

PACS: 87.63.D-, 87.63.dk

## THE INFLUENCE OF THE DYNAMIC CHANGE OF ULTRASOUND SYSTEM SENSITIVITY FUNCTION ON THE SPECTRA OF DOPPLER RESPONSE SIGNALS

**E.A. Barannik, O.S. Matchenko**

*V.N. Karazin Kharkiv National University  
Svobody Sq. 4, 61022, Kharkov, Ukraine  
e-mail: [sasha.matchenko@gmail.com](mailto:sasha.matchenko@gmail.com)*

Received March 4, 2016

The previously developed continuum model of ultrasound wave scattering from inhomogeneities of mass density and compressibility was generalized in the present paper to the case of dynamically changing sensitivity function of ultrasound diagnostic system. The general expression relating the full power spectrum of Doppler response signal from the region of interest to spectral characteristics of scattering inhomogeneities movement and components of the probing ultrasound fields on spatial and temporal harmonics was obtained. The results of the work can be useful for the analysis of spectra obtained by means of modern diagnostic systems with dynamic focusing of transmitted beams by synthetic aperture method.

**KEYWORDS:** ultrasound, Doppler spectrum, continuum model of scattering, sensitivity function, dynamic focusing, synthetic aperture method

### ВЛИЯНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ СИСТЕМЫ НА СПЕКТРЫ СИГНАЛОВ ДОПЛЕРОВСКОГО ОТКЛИКА

**Е.А. Баранник, А.С. Матченко**

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина  
61022, пл. Свободы, 4, Харьков, Украина*

Развитая ранее континуальная модель рассеяния ультразвуковых волн на неоднородностях плотности и сжимаемости обобщена в настоящей работе на случай динамически изменяющейся функции чувствительности ультразвуковой диагностической системы. Получено общее выражение, связывающее полный спектр мощности сигнала ультразвукового доплеровского отклика из области интереса, спектральные характеристики движения рассеивающих флуктуаций плотности и сжимаемости и компоненты зондирующего ультразвукового поля на пространственных и временных гармониках. Результаты работы могут быть полезны при анализе спектров, полученных современными диагностическими системами с динамическим фокусированием излучаемых пучков по методу синтезированной апертуры.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** ультразвук, доплеровский спектр, континуальная модель рассеяния, функция чувствительности, динамическое фокусирование, метод синтезированной апертуры

### ВПЛИВ ДИНАМІЧНОЇ ЗМІНИ ФУНКЦІЇ ЧУТЛИВОСТІ УЛЬТРАЗВУКОВОЇ СИСТЕМИ НА СПЕКТРИ СИГНАЛІВ ДОПЛЕРІВСЬКОГО ВІДГУКУ

**Є.О. Баранник, О.С. Матченко**

*<sup>1</sup>Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
м. Свободи 4, 61022, Харків, Україна*

Розвинена раніше континуальна модель розсіювання ультразвукових хвиль на неоднорідностях густини та стисливості узагальнена в даній роботі на випадок динамічно змінюваної функції чутливості ультразвукової діагностичної системи. Отримано загальний вираз, що пов'язує повний спектр потужності сигналу ультразвукового доплерівського відгуку з області інтересу, спектральні характеристики руху розсіюючих флуктуацій густини і стисливості та компоненти зондуючого поля на просторових та часових гармоніках. Результати роботи можуть бути корисні при аналізі спектрів, отриманих сучасними діагностичними системами з динамічним фокусуванням випромінюваних пучків за методом синтезованої апертури.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** ультразвук, доплерівський спектр, континуальна модель розсіювання, функція чутливості, динамічне фокусування, метод синтезованої апертури

Как известно, в последнее время развиваются и внедряются в медицинскую практику перспективные методы ультразвуковой доплеровской диагностики состояния сердечно-сосудистой системы и мягких тканей. К числу таких методов относятся, в частности, ультразвуковая доплеровская эхоскопия, включая спектрально-доплеровские исследования и цветное доплеровское картирование потоков крови, тканевая доплерография, вибрационная и соноэластография [1-7].

