

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

COMPUTER ESTIMATIONS OF THICKNESS OF BOUNDARY LAYER
IN SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract: Asymptotical analysis of solutions of singularly perturbed differential equations is one of important problems of the theory and its applications. The present work is devoted to the computer estimation of thickness of boundary layer in differential equations with a small parameter at high derivatives. Maple program for asymptotic expansion was prepared for a model equation of first order. An estimation of a residual term of such expansion was obtained. The aim of the present work is to demonstrate advantages of Maple tools.

Key words: singularly perturbed equation, asymptotic expansion, boundary layer.

Language: Russian

Citation: Seidaliyeva ST (2017) COMPUTER ESTIMATIONS OF THICKNESS OF BOUNDARY LAYER IN SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS. ISJ Theoretical & Applied Science, 05 (49): 64-70.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-05-49-12> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2017.05.49.12>

УДК 517.938

КОМПЬЮТЕРНАЯ ОЦЕНКА ТОЛЩИНЫ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Аннотация: Асимптотический анализ решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений является одной из актуальных задач в теории и ее приложениях. Настоящая работа посвящена компьютерной оценке толщины пограничного слоя в дифференциальных уравнениях с малым параметром при старших производных. Была разработана Maple программа осуществления асимптотического разложения для модельного уравнения первого порядка. Получена оценка остаточного члена такого разложения. Целью работы является демонстрация преимуществ инструментария Maple.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, асимптотическое разложение, пограничный слой.

Введение

Рассмотрим уравнения:

$$L_0 u = f_0, \quad (1)$$

$$L_0 u + \varepsilon L_1 u = f_0 + \varepsilon f_1, \quad (2)$$

где L_0, L_1 - операторы, f_0, f_1 - функции, $\varepsilon > 0$ - малый параметр, u - искомая функция, $x \in D \subseteq R^n$. Тогда если при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место

$$\sup_D \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\| \rightarrow 0 \quad (3)$$

то (2) называется *регулярно возмущенной* [1,2]. В противном случае она называется *сингулярно возмущенной*. В статье рассматривается сингулярно возмущенная задача [1]:

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = -u(x) + x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

$$u(0) = 1.$$

При $\varepsilon = 0$ имеем

$$0 = -u(x) + x, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5)$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.234	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

Ясно, что последняя задача не удовлетворяет начальному условию в (4).

Основные результаты. Вводим в Maple 17 исходные данные задачи (4):

restart : *with(DEtools)* : *with(plots)* : *with(plottools)* :

> *deq* := $\varepsilon \cdot \frac{d}{dx} u(x) = -u(x) + x$; *init* := $u(0) = 1$

$$\begin{aligned} \text{deq} &:= \varepsilon \left(\frac{d}{dx} u(x) \right) = -u(x) + x \\ \text{init} &:= u(0) = 1 \end{aligned}$$

(4) имеет решение

$$u_\varepsilon(x) = -\varepsilon + x + e^{-x/\varepsilon} (1 + \varepsilon):$$

> $u_\varepsilon := \text{rhs}(\text{dsolve}(\{\text{deq}, \text{init}\}))$

$$u_\varepsilon := -\varepsilon + x + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} (1 + \varepsilon)$$

Теперь обозначим и найдем $d_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x)$:

> $d := u_\varepsilon - x$;

$$d := -\varepsilon + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} (1 + \varepsilon)$$

Отсюда получаем, что

$$\sup_{x \in [0,1]} \|d_\varepsilon(x)\| = \sup_{x \in [0,1]} \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\| = \sup_{x \in [0,1]} \|(1 + \varepsilon)e^{-x/\varepsilon} - \varepsilon\| = 1.$$

Итак (4) сингулярно возмущена (рис.1).

