$ , являющейся в рамках ОМ ГК также  $(C, \Lambda)$ -выборкой. Наличие модельной адекватности видно из трех свойств  $\Lambda$ -выборок, сформулированных в теореме о  $\Lambda$ -выборках ниже (при  $n=2$ ) и в [2,3,8]-в теореме 2.1, для всех  $n > 2$ . В трех свойствах  $\Lambda$ -выборок [2,3,8] изменение значения номера  $t$  (или номера  $\ell$  или пары номеров  $(t, \ell)$ ) означает, что вариабельности подвергаются элементы матрицы  $Y^{(t)}_{mn}$  (или пары матриц  $R^{(\ell)}_{nn}$  и  $C^{(\ell)}_{nn}$ , или матрицы  $Z^{(t,\ell)}_{mn}$ ) при постоянной матрице  $\Lambda_{nn}$ .

Вычисленные по известной корреляционной матрице  $R_{nn}$  ее собственные числа  $\lambda_j, j=1, \dots, n$ , зависят от величин всех коэффициентов корреляции. В ОМ ГК входным объектом является спектр  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $n > 2$ , вычисленный при решении ПЗ  $R_{nn} \Rightarrow (C_{nn}, \Lambda_{nn})$ . Если нет реальных данных и нет корреляционной матрицы  $R_{nn}$ , то можно смоделировать модельный спектр  $\Lambda_{nn}$ ,  $(f_1, f_2, f_4)$ -адекватный “реальному” спектру:  $(f_1, f_2, f_4) \Rightarrow \Lambda_{nn}$ , такой что его  $f$ -параметры  $f_1, f_2, f_4$  равны заданным значениям, а остальные  $f$ -параметры произвольны, где [2,8]:  $f_1(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$ ,  $f_2(\Lambda_{nn}) = (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)$ ,  $f_3(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 / \lambda_n$ ,  $f_4(\Lambda_{nn}) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) / n < 1$ ,  $f_5(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \times \dots \times \lambda_n$ ,  $f_6(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 / \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} / \lambda_n$ . Так как  $\text{tr}(R^T R) = \text{tr}(\Lambda^2)$ , то соотношения между  $f$ -параметрами функционально зависят от элементов корреляционной матрицы  $R_{nn}$  [2, стр.37-46].

Свойства 1-3 теоремы о  $\Lambda$ -выборках применяются при получении цифровых знаний [2,12-17]. Цифровые данные вида объект-

## Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344  
ISI (Dubai, UAE) = 0.829  
GIF (Australia) = 0.564  
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
ПИИЦ (Russia) = 0.207  
ESJI (KZ) = 3.860  
SJIF (Morocco) = 2.031

ICV (Poland) = 6.630  
PIF (India) = 1.940  
IBI (India) = 4.260

свойства в рамках моделей, задач преобразовываются в новые информационные объекты, визуализируются и подвергаются осмыслению, письменно сочиняют словесные предложения, адекватно описывающие геометрические объекты, краткое описание которых дано выше. Все объекты, модели, задачи применяются при конструировании цифровых знаний. С применением ПМ ГК получена информация – матрицы  $C_{nn}$ ,  $\Lambda_{nn}$ ,  $Y_{nn}$ . Далее построены когнитивные карты в виде  $\ell=3$  орграфов, для их построения из матриц выделены  $\ell=3$  первые столбцы. Из графической информации выявлены цифровые телекоммуникационные знания [16], практические правила вычислений степени рисковости изменения величины процентной ставки вида «доходность к дате погашения» у валютных высокорисковых государственных ценных бумаг, рекомендуемых дилерам банка [17]. Те же матрицы участвуют в процессе получения когнитивно точного разделения факторов влияния семьи, учителей, школы на смысловые фактор-следствия, вычисленные с применением когнитивных карт (КК) и когнитивного моделирования [14, стр.59-61]. Здесь проведена визуализация когнитивной карты (КК) и соотношения (объекты теоремы) из когнитивной модели социально-экономических факторов карьерной успешности школьников. Результат - формализация плохо формализуемой ситуации, позволившая «добыть» цифровые неформальные знания из экономических данных. При этом уточнены фразы-смыслы 2-х фактор-следствий и влияющих на них 6 дуг в узлах КК, даны обоснования противоположности знаков весов дуг орграфа: 1-ое содержит 60,43% информации, извлеченных из реальных данных, 2-ое-23,255% информации, получившие когнитивно точный смысл. Сформулирован простой эмпирический факт-будущая карьерная успешность школьника зависит (формируется) под воздействием 2-х независимых факторов: «статус родителей» и «средняя оценка ученика в аттестате».

Применяемая в [2,14-16] когнитивная интерпретация - это совокупность значений (смыслов, поэтому применяется прямая и обратная модели главных компонент (ПМ ГК, ОМ ГК [1,6,10-12]), где  $u$ -переменные именованы иногда смысловыми. Такому «осмыслению» подвергаются сами элементы-матрицы  $C_{nn}$ ,  $\Lambda_{nn}$ ,  $Y_{nn}$  теории-((ПМ ГК)+(ОМ ГК)[1,2]), то есть интерпретируются символы связи объектов и формулы. При анализе этой сложной ситуации используем параметры и переменные ОСЗ из ОМ ГК:  $\Lambda \Rightarrow (R, C, Y, Z)$ . Из формулировки ОЗ АГК из ОМ ГК следует, что обратная задача вычисления оптимальной системы весов (из матрицы  $C_{nn}$ ), т.е. вычисление совокупности воздействий

( $c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jn}$ ) на  $j$ -ый фактор системы (со своей моделью причинно-следственной зависимостью в виде функций  $y_{ij} = z_{i1}c_{1j} + z_{i2}c_{2j} + \dots + z_{in}c_{nj}$ ,  $i=1, \dots, m$ ), зависит от элементов спектра

$\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ , и от параметров спектра. Вершины, дуги орграфа №1 [16] визуализируют «модель представления знаний эксперта в виде ориентированного орграфа (когнитивной карты [(Z, Y), C]), где (Z, Y=ZC) – множество факторов (6  $z$ - и 6  $y$ -переменных) ситуации,  $C_{66}$ -множество измерений  $n^2=6^2$  причинно-следственных отношений между факторами ситуации) и 6 методов анализа экономической ситуации в телекоммуникационной отрасли, выделяющие визуализируемые подмножества факторов» в виде одного фактора  $y_1$  [16]. При анализе будущих дебиторской и кредиторской задолженностей муниципалитетов городов США [15], с применением ПМ ГК получена информация -матрицы  $C_{66}$ ,  $\Lambda_{66}$ ,  $Y_{m,6}$ ,  $m=30$ . Далее с применением когнитивных карт из матриц  $C_{66}$ ,  $\Lambda_{66}$  выделены  $\ell=3$  первые столбцы, на их основе построены  $\ell=3$  орграфов – это графическая информация, а из последней выявлены цифровые знания [15]. В таких случаях иногда применяют термин «пространственная статистика» (Spatial Statistics), которые не работают напрямую со слоями ситуаций. При когнитивной интерпретации до начала анализа преобразовывают информацию в класс пространственных объектов при помощи выше приведенных инструментов-моделей, специальных задач.

### Доказательство теоремы о $\Lambda$ -выборках.

В начале проведем моделирование при  $n=2$  пар  $u$ -переменных,  $y$ -переменных и  $z$ -переменных, не рассматривавшихся в теореме 2.1 [2,3,8]. Это будет доказательством теоремы 2.1. Недиагональный элемент  $r_{12}=r_{21}=r$  корреляционной матрицы  $R_{22}$ , как показано ниже, явно присутствует во всех формулах: элементов ее спектра  $\Lambda_{22}$ , элементов ее матрицы собственных векторов  $C_{22}^{(t)}$ , элементов выборок  $Y_{m,2}^{(t)}, Z_{m,2}^{(t)}$ ,  $t=1, \dots, k_t < \infty$ ,  $\ell=1, \dots, k_\ell < \infty$ . При  $n>2$  интуитивно ясно, что значение наибольшего элемента  $\lambda_1$  тем больше, чем больше в недиагональной части матрицы  $R_{nn}$  количество коэффициентов корреляции с доминирующими абсолютными величинами. При  $n=2$  геометрическая интерпретация этого факта наглядно видна и существенно помогает при применении методов добычи знаний (data mining) [14-17].

Если дана симметричная матрица  $R_{22}$ , то по известной теории решается известная оптимизационная задача, которая сводится к решению уравнения относительно  $\lambda$  [17]:  $\det(R_{22} -$

## Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

$\Lambda_{22})=0$ . В прямой спектральной задаче (ПСЗ)  $R_{22} \Rightarrow (\Lambda_{22}, C_{22})$  диагонализации матрицы  $R_{22}$  (так называется в [2] задача вычисления элементов спектра  $\Lambda_{mn}$  для известной матрицы  $R_{mn}$  при  $n > 2$ ), то ее решения  $\lambda_1, \lambda_2$  находятся из условия равенства нулю определителя характеристического уравнения:  $\det(R_{22} - \lambda I_{22}) = 0$ . Данное равенство преобразуется в уравнение вида  $(1-\lambda)(1-\lambda) - \gamma \times \gamma = 0$ . Решениями являются 2 значения для  $\lambda$ . Раскрывая скобки и группируя члены, получим квадратное уравнение  $\lambda^2 - 2\lambda + (1-\gamma^2) = 0$ . Собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2$  корреляционной матрицы  $R_{22}$  явно выражаются через коэффициент корреляции  $\gamma_{21} = \gamma_{12} = \gamma$  из квадратной, симметрической матрицы  $R_{22}$ :  $\lambda_1 = 1 + \gamma$ ,  $\lambda_2 = 1 - \gamma$ , при этом  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ . Если  $\gamma = 1$ , то  $\lambda_1 = 2$ , если  $\gamma = 0$ , то  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . При  $\gamma < 0$  имеем  $\lambda_1 = 1 - \gamma$ ,  $\lambda_2 = 1 + \gamma$ , сохраняя условие доминирования:  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Система из 2 уравнений вида  $R_{22} \mathbf{c}_j = \lambda \mathbf{c}_j$ ,  $j = 1, 2$ , при  $\lambda_1 = 1 \pm \gamma$ ,  $\lambda_2 = 1 (\mp) \gamma$ , имеет 2 решения  $\mathbf{c}_j = (c_{1j}, c_{2j})^T$ ,  $j = 1, 2$ , такие, что  $\mathbf{c}_j^T \mathbf{c}_j = 1$ ,  $\mathbf{c}_1^T \mathbf{c}_2 = 0$ ,  $\mathbf{c}_2^T \mathbf{c}_1 = 0$ . Все решения системы из 2 уравнений получаются при смене знака  $\pm$  при  $\sin \alpha$ :  $\mathbf{c}_1 = ((\pm) \times \sin \alpha, \cos \alpha)^T$ ,  $\mathbf{c}_2 = (\cos \alpha, (\mp) \times \sin \alpha)^T$ . Первое решение-2 собственных вектора  $\mathbf{c}_1 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)^T$ ,  $\mathbf{c}_2 = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$ . —здесь вставлены нижние знаки при  $\sin \alpha$ . Второе решение  $\mathbf{c}_1 = (\sin \alpha, \cos \alpha)^T$ ,  $\mathbf{c}_2 = (\cos \alpha, -\sin \alpha)^T$ . Знаки при  $\sin \alpha$  соответствуют правосторонней (“северо-восток”) системе координат. Единичные векторы  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$  ортогональны:  $\mathbf{c}_j^T \mathbf{c}_j = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ,  $\mathbf{c}_2^T \mathbf{c}_1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ,  $\mathbf{c}_1^T \mathbf{c}_2 = \sin \alpha \times \cos \alpha - \cos \alpha \times \sin \alpha = 0$ . Для 2-го решения выбираем верхний знак (-) при  $\sin \alpha$  в  $\mathbf{c}_1$ , нижний знак (+) при  $\sin \alpha$  в  $\mathbf{c}_2$ :  $\mathbf{c}_1 = (\sin \alpha, \cos \alpha)^T$ , а в  $\mathbf{c}_2 = (\cos \alpha, -\sin \alpha)^T$  верны верхние знаки при  $\sin \alpha$ . Отличие первого решения системы из 2 уравнений вида  $R_{22} \mathbf{c}_j = \lambda \mathbf{c}_j$ ,  $j = 1, 2$ , от второго выражается в перестановке значений z-переменных из ОМ ГК: столбцы  $z_1, z_2$  меняются местами (Таблица 3). При остальных комбинациях знаков не выполняются соотношения из ПМ ГК, ОМ ГК-отбрасываем их. Условие стандартизованности z-переменных нарушается при  $\alpha \neq \pi/4$ . Расчеты при разных значениях  $\alpha \neq \pi/4$  показывают: в ОМ ГК варианта 2:  $R^{(l)}_{22} \Rightarrow (\Lambda^{(l)}_{22}, C^{(l,L)}_{22}, Y^{(l,t)}_{m2}, Z^{(l,t)}_{m2})$ ,  $l = 1, \dots, k_l < \infty$ ,  $L = 1, 2$ ,  $t = 1, \dots, k_t < \infty$ , при любых значениях коэффициента корреляции  $\gamma^{(l)}$  (при  $n = 2$ ) в правосторонней системе координат, угол поворота оси u-переменных к оси z-переменных против часовой стрелки проводится на угол  $\alpha = \pi/4$  (Таблица 2).

Расположив в столбцах матрицы  $C_{22}$  компоненты векторов  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$  имеем матрицу собственных векторов со свойствами:  $C_{22}^T C_{22} = I_{22}$ ,  $C_{22} C_{22}^T = I_{22}$ . Геометрическая интерпретация ПСЗ  $R^{(l)}_{22} \Rightarrow (\Lambda^{(l)}_{22}, C^{(l,L)}_{22})$ ,  $L = 1, 2$ ,  $l = 1, \dots, k_l < \infty$ , сопряжена с алгебраическим преобразованием z-переменных в u-переменные: она заключается в повороте перпендикулярных

осей эллипса вокруг его центра на угол  $\alpha > 0$  против часовой стрелки при  $\gamma > 0$  ( $\alpha < 0$  при  $\gamma < 0$ ). Здесь  $\alpha > 0$  - угол, на который приподнята большая полуось эллипса (в системе координат u-переменных) над 1-ой полуосью (в системе координат z-переменных) с длинами полуосей  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Эту интерпретацию собственных чисел и компонент собственных векторов мы использовали в [3,14-16] и ниже при описании других, а именно случайных ортогональных преобразований и при моделировании t-отклонений в u- и z-переменных [3]. Выше были приведены формулы однозначного соответствия корреляционной матрицы  $R^{(l)}_{22}$  и ее 2-х собственных чисел  $\Lambda^{(l)}_{22}: \lambda^{(l)}_1 = 1 + \gamma^{(l)}$ ,  $\lambda^{(l)}_2 = 1 - \gamma^{(l)}$ ,  $l = 1, \dots, k_l < \infty$ . Если задана корреляционная матрица  $R_{22}$ , то это означает, что значение коэффициента корреляции  $\gamma^{(l)}$  и значение номера  $l$  фиксированы. Решение ПСЗ  $R_{22} \Rightarrow (\Lambda_{22}, C^{(L)}_{22})$ ,  $L = 1, 2$ , позволяет получить решение ПЗ АГК:  $R_{22} \Rightarrow (\Lambda_{22}, C^{(L)}_{22}, Y^{(l)}_{m2}, Z^{(l,L)}_{m2})$ . Зная это мы можем решить и ОСЗ и ОЗ АГК. Если задан один спектр  $\Lambda_{22}$ , то решению ПСЗ соответствует решение ОСЗ  $\Lambda_{22} \Rightarrow (R_{22}, C^{(L)}_{22})$ ,  $L = 1, 2$ . После получения решений ОСЗ, аналогично случаю  $n > 2$ , решаем ОЗ АГК:  $\Lambda_{22} \Rightarrow (R_{22}, C^{(L)}_{22}, Y^{(l)}_{m2}, Z^{(l,L)}_{m2})$ ,  $t = 1, \dots, k_t < \infty$ . ОМ ГК при  $n = 2$  имеет вид:  $\Lambda^{(l,t)}_{22} \Rightarrow (R^{(l,t)}_{22}, C^{(l,t,L)}_{22}, Y^{(l,t)}_{m2}, Z^{(l,t,L)}_{m2})$ .

Эллипсоиды при  $n = 2$  с длинами полуосей  $\lambda_1, \lambda_2$  важны тем, что внутри него находится «сгущение» 2-мерных точек с координатами  $(y_{k1}, y_{k2})$ ,  $k = 1, \dots, m$ . При любых t-отклонениях в z-переменных [11].

В общем случае при  $n > 2$ , при положительных 1-ых компонентах всех n собственных векторов:  $c_{11} > 0, c_{12} > 0, \dots, c_{1n} > 0$ , главная (самая длинная) ось гиперэллипсоида [3,8] расположена вдоль линии, образующей угол  $\alpha$  с направлением 1-ой оси координатной системы z-переменных. В ПСЗ для нулевых собственных чисел не вычисляется их собственные векторы. В ОСЗ моделируются собственные векторы, соответствующие нулевым собственным числам, ибо в алгоритме из работы [11] моделируются строки  $\mathbf{c}_i = (c_{i1}, \dots, c_{in})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , матрицы  $C_{mn}$  (она имеет номер  $l = 1, \dots, k_l < \infty$ ), т.е. моделируются компоненты вектора-строки  $\mathbf{c}_i$ . Они интерпретируются как образующие конуса  $K_{mn}$  [2,811], расположенные в сечении под прямым углом.

### Теорема о $\Lambda$ -выборках.

Для получения 2-мерной случайной стандартизированной выборки  $U_{m2} \in N(0, I_{22})$ ,  $= \text{diag}(1, 1)$ ,  $m > n = 2$ , можно воспользоваться процедурой декорелирующего преобразования [2,18-20]:  $V^o_{mn} \Rightarrow U_{mn}$ , апробированного в [2,4-6,8] при многих значениях  $m > n > 2$ . Ранг матрицы  $U_{m2}$

## Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

rk( $U_{m2}$ )=2 такой, что:  $(1/m)U_{m2}^T U_{m2} = I_{22}$ . Декоррелирующее преобразование реализуется на первом этапе построения ОМ ГК [2-5,8] при  $n>2$ . При  $n=2$  оно не применимо. Мы используем его реализации при  $n>2$  в ОМ ГК здесь для случая  $n=2$ . Данное декоррелирующее преобразование в работах [2-5,8] схематично обозначено так:  $V_{mn}^o \Rightarrow U_{mn}$  причем оно может быть реализовано для любой выборки значений случайной величины  $\xi$  в виде матрицы данных  $V_{mn}^{(t)}$  ранга  $n>2$  с номером  $t$ :  $t=1, \dots, k_t < \infty$ . Элементы  $v_{ij}^o$  выборки  $V_{mn}^o = \{v_{ij}^o\}$  являются реализациями 1-мерной случайной величины  $\xi$ . Закон распределения ее - равномерный ( $\xi \sim P_{(0,1)}$ ) или гауссов ( $\xi \sim \text{Gau}(0, \Sigma)$ ,  $\Sigma = I_{nn}$ ). После вычисления средних арифметических  $v_1^{me}, \dots, v_n^{me}$  для каждой из  $n>2$  столбцов матрицы  $V_{mn}^o = \{v_{ij}^o\}$  вычисляется матрица  $V_{mn} = \{v_{ij}^o - v_j^{me}\}$ ,  $i=1, \dots, m$ ,  $j=1, \dots, n$ . Многомерная выборка  $V_{mn}$  преобразуется в случайную стандартизованную выборку  $U_{mn}$  из множества  $N_s(0, I_{nn})$  [2,8]  $n$ -мерных выборок, имеющих выборочные средние, выборочные корреляционные матрицы, в точности равные  $0_{1n}, I_{nn}$ . При этом декоррелирующем преобразовании применяется ПЗ АГК [1,2]. Для получения нашей 2-мерной выборки  $U_{mn} \in N_s(0, I_{nn})$ ,  $m>n=2$  нельзя применить декоррелирующее преобразование к выборке  $V_{m2}$ , ибо при  $n=2$  программа, например, метода Якоби не работает. Поэтому мы вынуждены реализовать при  $n>2$  декоррелирующее преобразование  $V_{mn}^o \Rightarrow U_{mn}$ . Из модельной выборки  $U_{mn}$  такой, что  $(1/m)U_{mn}^T U_{mn} = I_{nn}$ , необходимо выбрать любые 2 рядом расположенные столбцы  $u_j = (u_{1j}, \dots, u_{mj})^T$ ,  $u_i = (u_{1i}, \dots, u_{mi})^T$ ,  $i=j+1, 1 \leq i \leq n-1$ . Указанные столбцы объединим в нашу матрицу  $U_{m2}$ , являющуюся 2-мерной выборкой значений объема  $m$  некоторой случайной величины, закон распределения которой неизвестен. Мы использовали факт, применяемый при  $n>2$  и применили его для случая  $n=2$ . Это-проявление метода доказательства истинности утверждения, где сперва оно верно при большем значении натурального числа  $n$ , потом-для меньшего: аналога неполной обратной индукции. Выборка  $U_{m2}$  принадлежит бесконечному множеству  $N_s(0, I_{22})$  2-мерных выборок с вектором средних  $0_{1n} = (0, 0)$ , с единичной выборочной корреляционной матрицей  $I_{22}: U_{m2} \in N_s(0, I_{22}), I_{22} = \text{diag}(1, 1)$ . Таким образом введенное понятие параметра множества выборок, а не параметра генеральной совокупности отличается от соответствующего практически неизвестного параметра теоретической статистической совокупности, с неизвестной функцией распределения. В работах [2,8,12] разъяснено почему распределение вероятностей  $n$  1-мерных переменных в выборке

$Z_{mn}$  становится неизвестным (теряется в процессе случайных линейных преобразований) как в ОМ ГК, так и в ПМ ГК. Далее преобразуем выборку  $U_{m2}$  в выборку  $Y_{m2} = U_{m2} \Lambda^{(1/2)22}$ , где значения элементов диагональной матрицы  $\Lambda^{(1/2)22}$  равны значениям квадратных корней от элементов матрицы  $\Lambda_{22} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ :  $\lambda^{(1/2)1} = \sqrt{1+r}$ ,  $\lambda^{(1/2)2} = \sqrt{1-r}$ . Полученная 2-мерная выборка  $Y_{m2}$  содержит в 1-ом столбце 1-ую главную компоненту ( $y$ -переменную из  $m$  значений):  $y_1 = (u_{11} \times \sqrt{1+r}, \dots, u_{m1} \times \sqrt{1+r})^T$ , во 2-ом столбце - 2-ую главную компоненту ( $y$ -переменную из  $m$  значений):  $y_2 = (u_{12} \times \sqrt{1-r}, \dots, u_{m2} \times \sqrt{1-r})^T$ , где  $u_{11}, \dots, u_{m1}$  и  $u_{12}, \dots, u_{m2}$  суть значения  $u$ -переменных  $u_1 = (u_{11}, \dots, u_{m1})^T$ ,  $u_2 = (u_{12}, \dots, u_{m2})^T$ , полученных выше в результате моделирования при  $n>2$  матрицы  $U_{mn}$ . Выборка  $Y_{m2} = U_{m2} \Lambda^{(1/2)22}$ , представленная в виде матрицы главных компонент, удовлетворяет стандартному условию некоррелированности ее  $y$ -переменных: если  $y_1^2 = ((1+r) \times (u_{11}^2)), y_2^2 = ((1-r) \times (u_{12}^2))$ ,  $i=1, \dots, m$ , то выполняется равенство  $(1/m)Y_{m2}^T Y_{m2} = \text{diag}((1+r), (1-r))$ , эквивалентное равенству  $(1/m) \times \text{diag}[(1+r) \times (u_{11}^2 + \dots + u_{m1}^2), (1-r) \times (u_{12}^2 + \dots + u_{m2}^2)] = \text{diag} [(1+r), (1-r)]$ , причем 2  $m$ -мерных вектора значений  $y$ -переменных будучи взаимно перпендикулярными, имеют разные длины, равные  $\lambda_1 = 1 \pm r, \lambda_2 = 1 - r$ :  $(1/m) \times \text{diag}(y_1^2, y_2^2) = \text{diag}((1+r), (1-r))$ . Если  $r>0$ , то  $\lambda_1 = 1+r$ ,  $\lambda_2 = 1-r$ , если  $r<0$ , то  $\lambda_1 = 1-r, \lambda_2 = 1+r$ , должно выполняться обязательное условие  $\lambda_1 > \lambda_2$ .

Преобразуем полученную 2-мерную выборку  $Y_{m2} = U_{m2} \Lambda^{(1/2)22}$  (объема  $m>2$ ) значений 2-х некоррелированных  $y$ -переменных в 2-мерную выборку значений 2-х коррелированных  $z$ -переменных  $Z_{m2} = Y_{m2} C^T_{22}$ , где  $i$ -ая строка матрицы  $Z_{m2}$  состоит из элементов

$$z_{i1} = (u_{i1} \times \sqrt{1+r}) \times (-\sin \alpha) + u_{i2} \times \sqrt{1-r} \times \cos \alpha,$$

$$z_{i2} = (u_{i1} \times \sqrt{1-r}) \times \cos \alpha - u_{i2} \times \sqrt{1+r} \times \sin \alpha,$$

а ее столбцы удовлетворяют условиям:

$$z_1 = (z_{11}, \dots, z_{m1})^T, z_2 = (z_{12}, \dots, z_{m2})^T, (1/m)z_1^T z_2 = r_{12} = r_{21} = r, (1/m)z_1^T z_1 = 1, (1/m)z_2^T z_2 = 1.$$

В отличие от  $y$ -переменных  $z$ -переменные имеют одинаковые и равные единице длины своих векторов значений. Если в таблицах 2,3 придать значению угла  $\alpha$  любое другое значение:  $\alpha \neq \pi/4$ , то нарушается условие стандартизованности  $z$ -переменных, длины 2  $m$ -мерных векторов значений  $y$ -переменных также меняются, но сохраняя сумму, равную 2.

По определению  $f$ -параметра  $f_2(\Lambda_{22})$  его значение равно  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (1+r)^2 + (1-r)^2 = 2(1+r^2)$ . Но это значение должно зависеть от угла  $\alpha$ , от  $y$ -переменных, от  $z$ -переменных, от  $u$ -переменных, моделируемых в ОМ ГК при  $n \geq 3$ . Они (зависимости) приведены выше.

Для каждого коэффициента корреляции  $0 < r \leq 1, r = r_{12} = r_{21}$ , моделируются бесконечное множество корреляционных матриц  $R^{(l)22}$ , где  $l$ -

## Impact Factor:

<b>ISRA (India)</b> = 1.344	<b>SIS (USA)</b> = 0.912	<b>ICV (Poland)</b> = 6.630
<b>ISI (Dubai, UAE)</b> = 0.829	<b>ПИИЦ (Russia)</b> = 0.207	<b>PIF (India)</b> = 1.940
<b>GIF (Australia)</b> = 0.564	<b>ESJI (KZ)</b> = 3.860	<b>IBI (India)</b> = 4.260
<b>JIF</b> = 1.500	<b>SJIF (Morocco)</b> = 2.031	

недиагональный элемент  $2 \times 2$ -матрицы  $R^{(\ell)}_{22}$ .  $\text{diag}(R^{(\ell)}_{22}) = \text{diag}(1, 1)$ ,  $\ell = 1, \dots, 20$ .

Таблицы 2,3 иллюстрируют модельные значения пар  $u$ -,  $y$ - и  $z$ -переменных, с заданными значениями  $f$ -параметров спектра корреляционной матрицы  $R_{22}$ . В качестве значения недиагонального элемента  $\gamma$  выбраны (таблица 2) положительные числа 0.20, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55, 0.60, 0.65, -0.70, 0.70, 0.75, 0.80, 0.80, 0.85, 0.85, 0.90, 0.90, 0.95, 0.98. в таблице 3 даны эти же числа, но со знаком минус и  $\pm 0.60$  вместо  $\pm 0.70$ . По вышеприведенным формулам вычислены модельные выборки  $Y^{(0)}_{m2}$ ,  $Z^{(1,0)}_{m2}$ ,  $Z^{(2,0)}_{m2}$ ,  $t=1, m=20$  (смотрите 6 правых столбцов в таблицах 2,3). В таблице 2 (таблица 3) приведены значения элементов матриц  $Y^{(0)}_{m2}$ ,  $Z^{(1,0)}_{m2}$ ,  $Z^{(2,0)}_{m2}$ ,  $t=1, m=20$ , только для  $\gamma = -0.70$ ,  $\gamma = 0.70$  ( $\gamma = -0.60$ ,  $\gamma = 0.60$ ). В качестве столбцов выборки  $U^{(0)}_{m2}$  в таблицах 2,3 фигурируют 2 столбца из матрицы  $U^{(0)}_{m14}$ , смоделированной при моделировании другой  $\Lambda$ -выборки с  $n=14 > 2$  в рамках другой задачи. При  $L=1$  значения элементов выборки  $Z^{(1,0)}_{m2}$  выделены зеленым цветом, а значения элементов выборки  $Z^{(2,0)}_{m2}$  при  $L=2$  – синим цветом.

Наша схема ОМ ГК принимает вид:  $R_{22} \rightarrow (\Lambda_{22}, C_{22}, Y^{(0)}_{m2}, Z^{(0)}_{m2}), t=1, \dots, k_t < \infty$ . Теперь переформулируем теорему 2.1 [2-5,8].