Для теоретического и экспериментального исследования доплеровских спектров, характерных для различных медицинских приложений ультразвука, необходима адекватная физическая модель рассеяния ультразвука на неоднородностях биологической ткани или жидкости, учитывающая как характеристики движения этих неоднородностей, так и геометрию зондирующих пучков волн и параметры излучения [8].

В частности, с использованием точных решений параболического уравнения теории дифракции для описания ультразвуковых полей и известных методов асимптотической оценки интегралов, был разработан подход, позволяющий получить аналитическое выражение для спектра мощности ультразвукового

доплеровского отклика из области интереса используя его интегральное представление и оценить вклады некоторых физических факторов в результат [9-11].

Более того, на основании континуальной модели со стационарными зондирующими полями в [12] были получены практически важные решения для спектров мощности доплеровского отклика при равномерном, коррелированном, колебательном и равноускоренном движении рассеивателей, исследовано влияние эффекта диффузии. В работе [13] подробно проанализированы амплитудно-частотные характеристики спектров мощности отклика при равноускоренном движении рассеивателей, исследована связь между оптимальными параметрами измерения, ускорением рассеивателей в потоке и волновым вектором зондирующего ультразвукового поля. Эти результаты актуальны и находят применение, в частности, в ультразвуковой доплеровской виброэластографии, спектрально-доплеровских исследованиях, цветовом доплеровском картировании потоков крови и других приложениях.

Тем не менее, до сих пор актуально исследование влияния на спектры ряда физических факторов, характеризующих состояние биологического объекта и его движение. Это касается, в частности, нестационарного движения крови в артериях, коррелированного движения мышечных филаментов и так далее [12-14]. Однако наименее исследовано в теоретическом плане к настоящему времени влияние фактора динамического изменения параметров и геометрии зондирующих ультразвуковых полей на спектры доплеровских сигналов и, соответственно, на оценки параметров движения биологических объектов.

Целью настоящей работы является исследование влияния динамического изменения функции чувствительности ультразвуковой системы на спектры сигналов доплеровского отклика в рамках континуальной модели рассеяния ультразвука на неоднородностях плотности и сжимаемости среды.

### МОДЕЛЬ

Теоретическое исследование процесса рассеяния ультразвука кровью и мягкими тканями осуществлено в [8, 15, 16] в предположении о том, что эти биологические объекты взаимодействуют с полем излучателя подобно изотропной сплошной среде. Рассеяние, таким образом, происходит на неоднородностях плотности  $\rho(\vec{r}, t)$  и сжимаемости  $\beta(\vec{r}, t)$  этой среды. В случае малых флуктуаций

$$\tilde{\rho} \equiv \tilde{\rho}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)^{-1}[\rho(\vec{r}, t) - \rho_0] \ll 1, \tilde{\beta} \equiv \tilde{\beta}(\vec{r}, t) = \beta_0^{-1}[\beta(\vec{r}, t) - \beta_0] \ll 1$$

в области интереса рассеяние можно считать слабым и пренебречь процессами многократного рассеяния волн. Здесь  $\rho_0$  и  $\beta_0$  – пространственно-временные средние значения соответственно плотности и сжимаемости среды. В таком приближении низкочастотный доплеровский отклик из области интереса  $R$ , получающийся после демодуляции гармонического ультразвукового отклика движущейся биологической среды при импульсном режиме излучения ультразвуковых волн, может быть представлен в виде [8]:

$$f(t) = k^2 \int_R e^{2i(\vec{k}\vec{r} + \vartheta_c)} G_p'(\vec{r}, t) \{ \tilde{\beta}(\vec{r}, t) - \rho(\vec{r}, t) \gamma(\vec{r}, t) \} d\vec{r}, \quad (1)$$

где  $\vec{k}$  и  $k = 2\pi/\lambda$  – волновой вектор и волновое число поля ультразвукового преобразователя в приближении плоских волн,  $\lambda$  – длина волны,  $\vartheta_c$  – постоянная составляющая фазы сигнала,  $G_p'(\vec{r}, t)$  – комплексная функция распределения чувствительности ультразвуковой системы по полю, которая в общем случае может зависеть от времени. При импульсном зондировании угол между волновыми векторами падающего и отраженного пучков волн равен нулю, потому безразмерный параметр  $\gamma(\vec{r}, t) = (\vec{k} + \vec{\alpha}_t)(\vec{k} + \vec{\alpha}_r)k^{-2}$  в подынтегральном выражении формулы (1) отличается от единицы лишь пренебрежимо малыми добавками  $\vec{\alpha}_{t,r}$ , обусловленными дифракционной расходимостью пучков волн и отклонением формы волновых фронтов от плоских волн.

