Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 4(24). C. 208-212. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-208-212

УДК 517.954

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЕМ САМАРСКОГО ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А. М. Шхагапсоев

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: sh2ps@yandex.ru

Рассматриваются краевые задачи для уравнения третьего порядка параболического типа с дробной производной Капуто. Методом энергетических неравенств доказано единственность и существование обобщенного решения краевой задачи с нелокальным условием Самарского для уравнения с кратными характеристиками со спектральным параметром.

Ключевые слова: априорная оценка, краевая задача, условие Самарского, дробная производная, производная Капуто, уравнения с кратными характеристиками, метод интегралов энергии, единственность решения.

MSC 35M13

A PRIORI ESTIMATE OF THE SOLUTION OF A BOUNDARY PROBLEM WITH THE CONDITION OF SAMARA FOR THE GENERALIZED THIRD-ORDER EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

A. M. Shkhagapsoev

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 360000, KBR, Nalchik, st. Shortanova 89a

E-mail: sh2ps@yandex.ru

The boundary value problems for the third-order equation of parabolic type with fractional derivative of Caputo are considered. The uniqueness and existence of a generalized solution of the boundary value problem with a non-local Samara condition for the equation with multiple characteristics with a spectral parameter is proved by the method of energy inequalities.

Key words: a priori estimation, boundary value problem, Samara condition, fractional derivative, Caputo derivative, equations with multiple characteristics, energy integrals method, uniqueness of the solution.

Введение

В настоящее время теория краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка является одним из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений. Наблюдается существенный рост применения уравнений с частными производными дробного порядка при описании физических и химических процессов, протекающих в средах с фрактальной структурой, а так же при моделировании биологических явлений [1]. Работа [2] посвящена вопросам обобщения операций дифференцирования и интегрирования с целых порядков на дробные, а также приложениями теории дробного интегрирования и дифференцирования.

Уравнение третьего порядка с кратными характеристиками содержащее производную первого порядка по времени

$$u_y = u_{xxx} + f(x,y),$$

впервые было рассмотрено в работах [3]–[5]. Полученные в них результаты были обобщены для уравнения (2n-1)-го порядка в работе [6]. В работе [7] построены фундаментальные решения с применением преобразования Лапласа, теории потенциалов и получены оценки этих решений.

Для уравнения

$$u_y = u_{xxx} + a_1(x,y)u_x + a_2(x,y)u + f(x,y),$$

в работе [8] доказано единственность решения и построена функция Грина краевой задачи Каттабрига.

В работах [9]–[10] получены априорные оценки решения различных краевых задач, в том числе задачи Каттабрига для уравнения с кратными характеристиками с дробной производной Капуто по времени.

В настоящей работе методом энергетических неравенств получена априорная оценка решения краевой задачи для уравнения с кратными характеристиками с дробной производной Капуто по времени.

Постановка задачи

Задача. *В прямоугольнике $\bar{D} = \{(x,y) : 0 \le x \le r, \quad 0 \le y \le h\}$ рассмотрим следующую краевую задачу*

$$\partial_{0y}^{\alpha} u = \lambda_1 u_{xxx} + \lambda_2 u, \qquad 0 < x < r, \quad 0 < y \le h, \tag{1}$$

$$u(0,y) = u(r,y) = 0, \qquad 0 < y < h, \tag{2}$$

$$\int_0^r u(x,y)dx = 0, \qquad 0 < y < h, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad 0 < x < r, \tag{4}$$

где

$$\partial_{0y}^{\alpha}u(x,y)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y\frac{u_{\tau}(x,\tau)}{(y-\tau)^{\alpha}}d\tau$$

– *дробная производная Капуто порядка* α, $0<\alpha<1$ *[11]*, $\lambda_1,\lambda_2-const$. В дальнейшем будем предполагать существование решения $u(x,y)\in C^{3,1}(\bar{D})$ задачи (1) – (4), где $C^{3,1}(\bar{D})$ – класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными третьего порядка по x и первого порядка по y на $\bar{D}$.