**Теорема.** Пусть  $m > n > 1$ , элементы диагональной матрицы  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , удовлетворяют соотношениям:  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ ,  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$ ,  $2 < k \leq n$ ,  $n > 2$ .

При  $n=2$  для бесконечного множества корреляционных матриц размерности  $2 \times 2$   $R^{(\ell)}_{22}$  таких, что ее элементы удовлетворяют соотношениям:  $\text{diag}(R^{(\ell)}_{22}) = (r^{(\ell)}_{11}, r^{(\ell)}_{22}) = (1, 1)$ , внедиагональные элементы положительны  $1 > r_{21}^{(\ell)} = -r_{12}^{(\ell)} > 0$  (отрицательны:  $-1 \leq r^{(\ell)} \leq 0$ ), а ее собственные числа равны  $\lambda^{(\ell)}_1 = 1 + r^{(\ell)}$ ,  $\lambda^{(\ell)}_2 = 1 - r^{(\ell)}$  ( $\lambda^{(\ell)}_1 = 1 - r^{(\ell)}$ ,  $\lambda^{(\ell)}_2 = 1 + r^{(\ell)}$ ) существуют:

а) только 2 собственных вектора  $\mathbf{c}_1 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)^T$ ,  $\mathbf{c}_2 = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$ ,  $\mathbf{c}_2 = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$ ,  $(\mathbf{c}_1 = (\sin \alpha, \cos \alpha)^T$ ,  $\mathbf{c}_2 = (\cos \alpha, -\sin \alpha)^T$ ), такие, что  $\mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j = 1, \mathbf{c}_j^T \mathbf{c}_j = 1, \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j = 0$ ,  $j=1, 2, i=1, 2, i \neq j$ ;

б) бесконечные множества многомерных выборок  $U^{(0)}_{m2} \in \mathcal{CN}_s(0, I_{22})$ , многомерных выборок  $Y^{(0)}_{m2} \in \mathcal{CN}_s(0, \Lambda^{(\ell)}_{22})$ , представленных в виде матрицы главных компонент с элементами  $\mathbf{y}_1 = (u^{(0)}_{11} \times \sqrt{1+r^{(\ell)}}), \dots, u^{(0)}_{m1} \times \sqrt{1+r^{(\ell)}})^T, \mathbf{y}_2 = (u^{(0)}_{12} \times \sqrt{1-r^{(\ell)}}, \dots, u^{(0)}_{m2} \times \sqrt{1-r^{(\ell)}})^T$ , где  $u^{(0)}_{11}, \dots, u^{(0)}_{m1}$  и  $u^{(0)}_{12}, \dots, u^{(0)}_{m2}$  суть значения  $u$ -переменных  $\mathbf{u}^{(0)}_1 = (u^{(0)}_{11}, \dots, u^{(0)}_{m1})^T, \mathbf{u}^{(0)}_2 = (u^{(0)}_{12}, \dots, u^{(0)}_{m2})^T$ , полученных в результате моделирования при  $n > 2$  матрицы  $U_{mn} \in \mathcal{CN}_s(0, I_{nn})$ ,  $n > 2$ ;

в) бесконечные множества 2-мерных выборок  $Z^{(t,0)}_{m2} \in \mathcal{CN}_s(0, R^{(\ell)}_{22}), t=1, \dots, k_t < \infty$   $Z^{(L,t)}_{m2} = Y^{(t,0)}_{m2} C^{(L)}_{22}, \ell=1, \dots, k_\ell, L=1, 2, t=1, \dots, k_t$

$< \infty$ , у которых  $i$ -ые значения  $2 \times 2$ -коррелированных  $z$ -переменных равны:

$$z^{(\ell, L, t)}_{i1} = (u^{(0)}_{i1} \times \sqrt{1+r^{(\ell)}}) \times (-\sin \alpha) + u^{(0)}_{i2} \times \sqrt{1-r^{(\ell)}} \times \cos \alpha, L=1$$

$$z^{(\ell, L, t)}_{i2} = (u^{(0)}_{i1} \times \sqrt{1-r^{(\ell)}}) \times \cos \alpha - u^{(0)}_{i2} \times \sqrt{1-r^{(\ell)}} \times \sin \alpha, L=1$$

$$z^{(\ell, L, t)}_{i1} = (u^{(0)}_{i1} \times \sqrt{1-r^{(\ell)}}) \times \sin \alpha + u^{(0)}_{i2} \times \sqrt{1+r^{(\ell)}} \times \cos \alpha, L=2$$

$$z^{(\ell, L, t)}_{i2} = (u^{(0)}_{i1} \times \sqrt{1-r^{(\ell)}}) \times \cos \alpha - u^{(0)}_{i2} \times \sqrt{1+r^{(\ell)}} \times (-\sin \alpha), L=2;$$

При  $m > n > 2$  для фиксированной диагональной матрицы  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  существуют бесконечные множества:

г) ортонормированных матриц  $C^{(\ell)}_{nn} \in \mathcal{C}\mathcal{C}$ , номер  $\ell = 1, \dots, k_\ell < \infty, n > 2$ ;

д) корреляционных матриц  $R^{(\ell)}_{nn} \in \mathcal{C}\mathcal{R}_\Lambda$ , имеющих спектр  $\Lambda_{nn}$  и матрицу  $C^{(\ell)}_{nn}$  собственных векторов, расположенных по ее столбцам  $R^{(\ell)}_{nn} = C^{(\ell)}_{nn} \Lambda_{nn} C^{(\ell)T}_{nn}, n > 2$ ;

е) многомерных выборок  $U^{(0)}_{mn} \in \mathcal{CN}_s(0, I_{nn}), Y^{(0)}_{mn} \in \mathcal{N}_s(0, \Lambda), Z^{(t,0)}_{mn} \in \mathcal{CN}_s(0, R^{(\ell)}),$  номер  $t=1, \dots, k_t < \infty$ .

Матрицы  $\Lambda_{nn}, C^{(\ell)}_{nn}, R^{(\ell)}_{nn}, Y^{(0)}_{mn}, Z^{(t,0)}_{mn}$  удовлетворяют всем соотношениям ПМ ГК Г. Хотеллинга, а  $\Lambda$ -выборки ОМ ГК  $Y^{(0)}_{mn}, Z^{(t,0)}_{mn}$ , где объем выборок  $m$  зависит от номера  $t$  выборки:  $m=m_t, t=1, \dots, k_t$ , обладают 3 свойствами:

1) при номере  $\ell$ -фиксированном, номере  $t=1, \dots, k_t, M=m_1 + \dots + m_k, k=k_t$ , если  $Y^{(0)} \in \mathcal{CN}_s(0, \Lambda), Z^{(0)}_{mn} \in \mathcal{CN}_s(0, R)$ ,

то объединенная выборка:  $Y_{Mn} = [Y^{(0)T}_{m_1 n} \dots Y^{(0)T}_{m_k n}]^T \in \mathcal{N}_s(0, \Lambda)$ ,

принадлежит множеству  $\mathcal{N}_s(0, \Lambda)$ , а объединенная выборка  $Z_{Mn} = [Z^{(0)T}_{m_1 n} \dots Z^{(0)T}_{m_k n}]^T \in \mathcal{N}_s(0, R)$ ;

принадлежит множеству:  $Z_{mn} \in \mathcal{CN}_s(0, R)$ ;

2) при номере  $t$ -фиксированном, номере  $\ell=1, \dots, k_\ell, N=k_t \times m$ , если выборки объема  $m$   $Y_{mn} \in \mathcal{N}_s(0, \Lambda), Z^{(\ell)}_{mn} \in \mathcal{N}_s(0, R^{(\ell)})$ , то объединенные выборки объема  $N=k_t \times m$  имеют свойства

$$Y_{Nn} = [Y^T_{m_1 n} \dots Y^T_{m_n n}]^T \in \mathcal{N}_s(0, \Lambda),$$

$$Z_{Nn} = [Z^{(0)T}_{m_1 n} \dots Z^{(0)T}_{m_n n}]^T \in \mathcal{N}_s(0, \bar{R}),$$

где  $\bar{R}_{nn} = \{\bar{r}_{ij}\} \in \mathcal{R}_\Lambda, \bar{r}_{ij} = (\gamma_{k_\ell}) \cdot \sum_{i=1}^{k_\ell} r_{ij}^{(\ell)}$ ,

$$R^{(\ell)}_{nn} = \{r^{(\ell)}_{ij}\} \in \mathcal{R}_\Lambda, i=1, \dots, n, j=1, \dots, n$$

3) при одновременно меняющихся номерах  $t=\ell=1, \dots, k$ , разных объемах выборок  $m_1, \dots, m_k$ , в сумме равных  $M=m_1 + \dots + m_k$ , если выборка  $Y^{(\ell)}_{m_n} \in \mathcal{N}_s(0, \Lambda_{nn})$ , выборка  $Z^{(\ell, t)}_{mn} \in \mathcal{N}_s(0, R^{(\ell)}_{nn})$ ,  $m=m_t$ , то объединенные выборки объема  $M=m_1 + \dots + m_k$  принадлежат множествам:

$$Y_{Mn} \in \mathcal{N}_s(0, \Lambda), Z_{Mn} = [Z^{(1,1)T}_{m_1 n} \dots Z^{(k,k)T}_{m_k n}]^T$$





## Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

$$\in N_s \left( 0, \sum_{\ell=1}^k \beta_{\ell} \cdot R_{mn}^{(\ell)} \right) \text{ где } 0 < \beta_{\ell} = m_{\ell} / M < 1, \\ \beta_1 + \dots + \beta_k = 1.$$

Замечание 1. Линейная комбинация корреляционных матриц  $\beta_1 R_{mn}^{(1)} + \dots + \beta_k R_{mn}^{(k)}$  является также корреляционной матрицей, ибо она симметрическая, ее диагональные элементы равны 1:  $\beta_1 + \dots + \beta_k = 1$ , ее внедиагональные элементы по абсолютной величине не превосходят 1:  $\beta_1 r_{ij}^{(1)} + \dots + \beta_k r_{ij}^{(k)} \leq \beta_1 + \dots + \beta_k = 1$ , для каждого внедиагонального элемента  $r_{ij}^{(\ell)}$ ,  $i=1, \dots, n, j=1, \dots, n, \ell=1, \dots, k$ .