В соответствии с общей теорией [8], для описания полного спектра мощности  $S(\omega)$  доплеровского сигнала, формируемого при движении биологических объектов, необходимо найти автокорреляционную функцию доплеровского сигнала (1):

$$R(\tau) = \langle f^*(\vec{r}_0, t_0) f(\vec{r}_1, t_1) \rangle = k^4 \iint_R e^{2i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)} \overline{G_p'(\vec{r}_0, t_0)} G_p'(\vec{r}_1, t_1) C(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \tau) d\vec{r}_0 d\vec{r}_1, \quad (2)$$

$$C(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \tau) = \langle (\tilde{\beta}(\vec{r}_0, t_0) - \rho(\vec{r}_0, t_0)) (\tilde{\beta}(\vec{r}_1, t_1) - \rho(\vec{r}_1, t_1)) \rangle.$$

Здесь  $\tau = t_1 - t_0$  и  $\langle \rangle$  означает усреднение по статистическому ансамблю. Для полного усреднения автокорреляционной функции по движению неоднородностей необходимо учесть различные начальные фазы движения, что соответствует усреднению по начальному моменту времени  $t_0$ . В этом случае как для стационарного, так и для нестационарного детерминированного движения после полного усреднения по движению рассеивающих неоднородностей коррелятор флуктуаций  $C(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \tau)$  оказывается в действительности функцией только разностной координаты и разностного времени.

Спектр мощности доплеровского сигнала представляет собой Фурье-образ корреляционной функции

$$S(\omega) = \int R(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (3)$$

при вычислении которого необходимо учитывать явную зависимость от времени функции чувствительности ультразвуковой системы.

**РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ**

В практических приложениях регистрация сигналов ультразвукового доплеровского отклика производится в течение конечного промежутка времени  $T$ . В этом случае оценку спектра мощности доплеровского сигнала можно получить путем периодического продолжения с периодом  $T$  подынтегральных функций чувствительности в выражении (2) и выполнить их разложение в ряд Фурье:

$$G_p^{i*}(\vec{r}_0, t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t_0 / T} G_p^{i*}\left(\vec{r}_0, \frac{2\pi}{T} n\right), \tag{4}$$

$$G_p^i(\vec{r}_1, t_1) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i j (t_0 + \tau) / T} G_p^i\left(\vec{r}_1, \frac{2\pi}{T} j\right). \tag{5}$$

Коррелятор флуктуаций также представим в виде разложения в интеграл Фурье по пространственному аргументу и в виде ряда Фурье по времени:

$$C(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{q} e^{i\vec{q}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i m \tau / T} C\left(\vec{q}, \frac{2\pi}{T} m\right). \tag{6}$$

Здесь  $C(\vec{q}, 2\pi m / T)$  дает представление о величине спектральных компонент корреляционной функции.

Подставляя приведенные разложения (4), (5) и (6) в (3), приходим к следующему выражению для спектра мощности:

$$S = \frac{k^4}{(2\pi)^3} \int dt e^{i\omega t} \int d\vec{q} \iint_R d\vec{r}_1 d\vec{r}_0 e^{i(\vec{q} + 2\vec{k})(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)} \sum_{j,n,m} \overline{e^{\frac{2\pi i}{T}(n t_0 - j(t_0 + \tau) - m\tau)}} \cdot C\left(\vec{q}, \frac{2\pi}{T} m\right) G_p^i\left(\vec{r}_1, \frac{2\pi}{T} j\right) G_p^{i*}\left(\vec{r}_0, \frac{2\pi}{T} n\right). \tag{7}$$

Нетрудно заметить, что используя интегральное представление

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \tau} d\tau = \delta(\omega)$$