Введем следующие обозначения:

$$\|u\|_0^2=\int\limits_0^r u^2(x,y)dx,\qquad D_{0y}^{-\alpha}u(x,y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^y\frac{u(x,\tau)}{(y-\tau)^{1-\alpha}}d\tau$$

– дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка α [1].

Нелокальное условие (3) принято называть условием Самарского.

Из уравнения (1) после почленного его интегрирования по x от $\varepsilon>0$ до $r-\varepsilon>0$ имеем

$$\partial_{0y}^{\alpha}\int\limits_{\varepsilon}^{r-\varepsilon}u(\xi,y)d\xi=\int\limits_{\varepsilon}^{r-\varepsilon}u_{xxx}(x,y)dx=-u_{xx}(\varepsilon,y)+u_{xx}(r-\varepsilon,y).$$

Если $u_{xx}\in C(\bar{D})$, то отсюда при $\varepsilon\to 0$ находим

$$\partial_{0y}^{\alpha}\int\limits_0^r u(\xi,y)d\xi=u_{xx}(r,y)-u_{xx}(0,y).$$

Справедлива следующая

Теорема. *Для рещения* $u=u(x,y)$ *задачи справедлива априорная оцценка*

$$\|u\|_0^2+D_{0y}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2\le M\|\tau'\|_0^2, \text{если}\qquad \lambda_2<0 \tag{5}$$

где M *положительная константа, и априорная оценка*

$$\|u\|_0^2\le\frac{l^2}{2}E_{\alpha}(2\lambda_2y^{\alpha})\|\tau'\|_0^2, \text{если}\qquad \lambda_2>0 \tag{6}$$

где $E_{\alpha}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n/\Gamma(\alpha n+1)$ – *функция Миттаг-Леффлера.*

Доказательство. Умножим уравнение (1) на $u_{xx}(x,y)$ и проинтегрируем по x от 0 до r:

$$\int\limits_0^r u_{xx}\partial_{0y}^{\alpha}udx=\lambda_1\int\limits_0^r\left(\frac{u_{xx}^2}{2}\right)_x dx+\lambda_2\int\limits_0^r u_{xx}udx. \tag{7}$$

После преобразований, тождество (7) примет вид

$$\int\limits_0^r u_{xx}(x,y)\partial_{0y}^{\alpha}u(x,y)dx=\frac{\lambda_1}{2}\left(u_{xx}^2(r,y)-u_{xx}^2(0,y)\right)+\lambda_2\left(u(r,y)u_x(r,y)-u(0,y)u_x(0,y)\right)-\lambda_2\|u_x\|_0^2. \tag{8}$$

Учитывая однородные условия (2)-(3) равенство (8) переходит в следующее равенство

$$-\int_0^r u_{xx}\partial_{0y}^{\alpha}u dx = \lambda_2\|u_x\|_0^2. \quad (9)$$

Преобразуем левую часть в равенстве (9) используя Лемму 1 из [12]

$$\int_0^r u_{xx}\partial_{0y}^{\alpha}u dx = -u_x\partial_{0y}^{\alpha}u\Big|_0^r + \int_0^r u_x\partial_{0y}^{\alpha}u_x dx =$$

$$= u_x(0,y)\partial_{0y}^{\alpha}u(0,y) - u_x(r,y)\partial_{0y}^{\alpha}u(r,y) + \int_0^r u_x\partial_{0y}^{\alpha}u_x dx = \int_0^r u_x\partial_{0y}^{\alpha}u_x dx \geq \frac{1}{2}\partial_{0y}^{\alpha}\|u_x\|_0^2.$$

Подставляя полученное неравенство в (9) будем иметь

$$\partial_{0y}^{\alpha}\|u_x\|_0^2 \leq 2\lambda_2\|u_x\|_0^2. \quad (10)$$

Применив к обеим частям неравенства (10) оператор дробного интегрирования $D_{0y}^{-\alpha}$, с учетом условий теоремы приходим к следующему неравеснтву

$$\|u_x\|_0^2 - 2\lambda_2 D_{0y}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \leq \|\tau'\|_0^2. \quad (11)$$

Учитывая неравенство $\|u_x\|_0^2 \geq \frac{2}{r^2}\|u\|_0^2$, из (11) получим априорную оценку (5) с константой $M = \dfrac{r^2}{2\min\{-\lambda_2 r^2, 1\}}$.