Выражение “линейная комбинация корреляционных матриц” было использовано впервые в 1988 г. [4]. В статьях, на научных семинарах, в диссертации, в докладе на Всемирном конгрессе (World Congress of Society Mathematical Statistic and Probabilility Theory of Bernoulli) ученым сообществом оно одобрено в 1980-88гг [4, 5, 8].

### Визуализация темпов изменения значений параметров $\Lambda$ -выборки

При анализе реальных цифровых данных, особенно при добыче знаний из них чрезвычайно важно видеть на 2-мерной плоскости закономерности изменения значений ключевых величин, обобщенно характеризующих свойства изучаемых объектов. Таких величин выявлено и использовано множество. Ограничимся только моделью анализа главных компонент (АГК, [1, 2]). Рассмотрим  $f$ -параметры  $f_1, \dots, f_6$  при  $f_1 = n=2$ , важных для “видения” на 2-мерной плоскости темпов изменения значений параметров  $\Lambda$ -выборки (Таблицы 2, 3, Рисунки 1, 2).

При  $n=2$  в задачах [13-17, 20] регулирования, использования степени коррелированности  $z$ -переменных актуально быстрое наглядное видение темпов изменения значений 5  $f$ -параметров  $f_2, \dots, f_6$  темпов уменьшения значений элементов спектра  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  в зависимости от изменения значений только одного коэффициента корреляции  $r$  (при  $n=2$ , Таблица 2) или  $\varphi$  (при  $n>2$ , Таблица 1, Рисунок 3). Например, при  $r=0.2$  имеем  $\lambda_1=1+r=1.2$ ,  $\lambda_2=1-r=0.8$ ,  $f_1=2$ ,  $f_2=\lambda_1^2+\lambda_2^2=2.08$ ,  $f_3=\lambda_1/\lambda_2=1.5$ ,  $f_4=(\lambda_1)/2=0.6$  ( $\ell=1<2$ ),  $f_5=\lambda_1 \times \lambda_2=0.96$ ,  $f_6=\lambda_1/\lambda_2=1.5$ , а при  $r=0.7$  имеем:  $\lambda_1=1.7$ ,  $\lambda_2=0.3$ ,  $f_1=2$ ,  $f_2=2.98$ ,  $f_3=5.666666$ ,  $f_4=0.85$  ( $\ell=1<2$ ),  $f_5=0.51$ ,  $f_6=5.666666$ . Более подробные и полезные сведения приведены в Таблицах 2 и 3. При  $n>2$  вместо коэффициента корреляции  $r$  применяется коэффициент  $\varphi$ -величина средней квадратической всех  $n^2-n$  коэффициентов корреляции:  $0 < \varphi < 1$ . В Таблице 1 приведены значения  $\varphi = r$ ,  $f_1, \dots, f_6$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ,  $n=6$ . Сравнить динамики изменения  $\ell=3$  элементов  $\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell}$  у 20 спектров из Таблицы 1 позволяет Рисунок 1. Вычисления модельных значений элементов 20

спектров для 20 неизвестных корреляционных матриц, имеющих заданные значения  $f$ -параметров проведены с применением ППП «Спектр» [18-20]. Простота, ясность, легкость восприятия вычисленных данных при  $n=2$  позволяют аналитику выбрать из интересующих его строк таблицы 1 полезные цифровые знания. Из Таблиц 1, 2, 3 можно увидеть аналогичность динамик (на Рисунке 3- элементов  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ ) зависимостей 2 или 3 из 5  $f$ -параметров  $f_2, \dots, f_5$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (при  $n=2$  и при  $n=6>2$ ) от изменения значений только одного коэффициента корреляции  $r$  и от изменения величины средней квадратической коэффициентов корреляции  $\varphi$   $0 < r < 1$  и  $0 < \varphi < 1$ .

Выбранная в качестве входного объекта в ОМ ГК статистика  $\Lambda_{22}$  стала *параметром* множества выборок  $N_s(0, \Lambda_{22})$ . Выборок  $U_{m2}^{(t)}$  существует бесконечное число: ее номер  $t$  принимает целые значения:  $t=1, \dots, k_t < \infty$ . Матрицу  $Y_{m2}^{(t)} = U_{m2}^{(t)} \Lambda_{22}^{(1/2)}$  главных компонент также существует бесконечное число. Матрице  $R_{22}$  (зависящей от одной величины ны  $r = \Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ ) соответствует 2 набора собственных векторов (они приведены выше), причем элементы  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  матрицы собственных векторов  $C_{22}^{(t)}$  зависят от одного угла  $\alpha = \pi/4$ , охарактеризованного выше. Обозначим конечное множество матриц  $\{C_{22}^{(L)}\}, L=1, 2$ . Значение угла  $\alpha$  равно:  $0 < \alpha = \pi/4$ , при  $L=1, 2$ . При других значениях угла  $\alpha$  нарушается условие нормированности векторов  $z$ -переменных вида:  $(1/m) \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 = r = \Gamma_{21} = r$ ,  $(1/m) \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_1 = 1$ ,  $(1/m) \mathbf{z}_2^T \mathbf{z}_2 = 1$ . Условие нормированности (равенства нормы 1) векторов  $z$ -переменных, участвующих в формуле вычисления коэффициента корреляции Пирсона, является обязательным по определению. Читатель может воспользоваться данными из Таблиц 2, 3 и проверить расчеты, изменив значения угла  $\alpha$  из графы Таблицы 2 или 3. На Рисунке 1 визуализированы в виде облака точек пары чисел  $\{(y_{k1}, y_{k2})\}, k=1, \dots, 20$ . В ней матрица  $N_{22}$  чисел точек:  $n_{11}=6$ ,  $n_{12}=5$ ,  $n_{21}=3$ ,  $n_{22}=6$ ,  $n_{11}+n_{12}+n_{21}+n_{22}=20$ , такова, что 1-ая ось эллипса лежит на оси абсцисс, т.е. горизонтальна. Ортогональным преобразованием матрицы  $Y_{m2}^{(t)}$ ,  $t=1$ , получают значения  $z$ -переменных (они приведены в 2-х последних столбцах таблицы 2 и 3). На рисунке 2 эти пары чисел  $(z_{i1}, z_{i2}), i=1, \dots, 20$ , визуализированы в виде облака точек. Здесь 1-ая ось эллипса лежит выше оси абсцисс. Матрица  $N_{22}$  чисел точек  $n_{11}=3$ ,  $n_{12}=7$ ,  $n_{21}=6$ ,  $n_{22}=4$ ,  $n_{11}+n_{12}+n_{21}+n_{22}=20$ , соответствует на Рисунке 2 сгущению точек ( $13=7+6$ ) в 1-ом и в 3-м квадрантах из 4-х квадрантов декартовой системы координат. Это - иллюстрация степени вытянутости эллипса с приподнятой осью абсцисс, внутри которого распределены 20 2-мерных точек с координатами  $(z_{i1}, z_{i2}), i=1, \dots, 20$ ,

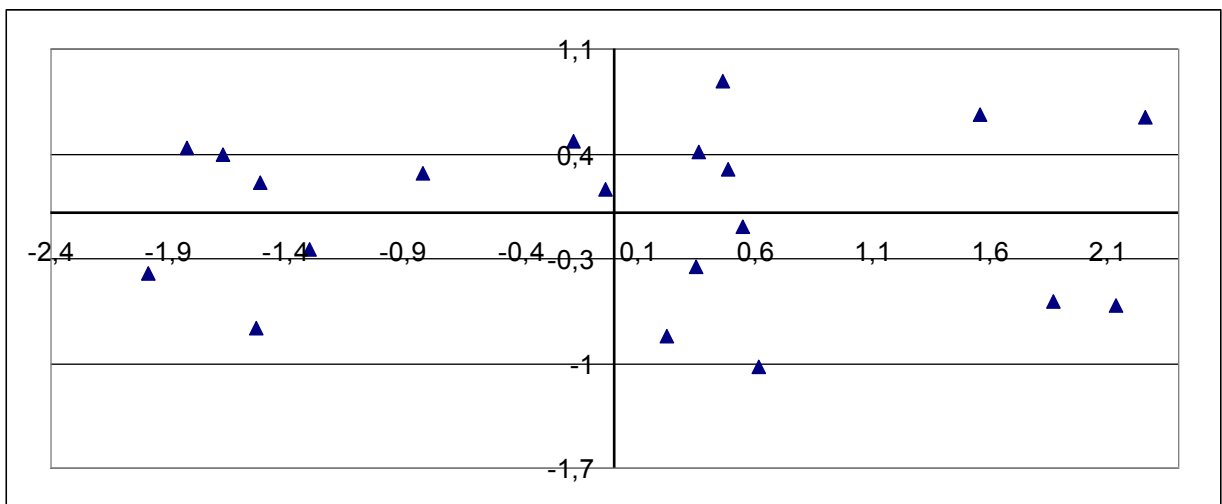
**Impact Factor:**

<b>ISRA (India)</b> = 1.344	<b>SIS (USA)</b> = 0.912	<b>ICV (Poland)</b> = 6.630
<b>ISI (Dubai, UAE)</b> = 0.829	<b>ПИИЦ (Russia)</b> = 0.207	<b>PIF (India)</b> = 1.940
<b>GIF (Australia)</b> = 0.564	<b>ESJI (KZ)</b> = 3.860	<b>IBI (India)</b> = 4.260
<b>JIF</b> = 1.500	<b>SJIF (Morocco)</b> = 2.031	