и фильтрующее свойство дельта-функции, выражение (6) можно свернуть по одному из индексов. Таким образом, до усреднения по начальной фазе движения имеем

$$S = \frac{k^4}{(2\pi)^2} \int d\vec{q} \iint_R d\vec{r}_1 d\vec{r}_0 e^{i(\vec{q} + 2\vec{k})(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)} \sum_{j,n} \overline{e^{\frac{2\pi i t_0}{T}(n-j)}} \cdot C\left(\vec{q}, \omega - \frac{2\pi}{T} j\right) G_p^i\left(\vec{r}_1, \frac{2\pi}{T} j\right) G_p^{i*}\left(\vec{r}_0, \frac{2\pi}{T} n\right).$$

Усреднив в пределах периода множитель, зависящий от  $t_0$  и учитывающий начальную фазу изменения функции чувствительности, получаем

$$\overline{e^{\frac{2\pi i t_0}{T}(n-j)}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{\frac{2\pi i t_0}{T}(n-j)} dt_0 = \frac{1}{2\pi i(n-j)} \{e^{i\pi(n-j)} - e^{-i\pi(n-j)}\} = \begin{cases} 0 \forall j \neq n \\ 1 \forall j = n \end{cases}$$

Исключив нулевые слагаемые при суммировании по  $n$ , приходим к следующему выражению для спектра мощности:

$$S = \frac{k^4}{(2\pi)^2} \int d\vec{q} \iint_R d\vec{r}_1 d\vec{r}_0 e^{i(\vec{q} + 2\vec{k})(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} C\left(\vec{q}, \omega - \frac{2\pi}{T} j\right) G_p^i\left(\vec{r}_1, \frac{2\pi}{T} j\right) G_p^{i*}\left(\vec{r}_0, \frac{2\pi}{T} j\right).$$

Наконец, вводя обозначения

$$\omega_j = \frac{2\pi}{T} j,$$

$$G(\vec{q} + 2\vec{k}, \omega_j) = \int d\vec{r} e^{i(\vec{q} + 2\vec{k})\vec{r}} G_p^i(\vec{r}_1, \omega_j),$$

получаем

$$S = \sum_{j=-\infty}^{\infty} S_j, \tag{8}$$

$$S_j = \frac{k^4}{(2\pi)^2} \int d\vec{q} C(\vec{q}, \omega - \omega_j) |G(\vec{q} + 2\vec{k}, \omega_j)|^2.$$

Общая формула (8) прямым образом обобщает интегральное выражение для спектра мощности

$$S = \frac{k^4}{(2\pi)^3} \int d\vec{q} C(\vec{q}, \omega) |G(\vec{q} + 2\vec{k})|^2,$$

полученное в [12] для стационарных зондирующих полей. Применение последнего ограничено анализом данных, полученных традиционными импульсными зондирующими системами, использующими один

ультразвуковой излучатель или фазированную решетку, которые обеспечивают последовательное излучение и прием отраженных волн, при этом вся последовательность излученных импульсов характеризуется одной и той же геометрией волновых фронтов. Такой подход имеет ряд недостатков, связанных с ограничениями на разрешающую способность, возможностью получения достаточного количества данных для точного разрешения потоков по скорости и оптимальной фокусировкой при излучении только на одной фиксированной глубине [17]. Выражение (8) дает принципиальную возможность исследования влияния динамического фокусирования на параметры конкретных доплеровских и спектрально-доплеровских ультразвуковых медицинских диагностических методик.