Если $\lambda_2 > 0$, то на основании Леммы 2 из [12] приходим к априорной оценке (6). Из (5) и (6) следует единственность и непрерывная зависимость решения исходной задачи от входных данных. □

Список литературы

[1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nahushev A. M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, M., 2003, 272 pp.]

[2] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987, 668 с. [Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I., *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya*, Nauka i tekhnika, Minsk, 1987, 668 pp.]

[3] Block H., "Sur les equations lineaires aux derivees partielles a carateristiques multiples", *Ark. mat., astron., fys*, **7**:13 (1912), 1–34.

[4] Del Vecchio E., "Sulle equazioni $Z_{xxx} - Z_y + \varphi_1(x,y) = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} + \varphi_1(x,y) = 0$", *Mem. Real acad. cienc. Torino.*, **66** (1915), 1–41.

[5] Del Vecchio E., "Sulle deux problems d'integration pour las equazions paraboliques $Z_{xxx} - Z_y = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} = 0$", *Ark. mat., astron., fys.*, **11** (1916), 32–34.

[6] Cattabriga L., "Potenzialli di linia edi domino per equation nom paraboliche in olue variabli a caracteristiche multiple", *Rendi del Som. Mat. della Univ. di Padova.*, **3** (1961), 1–45.

[7] Cattabriga L., "Un problema al kontorno per una equazione di ordine dispary", *Analli della scuola normale superior di pisa fis e mat.*, **3**:2 (1959), 163–169.

[8] Джураев Т. Д., *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*, ФАН, Ташкент, 1979, 236 с. [Dzhuraev T. D., *Kraevye zadachi dlya uravnenij smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov*, FAN, Tashkent, 1979, 236 pp.]

[9] Шхагапсоев А. М., "Априорная оценка задачи Каттабрига для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками", *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2016, № 1(12), 66–71. [SHkhagapsoev A. M., "Apriornaya ocenka zadachi Kattabriga dlya obobshchennogo uravneniya tret'ego poryadka s kratnymi harakteristikami", *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*, 2016, № 1(12), 66–71].

[10] Шхагапсоев А. М., "Априорные оценки решения краевых задач для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками", *Известия КБНЦ РАН*, 2016, № 6(74), 96–101. [SHkhagapsoev A. M., "Apriornye ocenki resheniya kraevyh zadach dlya obobshchennogo uravneniya tret'ego poryadka s kratnymi harakteristikami", *Izvestiya KBNC RAN*, 2016, № 6(74), 96–101].

[11] Caputo M., *Elasticita e Dissipazione*, Bologna, 1969.

[12] Алиханов А. А., "Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка", *Дифференциальные уравнения*, 2010, № 5(46), 658–664. [Alihanov A. A., "Apriornye ocenki reshenij kraevyh zadach dlya uravnenij drobnogo poryadka", *Differencial'nye uravneniya*, 2010, № 5(46), 658–664].

Для цитирования: Шхагапсоев А. М. Априорная оценка решения краевой задачи с условием Самарского для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 4(24). C. 208-212. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-208-212

For citation: Shkhagapsoev A. M. A priori estimate of the solution of a boundary problem with the condition of samara for the generalized third-order equation with multiple characteristics, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **24**: 4, 208-212. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-208-212

Поступила в редакцию / Original article submitted: 29.03.2018