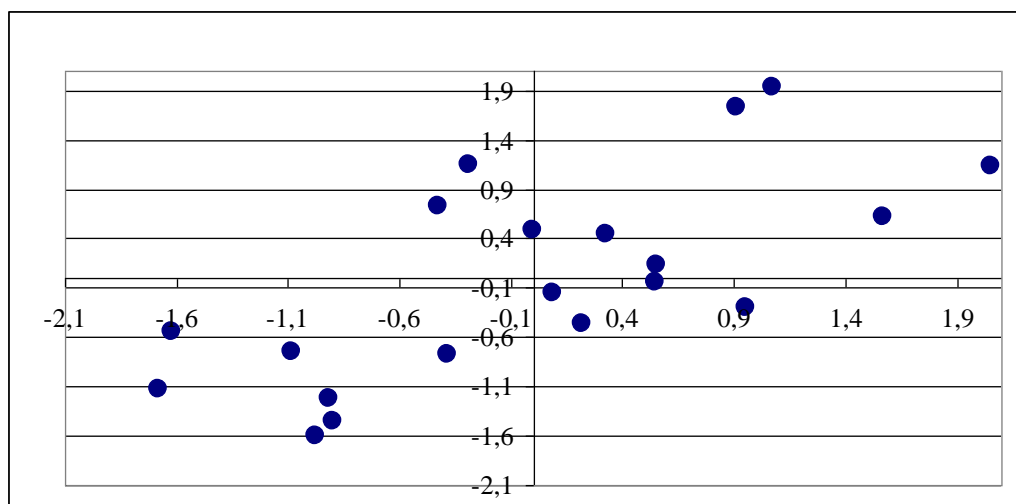
при значении коэф фициента  $r=0.70$ . В ПМ ГК «фигура» из Рисунка 2 преобразуется в «фигуру» из Рисунка 1. Информацию из этих таблиц иллюстрируют преобразования (повороты, операции над объектами “алгебры”, возникающие во взаимодействии с “геометрией”). Она помогает [2,8,12-17] рассмотреть появление и построение графических схем в виде тех геометрических фигур, которые помогли тому восприятию в «шагах развития» восприятия, анализа и визуализации, например при  $n=6$  (или  $\ell=3$ ),

первых  $\ell$  столбцов матриц  $R_{6,6}, C_{66}, \Lambda_{66} Y_{131,6}, S_{66} = \text{diag} (s_1, \dots, s_6)$ , как показано на рисунках 1,2, в таблицах 3,4 из статьи [17].

При заданных значениях средних  $x_j^{cp}$  (с разными единицами измерения) и значений дисперсий  $s_j^2$  значения z-переменных (Таблицы 2 и 3)  $z_{ij} = (x_{ij} - x_j^{cp}) / s_j$ , где  $x_j^{cp} = (x_{1,j} + \dots + x_{20,j}) / 20$ ,  $s_j^2 = (x_{1,j}^2 + \dots + x_{20,j}^2) / 20$ ,  $x_{ij} = x_{ij} - x_j^{cp}$ ,  $i=1, \dots, 20$ ,  $j=1, 2$ , вычисляются легко.



**Рисунок 1 - Облако точек с координатами  $(y_{i1}, y_{i2}), i=1, \dots, 20$**



**Рисунок 2 - Облако точек с координатами  $(z_{i1}, z_{i2}), i=1, \dots, 20$**

**Impact Factor:**

<b>ISRA (India) = 1.344</b>	<b>SIS (USA) = 0.912</b>	<b>ICV (Poland) = 6.630</b>
<b>ISI (Dubai, UAE) = 0.829</b>	<b>ПИИЦ (Russia) = 0.207</b>	<b>PIF (India) = 1.940</b>
<b>GIF (Australia) = 0.564</b>	<b>ESJI (KZ) = 3.860</b>	<b>IBI (India) = 4.260</b>
<b>JIF = 1.500</b>	<b>SJIF (Morocco) = 2.031</b>	

Таблица 1

Модельные значения элементов 20 спектров 20 неизвестных корреляционных матриц, имеющих заданные значения f-параметров спектра

f-parameters of the spectrum $\Lambda_{66}=\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$							Eigen values						
p	f <sub>4</sub>	f <sub>3</sub>	f <sub>2</sub>	f <sub>5</sub>	f <sub>1</sub>	f <sub>6</sub>	ℓ	λ <sub>1</sub>	λ <sub>2</sub>	λ <sub>3</sub>	λ <sub>4</sub>	λ <sub>5</sub>	λ <sub>6</sub>
0.2	0,79 38	3,31500	42773,00 00	0,599 500	6	796017,0 000	4	1,90200 000	1,17500 000	0,91910 000	0,76720 000	0,66320 000	0,57380 000
0.3	0,76 40	6,44800	42924,00 0	0,282 000	6	7,2920	3	2,29200 000	1,39300 000	0,89950 000	0,59910 000	0,46120 000	0,35540 000
0.3 5	0,79 58	8,74524	9,675001	0,182 274	6	2114208, 0000	3	2,54733 800	1,40892 000	0,81845 260	0,53813 780	0,39586 830	0,29128 280
0.4	0,83 03	42808,000 00	##### ####	0,097 690	6	8,5590	3	2,81300 000	0,1,348	0,82040 000	0,50600 000	0,31540 000	0,19670 000
0.4 5	0,86 49	21,63208	12,07500 0	0,046 543	6	357818,0 000	2	3,05660 700	1,38044 600	0,75255 380	0,42503 400	0,24405 930	0,14129 980
0.5	0,77 28	24,23000	13,50000 0	0,031 670	6	1606217, 000	2	3,35600 000	1,28100 000	0,62110 000	0,37610 000	0,22780 000	0,13850 000
0.5 5	0,81 41	47,28865	15,07501 0	0,009 343	6	2653397, 0000	2	3,59983 600	1,28448 700	0,59059 560	0,29829 470	0,15066 100	0,07612 474
0.6	0,86 14	0,11800	160,8000 00	0,001 400	6	13,0017	2	3,83500 000	0,1,333	0,51670 000	0,20180 000	0,08080 000	0,03249 000
0.6 5	0,88 74	185,56070	18,67500 0	0,000 450	6	14,2816	2	4,12541 100	1,19904 300	0,43442 560	0,15997 720	0,05891 169	0,02223 214
0.7	0,92 73	691,49630	20,69999 0	0,000 021	6	18,4896	2	4,38049 700	1,18360 200	0,31980 690	0,08641 125	0,02334 816	0,00633 481
0.7	0,92 11	0,474,1	20,70000 0	0,000 047	6	17,1795	2	4,39200 000	1,13400 000	0,33290 000	0,10090 000	0,03057 000	0,00926 400
0.7 5	0,94 55	1021,1070 0	22,87500 0	0,000 005	6	20,0648	2	4,66958 100	1,00332 000	0,24318 250	0,06262 590	0,01671 715	0,00457 306
0.8	0,96 77	0,4492,00	250,2000 00	0,000 000	6	260,9054	2	4,94300 000	0,86350 000	0,15830 000	0,02901 000	0,00564 900	0,00110 000
0.8	0,96 70	4637,6080 0	25,20001 0	0,000 000	6	27,0671	2	4,94326 700	0,85860 540	0,16113 520	0,03024 825	0,00567 819	0,00106 591
0.8 5	0,86 93	19181,160 00	27,67500 0	0,000 000	6	35,9893	1	5,21571 900	0,68060 610	0,08881 318	0,01275 724	0,00183 247	0,00027 192
0.8 5	0,86 93	19181,160 00	27,67500 0	0,000 000	6	35,9893	1	5,21571 900	0,68060 610	0,08881 318	0,01275 724	0,00183 247	0,00027 192
0.9	0,91 42	76270,000 00	300,3000 00	0,000 000	6	470,7100	1	5,48500 000	0,45870 000	0,04986 000	0,00559 500	0,00063 300	0,00007 192
0.9	0,91 41	92701,780 00	30,30000 0	0,000 000	6	49,4963	1	5,48479 600	0,46352 430	0,04619 431	0,00489 140	0,00053 465	5,9166E -05
0.9 5	0,95 77	0.2458158 E+07	33,07500 0	0,000 000	6	95,6638	1	5,74603 300	0,24074 410	0,01251 814	0,00066 365	3,89E- 05	2,34E- 06
0.9 8	0,98 32	0.133335E +09	34,81200 0	0,000 000	6	215,8054	1	5,89934 700	0,09851 261	0,00208 683	5,25571 E-05	1,45E- 06	4,42E- 08



# Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИИ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