Для иллюстрации этого готовим окно:

> $x_min := 0$; $x_max := 1$; $y_min := 0$; $y_max := 1$;

$x_min := 0$

$x_max := 1$

$y_min := 0$

$y_max := 1$

Тогда следующие команды дают нам рисунок 1:

> $d3 := \text{plot}\left(\text{subs}\left(\varepsilon = \frac{1}{2^3}, |d\right), x = 0..x_max, \text{legend} = ["\varepsilon=0.125"], \text{color} = \text{red}, \text{numpoints} = 1500, \text{thickness} = 2\right)$;

> $d4 := \text{plot}\left(\text{subs}\left(\varepsilon = \frac{1}{2^4}, |d\right), x = 0..x_max, \text{legend} = ["\varepsilon=0.0625"], \text{color} = \text{green}, \text{numpoints} = 1500, \text{thickness} = 2\right)$;

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.234	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

- ```
> d5 := plot(subs(ε = 1/2^5, |d|), x = 0 .. x_max, legend = ["ε=0.03125"], color = blue, numpoints
= 1500, thickness = 2):
> display(d3, d4, d5, view = [x_min .. x_max, y_min .. y_max])
```

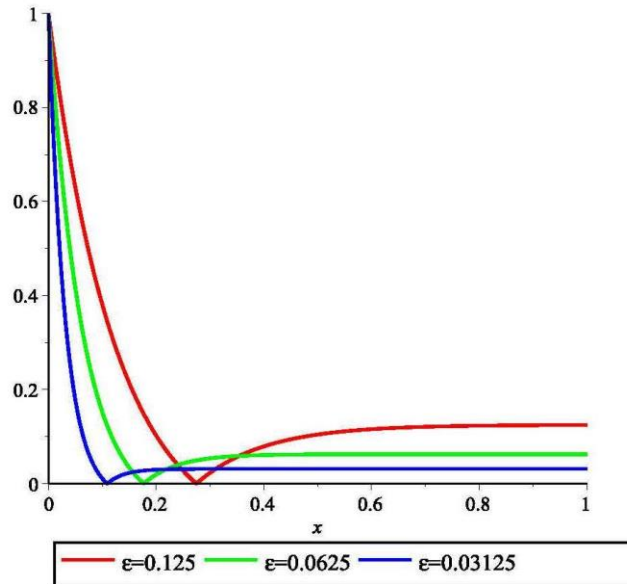


Рисунок 1 - Графики  $|d_\varepsilon(x)|$  при различных  $\varepsilon$ .

Отсюда замечаем следующее:  
 $d_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x)$  достаточно большое при  $x$ , близких к  $x_0 = 0$ . Это объясняется тем, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  значения  $x \approx 0$  мешают устремлению

$$d_\varepsilon(x) = -\varepsilon + e^{-x/\varepsilon}(1 + \varepsilon)$$

к нулю. Другим словами, на каком-то интервале  $0 \leq x \leq \delta$  решение  $u_\varepsilon$  задачи (4) не будет юзизко к решению  $u$  задачи (5) при малых  $\varepsilon$ . Такой интервал  $[0, \delta]$  называется *пограничным слоем*. Теперь приступим к изучению таких слоев.

Поставим вопрос: при каких  $x$  число  $\sup_{x \in [0,1]} \|d_\varepsilon(x)\| = \sup_{x \in [0,1]} \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\|$  будет не меньше заданного числа  $\Delta > 0$ ? Обозначим решение уравнения  $d_\varepsilon(x) = \Delta$  через  $\delta$ :

```
> δ := solve(d - Δ, x)
δ := -ln((Δ + ε) / (1 + ε)) ε
```

Выберем  $\Delta$ :

```
> Δ₀ := 0.1
```

$$\Delta_0 := 0.1$$

Для  $\varepsilon$  пусть

```
> ε₀ := 1/2³
```

$$\varepsilon_0 := \frac{1}{8}$$

Тогда соответствующее  $\delta = \delta_0$  будет равно:

```
> δ₀ := evalf(subs(ε = ε₀, Δ = Δ₀, δ))
```

$$\delta_0 := 0.2011797390$$

Следующие команды готовят к выводу на графический экран решений задач (5), (4) и фазовый портрет (4):