### ВЫВОДЫ

В настоящей работе представлена общая теория, пригодная для описания альтернативной современной технологии динамического фокусирования излучаемых ультразвуковых пучков по методу синтезированной апертуры [17-19]. В соответствии с этой технологией каждый зондирующий импульс ультразвуковых волн характеризуется своей геометрией и, в частности, направлением распространения волн, а для фокусирования волн при излучении и восстановлении изображения биологического объекта используется когерентное сложение сигналов ультразвукового отклика, полученных от совокупности таких зондирующих импульсов. Полученные в настоящей работе результаты важны для понимания и совершенствования этого и родственных перспективных методов ультразвуковой визуализации, поскольку в общем виде связывают наблюдаемые спектры мощности ультразвукового доплеровского отклика с динамически изменяющейся геометрией зондирующих ультразвуковых полей.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hoskins P.R., McDicken W.N. Colour ultrasound imaging of blood flow and tissue motion // *The British journal of radiology*. – 1997. – Vol. 70. – P. 878-890.
2. Pulkovski N., Schenk P., Maffiuletti N.A., Mannion A.F. Tissue Doppler imaging for detecting onset of muscle activity // *Muscle Nerve*. – 2008. – Vol. 37. – P. 638-649.
3. Wells P.N.T. Ultrasonic colour flow imaging // *Phys. Med. Biol.* – 1994. – Vol. 39. – P. 2113-2145.
4. Wells P.N.T. Doppler study of the vascular system (review) // *European Journal of Ultrasound*. – 1998. – Vol. 7. – No. 1. – P. 3-8.
5. Gao L., Alam S.K., Lerner R.M., Parker K.J. Sonoelasticity imaging: theory and experimental verification // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1995. – Vol. 97. – P. 3875-3886.
6. Gao L., Parker K.J., Lerner R.M., Levinson S.F. Imaging of the elastic properties of tissue – a review // *Ultrasound Med. Biol.* – 1996. – Vol. 22. – P. 959-977.
7. Ophir J., Alam S.K., Garra B.S., Kallel F., Konofagou E., Krouscop T.A., Merritt C.R.B., Righetti R., Souchon R., Srinivasan S., Varghese T. Elastography: imaging the elastic properties of soft tissues with ultrasound (review article) // *J. Med. Ultrasonics*. – 2003. – Vol. 29. – P. 155-171.
8. P.J. Fish. Doppler methods // *Physical principles of medical ultrasonics* // Ed. by Hill C.R. Chichester: Ellis Horwood Limited, 1986. – P. 338-376.
9. Barannik E.A. Influence of diffraction divergence and beam width on the Doppler signal spectrum // *Sov. Phys. Acoust.* – 1992. – Vol. 38. – No. 2. – P. 127-131.
10. Barannik E.A. The Doppler signal spectrum bandwidth at pulse radiation mode // *Acoustical Physics*. – 1993. – Vol. 39. – No. 5. – P. 496-498.
11. Barannik E. A. The effect of ultrasound wave focusing on the mean-square width of the Doppler spectrum // *Acoustical Physics*. – 1994. – Vol. 40. – No. 2. – P. 188-190.
12. Skresanova I.V., Barannik E.A. Correlation functions and power spectra of Doppler response signals in ultrasonic medical applications // *Ultrasonics*. – 2012. – Vol. 52. – No. 5. – P. 676-684.
13. Barannik E.A., Matchenko O.S. Correlation function and the power spectrum of the Doppler ultrasound response signal of uniformly accelerated scatterers in fluid flow // *East Eur. J. Phys.* – 2015. – Vol. 2. – No. 1. – P. 37-41.
14. Barannik E.A., Kulibaba A.A., Girnyk S.A., Tolstoluzhskiy D.A., Skresanova I.V. Displacement spectra under isometric muscle contraction: spectral Doppler study and theoretical models of ultrasound response and muscle contraction // *J Ultrasound Med.* – 2012. – Vol. 31 – P. 1959 – 1972.
15. Angelsen B.A.J. A theoretical study of the scattering of ultrasound from blood // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* BME-27 – 1980 – P. 61–67.
16. Dickinson R.J., Nassiri D.K. Reflection and scattering // *Physical Principles of Medical Ultrasonic*, second ed. // Ed. by Hill C.R., Bamber J.C., terHaar G.R. – John Wiley, 2004. – P. 191–222.
17. Jensen J.A., Nikolov S.I., Gammelmark K.L., Pedersen M.H. Synthetic Aperture Ultrasound Imaging // *Ultrasonics* – 2006 – Vol. 44. – P. e5 – e15
18. Yao H. Synthetic Aperture Methods for Medical Ultrasonic Imaging – Oslo: Department of Informatics, University of Oslo, 1997.
19. Holm S., Yao H. Improved framerate with synthetic transmit aperture imaging using prefocused subapertures // 1997 IEEE Ultrasonics Symposium. – 1997.