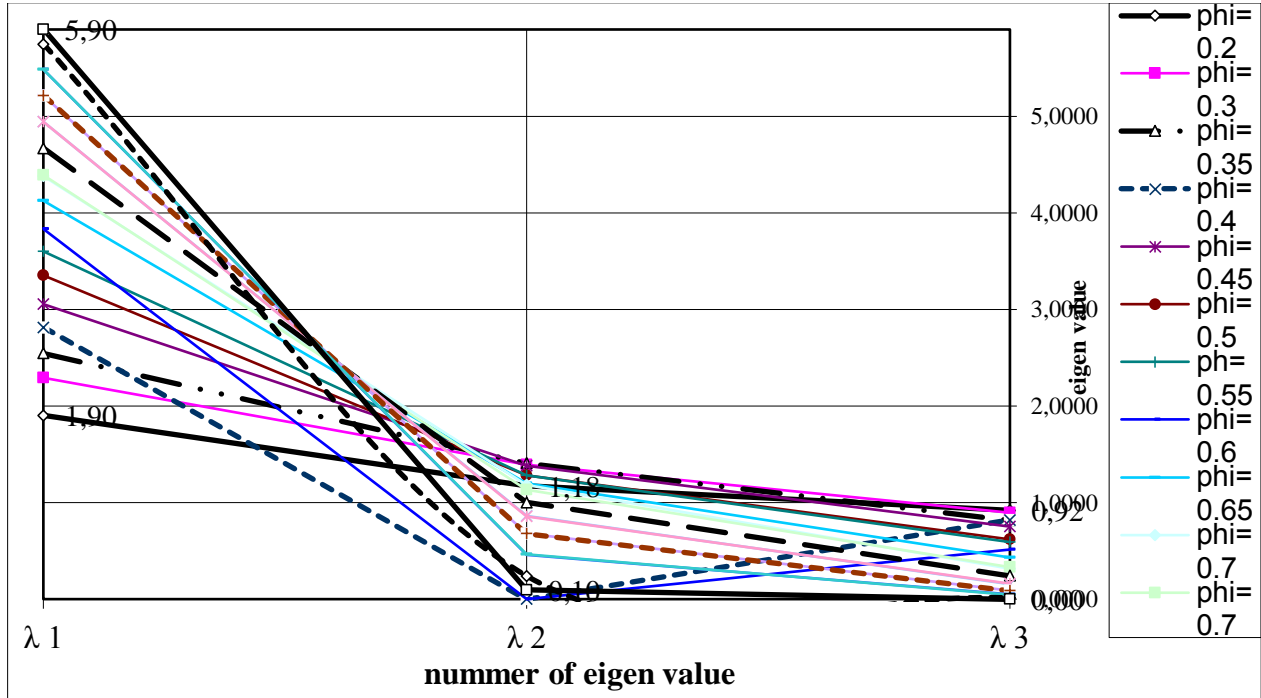


Рисунок 3

Таблица 2

Модельные значения пар u-, y- и z-переменных, с заданными значениями f-параметров спектра корреляционной матрицы R<sub>22</sub> (r<0, a, f<sub>1</sub>,...,f<sub>6</sub>)=> (Λ<sub>22</sub>, C<sup>(L)</sup><sub>22</sub>, Y<sup>(t)</sup><sub>m2</sub>, Z<sup>(L,t)</sup><sub>m2</sub>), t=1, L=1,2, m=20

r	The value of the coefficient r divisor for number π	the angle of rotation =π/4 (radian)	f-parameters of the spectrum Λ=diag(λ <sub>1</sub> , λ <sub>2</sub> )						Eigen values		Values of the u-variables		Values of the y-variables		Values of the z-variables: r=0.60, c <sub>1</sub> =(-sinα,cosα), c <sub>2</sub> =(cosα,sinα)		Values of the z-variables: r= - 0.60, c <sub>1</sub> =(sinα,cosα), c <sub>2</sub> =(cosα,-sinα)	
			f <sub>4</sub> =(1-r)/2	f <sub>3</sub> =(1-r)/(1+r)	f <sub>2</sub> =(1-r)^2/(1+r)^2	f <sub>5</sub> =(1-r)×(1+r)	f <sub>6</sub> =(1-r)/(1+r)	λ <sub>1</sub> =1-r	λ <sub>2</sub> =1+r	u <sub>1</sub>	u <sub>2</sub>	y <sub>1</sub> =√(1+r)	y <sub>2</sub> =√(1-r)	z <sub>1</sub> =y <sub>1</sub> c <sub>1</sub> <sup>T</sup>	z <sub>2</sub> =y <sub>2</sub> c <sub>2</sub> <sup>T</sup>	z <sub>1</sub> =y <sub>1</sub> c <sub>1</sub> <sup>T</sup>	z <sub>2</sub> =y <sub>2</sub> c <sub>2</sub> <sup>T</sup>	
+0,20	4	0,7854	0,4000	0,6667	2,0800	0,9600	0,6667	0,8	1,2	0,265857	-0,6400776	0,33628584	0,404821	0,5240414	-0,0484614	-0,0484614	0,524041403	
+0,30	4	0,7854	0,3500	0,5388	2,1800	0,9100	0,5388	0,7	1,3	1,169666	1,397913	1,4795235	0,884118	0,421015376	-1,6713468	-1,6713468	-0,42101538	
+0,35	4	0,7854	0,3200	0,4811	2,2400	0,8700	0,4811	0,6	1,4	1,192892	1,215906	1,50890229	0,769065	0,52318535	1,6107247	1,6107247	0,523185347	
+0,40	4	0,7854	0,3000	0,4282	2,3200	0,8400	0,4282	0,5	1,5	0,0303	0,293015	0,04083	0,853	0,159918394	0,1021622	0,1021622	-0,15991839	





**Impact Factor:**

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

8	1	7	33				
5				1.0	1.5		
4				000	999		
				000	999		
				1,00000	9	0,4	
				0	000		
						1,000000	1,000000
							1,000000
							1,000000

Таблица 3

Модельные значения пар u-, y- и z-переменных, с заданными значениями f-параметров спектра корреляционной матрицы R<sub>22</sub> (r>0, α, f<sub>1</sub>,...,f<sub>6</sub>)=> (Λ<sub>22</sub>, C<sup>(L)</sup><sub>22</sub>, Y<sup>(t)</sup><sub>m2</sub>, Z<sup>(L,t)</sup><sub>m2</sub>), t=1, L=1,2, m=20

r	int	The value of the coefficient r divisor for number π the angle of rotation =π/4 (radian)	f-parameters of the spectrum Λ=diag(λ <sub>1</sub> , λ <sub>2</sub> )						Eigen values		Values of the u-variable s		Values of the y-variable s		Values of the z-variables: r=+0.70, c <sub>1</sub> =(-sinα,cosα), c <sub>2</sub> =(cosα,sinα)		Values of the z-variables: r= +0.70, c <sub>1</sub> =(sinα,cosα), c <sub>2</sub> =(cosα,-sinα)	
			f <sub>1</sub> =(1+r)/2	f <sub>2</sub> =(1-r)/(1+r)	f <sub>3</sub> =(1+r) <sup>2</sup> +(1+r)	f <sub>4</sub> =(1-r) <sup>2</sup> -(1+r)	f <sub>5</sub> =(1+r) <sup>3</sup> -(1+r)	f <sub>6</sub> =(1-r) <sup>3</sup> /(1+r)	λ <sub>1</sub> =1-r	λ <sub>2</sub> =1+r	u <sub>1</sub>	u <sub>2</sub>	y <sub>1</sub> =√(1+r)	y <sub>2</sub> =√(1-r)	z <sub>1</sub> =y <sub>1</sub> c <sub>1</sub> <sup>T</sup>	z <sub>2</sub> =y <sub>2</sub> c <sub>2</sub> <sup>T</sup>	z <sub>1</sub> =y <sub>1</sub> c <sub>1</sub> <sup>T</sup>	z <sub>2</sub> =y <sub>2</sub> c <sub>2</sub> <sup>T</sup>
+	0,2	0,78	0,40	0,66	2,08	0,96	0,66	0,8	1,2	0,26	0,66	0,34	0,3	-0,49301	-0,00279267	-0,0027927	0,49300931	
			0,50	1,00	2,00	1,00	1,00	1	1	1,16	1,30	1,50	0,7	0,536969	-1,61978815	-1,6197881	-0,5369694	
+	0,3	0,78	0,30	0,48	2,24	0,87	0,48	0,6	1,3	1,19	1,25	1,55	0,6	-0,62887	1,57071045	1,5707105	0,62887371	
+	0,4	0,78	0,30	0,48	2,32	0,84	0,42	0,6	1,4	0,03	0,93	0,04	0,1	0,143251	0,08371735	0,0837174	-0,1432511	
+	0,4	0,78	0,20	0,31	2,40	0,79	0,37	0,5	1,5	1,43	1,00	1,80	0,5	-1,73296	0,91021895	0,910219	1,7329599	
+	0,5	0,78	0,20	0,33	2,50	0,75	0,33	0,5	1,5	1,15	0,81	1,50	0,2	1,213459	-0,91779491	-0,9177949	-1,2134587	
+	0,5	0,78	0,25	0,32	2,60	0,69	0,29	0,4	1,5	1,27	1,16	1,60	0,3	1,456302	-0,90146343	-0,9014634	-1,4563023	
+	0,6	0,78	0,20	0,50	2,72	0,64	0,25	0,4	1,6	1,63	1,11	2,10	0,6	-1,94339	1,07427652	1,0742765	1,94339102	
+	0,6	0,78	0,10	0,12	2,84	0,57	0,21	0,3	1,6	1,73	1,09	2,20	0,6	-1,141	2,05467099	2,054671	1,14100014	
-	0,7	0,78	0,10	0,12	2,84	0,57	0,21	0,3	1,6	1,73	1,09	2,20	0,6	-1,15503	-0,29205953	-0,2920595	1,1550288	
+	0,7	0,78	0,08	0,66	2,98	0,51	0,17	0,3	1,6	1,41	0,83	0,50	0,0	-0,44707	0,32425467	0,3242547	0,4470679	
-	0,8	0,78	0,10	0,12	3,00	0,50	0,14	0,2	1,7	1,27	0,79	0,3	0,4	0,042122	0,54616495	0,546165	-0,0421223	



## Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	PIHИ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