## Impact Factor:

|                          |                        |                      |
|--------------------------|------------------------|----------------------|
| ISRA (India) = 1.344     | SIS (USA) = 0.912      | ICV (Poland) = 6.630 |
| ISI (Dubai, UAE) = 0.829 | PIHHC (Russia) = 0.234 | PIF (India) = 1.940  |
| GIF (Australia) = 0.564  | ESJI (KZ) = 3.860      | IBI (India) = 4.260  |
| JIF = 1.500              | SJIF (Morocco) = 2.031 |                      |

- >  $non\_per := plot(x, x=x\_min..x\_max, color="Teal", linestyle=solid, numpoints=1500, thickness=1, scaling=constrained)$
- >  $per := plot(subs(\epsilon = \epsilon_0, u_\epsilon), x=x\_min..x\_max, color=blue, linestyle=solid, numpoints=1500, thickness=3, legend=["\epsilon=0.125"], scaling=constrained)$
- >  $d\_plot := DEplot(subs(\epsilon = \epsilon_0, deq), u(x), x=x\_min..x\_max, u=y\_min..y\_max, [init], linecolor=blue, numpoints=1500, thickness=3, scaling=constrained)$

Прямая  $x = \delta_0$  :

- >  $x\_vert := implicitplot([x - \delta_0], x=x\_min..x\_max, y=y\_min..subs(x = \delta_0, \epsilon = \epsilon_0, u_\epsilon), grid=[500, 500], linestyle=solid, color="SteelBlue")$

Пусть прямая  $u = 0$  и графики решений (5), (4) пересекаются прямой  $x = \delta_0$  в точках  $P, Q, R$ . Тогда эти точки  $P, Q, R$  можно найти так

- >  $P := plot(Vector([\delta_0]), Vector([0]), style=point, symbol=asterisk, symbolsize=20, legend=["P"], color=blue)$
- >  $Q := plot(Vector([\delta_0]), Vector([\delta_0]), style=point, symbol=diamond, symbolsize=20, legend=["Q"], color=blue)$
- >  $R := plot(Vector([\delta_0]), Vector([subs(x = \delta_0, \epsilon = \epsilon_0, u_\epsilon)]), style=point, symbol=circle, symbolsize=20, legend=["R"], color=blue)$

В итоге следующая команда выводит на монитор рис.2

- >  $display(non\_per, per, d\_plot, x\_vert, P, Q, R, view=[x\_min..x\_max, y\_min..y\_max])$

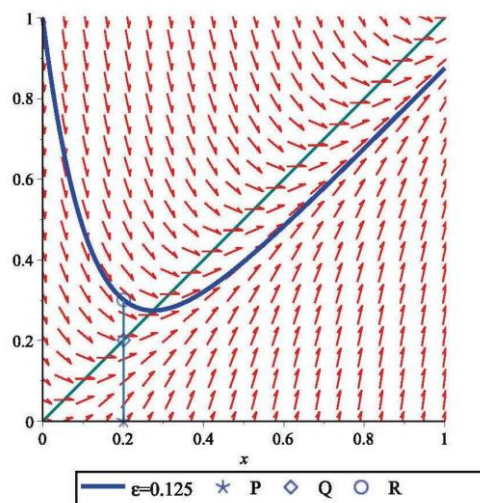


Рисунок 2 - Фазовый портрет (4) при  $\epsilon = 0.125$ .

## Impact Factor:

|                          |                        |                      |
|--------------------------|------------------------|----------------------|
| ISRA (India) = 1.344     | SIS (USA) = 0.912      | ICV (Poland) = 6.630 |
| ISI (Dubai, UAE) = 0.829 | ПИИЦ (Russia) = 0.234  | PIF (India) = 1.940  |
| GIF (Australia) = 0.564  | ESJI (KZ) = 3.860      | IBI (India) = 4.260  |
| JIF = 1.500              | SJIF (Morocco) = 2.031 |                      |

Значит при  $\varepsilon = \frac{1}{2^3}$  мы имеем, что на интервале  $0 \leq x \leq \delta = 0.2011797390$  разность между решением (4) и (5) не будет меньше  $\Delta = 0.1$ :

$$\sup_{x \in [0,1]} \|d_\varepsilon(x)\| \geq \Delta.$$

Результаты при  $\varepsilon = \frac{1}{2^4}$  и  $\varepsilon = \frac{1}{2^5}$  показаны на рисунках 3,4.

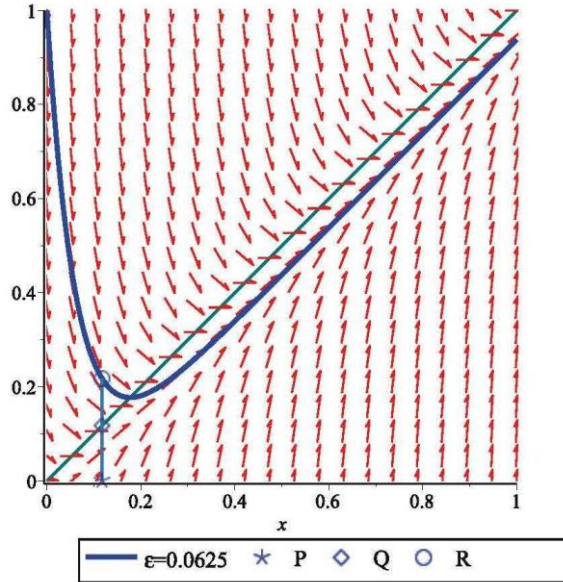


Рисунок 3 - Фазовый портрет (4) при  $\varepsilon = 0.0625$ .

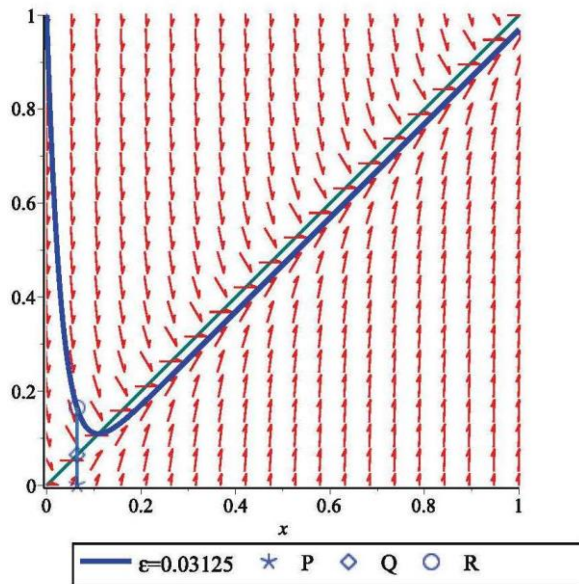


Рисунок 4 - Фазовый портрет (4) при  $\varepsilon = 0.03125$ .

В итоге пограничный слой определяемый условием  $\sup_{x \in [0,1]} \|d_\varepsilon(x)\| \geq \Delta$  при  $\varepsilon = \frac{1}{2^4}$  описывается числом  $\delta = 0.1173563687$ , а при  $\varepsilon = \frac{1}{2^5}$  числом  $\delta = 0.06441946988$ . Отсюда

видно, что толщина пограничного слоя  $\delta = \delta(\varepsilon)$  уменьшается при убывании числа  $\varepsilon$ . Все это подтверждают следующее тореическое предсказание при  $\Delta = \Delta_0 = const$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