7 5	54	0	85 7	50	75	29	5	5	33 6	47 6	41 2	98						
+	0, 8 0	0, 78 54	0,1 00 1	0,1 11 1	3, 28 00	0, 36 11	0, 11 11	0, 2	1, 8	0, 35 13 8	1,6 19 95 7	0,4 58 14 9	0,8 87 29	0,303446	0,95136715	0,9513672	-0,3034461	
+	0, 8 0	0, 78 54	0,1 00 1	0,1 11 1	3, 28 00	0, 36 11	0, 11 11	0, 2	1, 8	- 0, 13 41	0,8 86 26 1	- 0,1 74 88	0,4 85 42	0,466907	0,21958768	0,2195877	-0,4669068	
+	0, 8 5	0, 78 54	0,0 75 0	0,0 81 08 1	3, 44 50	0, 27 75	0, 08 11	0, 1 5	1, 8 5	0, 37 20 1	0,5 45 42 1	0,4 85 04 7	0,2 98 74	-0,13174	0,55422032	0,5542203	0,13173942	
+	0, 8 5	0, 78 54	0,0 75 0	0,0 81 08 1	3, 44 50	0, 27 75	0, 08 11	0, 1 5	1, 8 5	- 1, 39 64	0,8 02 19 4	- 1,8 20 72	0,4 39 38	1,59813	-0,97675268	-0,9767527	-1,5981296	
+	0, 9 0	0, 78 54	0,0 50 0	0,0 52 63 2	3, 62 00	0, 19 00	0, 05 26	0, 1	1, 9	0, 99 59	0,4 32 95	- 1,2 48 97	0,2 37 14	0,750478	-1,08584015	-1,0858402	-0,7504783	
+	0, 9 0	0, 78 54	0,0 50 0	0,0 52 63 2	3, 62 00	0, 19 00	0, 05 26	0, 1	1, 9	- 0, 62 79	0,4 98 78 4	- 0,8 18 64	0,2 73 2	0,772047	-0,38569075	-0,3856907	-0,7720471	
+	0, 9 5	0, 78 54	0,0 25 0	0,0 25 64 1	3, 80 50	0, 09 75	0, 02 56	0, 5	1, 9	0, 16 78 7	- 1,4 94 86	0,2 18 2	0,8 18 77	-0,73373	-0,42418304	-0,424183	0,73372906	
+	0, 9 8	0, 78 54	0,0 10 0	0,0 10 10 1	3, 02 08	0, 03 96	0, 01 01	0, 2	1, 8	- 1, 52 2	- 0,7 21 84	- 1,9 84 51	0,3 95 37	1,123692	-1,68282854	-1,6828285	-1,1236924	
<b>(1/20)×sum of squares of values of u-, y-, z-variables ==&gt;</b>										1, 1,0 00 00 00 00 0 0	1,7 0,3 00 00 00 00 0 0							
										1,000000	1,000000	1,000000	1,000000					

### Выводы.

В теореме сформулированы и доказаны здесь и в [2,8] 3 свойства  $\Lambda$ -выборок. Интерпретации свойств  $\Lambda$ -выборок ОМ ГК приведены в [2,8]. В работах [9,10] доказаны теорема-критерий равенства решений прямой и обратной задач анализа главных компонент. Примеры модельной и гистограммной адекватности модельной и реальной  $\Lambda$ -выборок имеются в [11-15]. На гистограммах из [2,8,11] и на гистограммах модельных 1-мерных z-переменных видны одинаковости количеств точек в интервалах разбиений на осях интервалов гистограмм модельной и реальной  $\Lambda$ -выборок. Это-обратная задача: при неизвестной многомерной функции распределения случайного вектора  $\xi=(\xi_1, \dots, \xi_n)$  найти 1-мерное распределение каждой из n зависимых компонент  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Решения этой обратной задачи нет [12,13]. Описанных выше свойств достаточно, чтобы, используя полный спектр или спектр с новыми недоминирующими элементами (взамен отсутствующих), можно моделировать [2,10,12-13]  $\Lambda$ -выборки  $Z^{(t)}_{mn}$ ,  $t=1, \dots, k_t < \infty$ , имеющие одну

и ту же корреляционную матрицу  $R_{nn}$  с ее спектром  $\Lambda_{nn}$ . Модельные  $\Lambda$ -выборки, воспроизведенные по *восстановленному* спектру, наравне с  $\Lambda$ -выборками, воспроизведенными по «реальному» спектру, используются в разных предметных областях при решении задачи «извлечения цифровых знаний» из цифровых данных, например, средствами когнитивного моделирования [16,17].

Производственная теорема о  $\Lambda$ -выборках применяется в условиях недостаточно эффективно используемых существующих инструментов, аналитических приемов и программ. Недостаточность числа прикладных работ по АГК, нехватка специалистов, обладающих ресурсами и навыками для извлечения полезной информации, знаний из данных. Нехватка инструментов, способствующих «понимать данные» и направлять исследователя - это проблемы, решаемые научным сообществом. Теорема о  $\Lambda$ -выборках, ее следствия, результаты их применений в значительной степени решают эти проблемы.

### References:

## Impact Factor:

<b>ISRA (India)</b> = 1.344	<b>SIS (USA)</b> = 0.912	<b>ICV (Poland)</b> = 6.630
<b>ISI (Dubai, UAE)</b> = 0.829	<b>PIHHI (Russia)</b> = 0.207	<b>PIF (India)</b> = 1.940
<b>GIF (Australia)</b> = 0.564	<b>ESJI (KZ)</b> = 3.860	<b>IBI (India)</b> = 4.260
<b>JIF</b> = 1.500	<b>SJIF (Morocco)</b> = 2.031	

- Hotelling H. (1933) Analysis of a complex of statistical variables into principal components.-J.Educ. Psychol., 1933, vol.24, p. 417-441, p. 498-520.
- Zhanatauov S.U. (2013) Obratnaya model' glavnykh komponent:-monografiya.-Almaty: Kazstatinform, 2013.- 201 p.
- Zhanatauov S.U. (1980) Metod polucheniya vyborok s zadannymi sobstvennymi chislami ee korrelyatsionnoy matritsy.//Matematicheskie voprosy analiza dannykh. Novosibirsk, 1980. p.62-76.
- Zhanatauov S.U. (1988) Obratnaya zadacha analiza glavnykh komponent.//Doklady po matematike i ee primeneniya, t.2, vyp.3, 1-yy Vsemirnyy Kongress obshchestva im.Bernulli. Matematicheskaya statistika, teoriya veroyatnostey, kombinatorika i ikh primeniya. Trudy. Sektsiya 4 », M.:Nauka,1988. p.331-335.
- Zhanatauov S.U. (1987) The inverse problem of the principal component analysis//Proc. of the 1-st World Congress of Soc.Math.Statist. and Probability Theory of Bernoulli.-Utrecht, 1987. - p.116-119.
- Fursov V.G. (2013) Innovatsionnaya napravlenost' nauchnogo issledovaniya (retsenziya na monografiyu Zhanatauova S.U.«Obratnaya model' glavnykh komponent».-Almaty: Kazstatinform,2013.-201p.). Vestnik KazNTU,№1, p.370-373.
- Zhanatauov S.U. (2014) The inverse problem, inverse model, invertible model. «International Conference "Science: Integrating Theory and Practice"(February 24-25. 2014), Bozeman, Montana, USA/ICET (Intern.Center of Education&Technology,USA). "International Academic Research Conference on Business, Education, Nature and Technology". p.447-449.
- Zhanatauov S.U. (1987) Obratnaya model' glavnykh komponent i ee primeniye. Diss. na soiskanie uch. step..kand.fiz.-mat.nauk: 05.13.11: zashchishchena 8.12. 1987: utv.1.06.1988/Zhanatauov Sapargali Uteповich -Vychislitel'nyy tsentr Sibirskogo otdeleniya AN SSSR, Novosibirsk, 1987, 302 p.
- Zhanatauov S.U. (2013) The criterion of equality of solutions of the direct and inverse problems of the principal component analysis.«Seattle-2013:4th International Academic Research Conference on Business, Education, Nature and Technology». 4-5 November 2013, p.447-449.
- Zhanatauov S.U. (2014) Teorema-kriteriy ravenstva resheniy pryamoy i obratnoy zadach analiza glavnykh komponent. Evraziyskiy soyuz uchenykh.X mezhd. konf.«Sovrem.kontseptsii nauchn. issled.».Moscow, 27-30 dec. 2014. p.55-58.
- Chalmers C.P. (1975) Generation of correlation matrices with a given eigen – structure.-J. Stat. Comp. Simul., 1975, vol.4, p.133-139.
- Zhanatauov S.U. (2016) Model and histogram to adequacy of variables (C,Λ)-samples and real multidimensional sample. International Scientific Journal Theoretical & Applied Science. 2016, № 11, vol. 43, pp. 53-61. <http://t-science.org>
- Zhanatauov S.U. (2017) Modelirovanie mnogomernykh vyborok znacheniy priznakov zernovoy kul'tury. "II mezhdun. nauchno-prakt.konf. «Evropa i tyurkskiy mir: nauka, tekhnika i tekhnologii".Izmir (Turtsiya), 29-31 maya 2017. [www.regionacadem.org](http://www.regionacadem.org)
- Zhanatauov S.U. (2013) Kognitivnaya karta i model' sotsial'no-ekonomicheskikh faktorov kar'ernoy uspešnosti shkol'nikov munitsipal'nykh shkol SShA. Sibirskiy pedagogicheskiy zhurnal. 2013, №6, p.28-33.
- Zhanatauov S.U. (2014) Analiz budushchikh debitorskoy i kreditorskoy zadolzhennostey munitsipalitetov gorodov.Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika. M.:№2 (353), 2014, p. 54-62.
- Zhanatauov S.U. (2015) Kognitivnaya karta i kognitivnaya model' analiza glavnykh komponent (telekomunikatsionnaya otrasl').Natsional'naya assotsiatsiya uchenykh (NAU).IX Mezhd. nauch.-prakt. konf. «Otechestvennaya nauka v epokhu izmeneniya:postulaty proshlogo i teorii novogo vremeni». Rossiya, Ekaterinburg, 16-17 may. 2015. p. 55-58.
- Zhanatauov S.U. (2017) A model of calculation risk changing of the interest rate "yield to maturity date" for foreign currency bonds of the republic of Kazakhstan. International scientific journal Theoretical&Applied Science. 2017,№ 8, vol. 52, p. 19-36. <http://t-science.org>
- Zhanatauov S.U. (1988) O funktsional'nom napolnenii PPP "Spektr". Sistemnoe modelirovanie-13.-Novosibirsk, 1988, p.3-11.
- Zhanatauov S.U. (1987) Dialogovyy paket programm modelirovaniya spektra neizvestnoy korrelyatsionnoy matritsy.//Dialogovye sistemy v zadachakh upravleniya. Novosibirsk, 1987.- p.157-163.
- Zhanatauov S.U. (2011) Virtual'naya laboratoriya. Mater.Vseross. nauchno-praktich. konf. «Innovatsii v nauke–puti razvitiya».-Cheboksary: 2011.p.33 – 44.