## Impact Factor:

|                          |                        |                      |
|--------------------------|------------------------|----------------------|
| ISRA (India) = 1.344     | SIS (USA) = 0.912      | ICV (Poland) = 6.630 |
| ISI (Dubai, UAE) = 0.829 | ПИИЦ (Russia) = 0.234  | PIF (India) = 1.940  |
| GIF (Australia) = 0.564  | ESJI (KZ) = 3.860      | IBI (India) = 4.260  |
| JIF = 1.500              | SJIF (Morocco) = 2.031 |                      |

$$\delta(\varepsilon) = -\varepsilon \ln\left(\frac{\Delta + \varepsilon}{1 + \varepsilon}\right) = -\ln(\Delta)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \rightarrow 0.$$

Рассмотрим теперь асимптотическое разложение решения (4). Для этого ряд

Действительно,

$$u(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x) \quad (6)$$

> series( $\delta, \varepsilon, 2$ )

$$-\ln(\Delta) \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

подставляем в (4) и получаем систему:

$$\begin{aligned} > G := \text{collect} \left( \varepsilon \cdot \frac{d}{dx} \left( u_0(x) + \varepsilon \cdot u_1(x) + \varepsilon^2 \cdot u_2(x) + \varepsilon^3 \cdot u_3(x) + \varepsilon^4 \cdot u_4(x) \right) \right. \\ \left. + \frac{\left( u_0(x) + \varepsilon \cdot u_1(x) + \varepsilon^2 \cdot u_2(x) + \varepsilon^3 \cdot u_3(x) + \varepsilon^4 \cdot u_4(x) \right)}{1} - x, \varepsilon \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G := & \left( \frac{d}{dx} u_4(x) \right) \varepsilon^5 + \left( \frac{d}{dx} u_3(x) + u_4(x) \right) \varepsilon^4 + \left( u_3(x) + \frac{d}{dx} u_2(x) \right) \varepsilon^3 + \left( u_2(x) \right. \\ & \left. + \frac{d}{dx} u_1(x) \right) \varepsilon^2 + \left( \frac{d}{dx} u_0(x) + u_1(x) \right) \varepsilon + u_0(x) - x \end{aligned}$$

Отсюда

$$> u_0 := x$$

$$u_0 := x$$

$$> u_1 := -\frac{d}{dx} u_0$$

$$u_1 := -1$$

$$> u_2 := -\frac{d}{dx} u_1$$

$$u_2 := 0$$

Остальные члены нули. Следовательно, остаточный член ряда  $\xi(x, \varepsilon) = u_\varepsilon(x) - u(x, \varepsilon)$  находится так

$$\xi := e^{-\frac{x}{\varepsilon}} (1 + \varepsilon)$$

$$> \xi := u_\varepsilon - \left( u_0 + \varepsilon \cdot u_1 + \varepsilon^2 \cdot u_2 \right);$$

Внизу мы показываем график  $\xi(x, \varepsilon)$  при  $\varepsilon = \frac{1}{2^3}$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{2^4}$  и  $\varepsilon = \frac{1}{2^5}$  (рисунок 5):

$$\begin{aligned} > \text{as3} := \text{plot} \left( \text{subs} \left( \varepsilon = \frac{1}{2^3}, \xi \right), x = 0 \dots x_{\text{max}}, \text{legend} = ["\varepsilon=0.125"], \text{color} = \text{red}, \text{numpoints} \right. \\ \left. = 1500, \text{thickness} = 2 \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \text{as4} := \text{plot} \left( \text{subs} \left( \varepsilon = \frac{1}{2^4}, \xi \right), x = 0 \dots x_{\text{max}}, \text{legend} = ["\varepsilon=0.0625"], \text{color} = \text{green}, \text{numpoints} \right. \\ \left. = 1500, \text{thickness} = 2 \right); \end{aligned}$$



## Impact Factor:

|                          |                        |                      |
|--------------------------|------------------------|----------------------|
| ISRA (India) = 1.344     | SIS (USA) = 0.912      | ICV (Poland) = 6.630 |
| ISI (Dubai, UAE) = 0.829 | PIHII (Russia) = 0.234 | PIF (India) = 1.940  |
| GIF (Australia) = 0.564  | ESJI (KZ) = 3.860      | IBI (India) = 4.260  |
| JIF = 1.500              | SJIF (Morocco) = 2.031 |                      |

- ```
> as5 := plot( subs(  $\epsilon = \frac{1}{2^5}, \xi$  ), x=0..x_max, legend = [" $\epsilon=0.03125$ "], color = blue, numpoints  
= 1500, thickness = 2 ) :  
> display( as3, as4, as5, view = [x_min..x_max, y_min..y_max] )
```

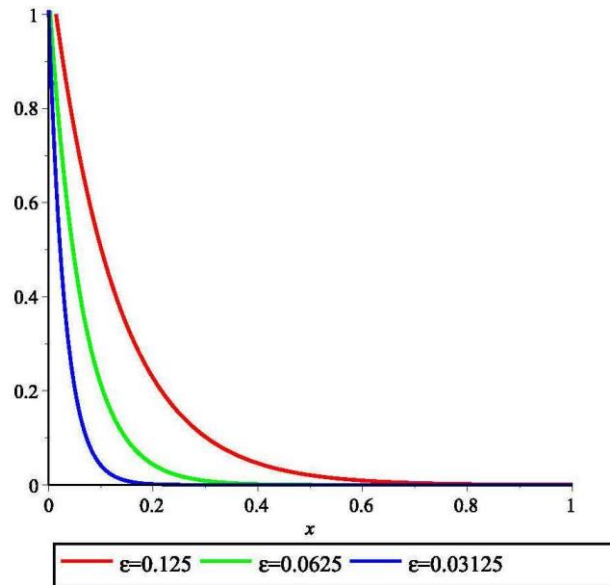


Рисунок 5 – Остаточный член $\xi(x, \epsilon)$ асимптотического разложения (6) уравнения (4).

Ясно, что $\xi(x, \epsilon) = e^{-x/\epsilon}(1 + \epsilon)$ стремится к нулю равномерно по x при $x > \delta$ и $\epsilon \rightarrow 0$. Однако, в пограничном слое $0 \leq x \leq \delta$ при $\epsilon \rightarrow 0$ не имеет места $\xi(x, \epsilon) \rightarrow 0$.

References:

1. Berglund N (2001) Perturbation Theory of Dynamical Systems. Switzerland, Zurich. Available: <https://arxiv.org/abs/math/0111178v1> (Accessed: 10.04.2017).
2. Vasil'eva AB, Butuzov VF (1990) Asimptoticheskie metody v teorii singuljarnyh vozmushhenij. Moscow:Vysshaja shkola. 208p.
3. Kashhenko SA (1998) Bifurkacii cikla v singuljarno vozmushhennyh nelinejnyh avtonomnyh sistemah // Izv. RAEN, serija MMMIU. T.2, № 4. p. 5.
4. Vasil'eva AB, Butuzov VF (1973) Asimptoticheskie razlozhenija reshenij singuljarno vozmushhennyh uravnenij. M.: Nauka. 272 p.
5. Dumortier F, Llibre J, Artes J (2006) Qualitative Theory of Planar Differential Systems. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. 298 p.
6. Perko L (2001) Differential Equations and Dynamical Systems. Texts in Applied Mathematics, 7. Springer, New York. 555 p.
7. Jiang Q, Llibre J (2005) Qualitative classification of singular points // Qualitative Theory of Dynamical Systems. -V.6, -No.1. - p.87-167.
8. Imanaliev MI, Pankov PS (1993) Javlenie udaljajushhegosja pogranchnogo sloja v teorii singuljarno vozmushhennyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij // Dokl. RAN. – T. 333. – № 5. – p. 575–577.
9. Karimov SK (1983) Asimptotika reshenij nekotoryh klassov differencial'nyh uravnenij s malym parametrom pri proizvodnyh v sluchae smeny ustojchivosti toчки pokoja v ploskosti «bystryh dvizhenij»: diss. ... d-ra fiz.-mat.nauk: 01.01.02 / S.K. Karimov. – Osh. – 260 p.