

УДК 519.633

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Ф. А. Карова

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦРАН, 683032,
г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А
E-mail: karova.fatimat@mail.ru

В работе построены разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для обобщенного уравнения Аллера дробного порядка, а также получены априорные оценки решений разностных задач, из которых следует устойчивость и сходимости построенных разностных схем.

Ключевые слова: производная дробного порядка, устойчивость и сходимости разностных схем, уравнение Аллера дробного порядка.

© Карова Ф. А., 2018

MSC 34A08

NUMERICAL SOLUTION FOR FRACTIONAL HALLER EQUATION

F. A. Karova

Institute of applied mathematics and automation KBSC RAS, 683031, Nalchik,
Shortanova st., 89 A, Russia
E-mail: karova.fatimat@mail.ru

Solution of boundary value problems for the Haller equation in differential and difference settings are studied. By the method energy inequalities, a priori estimates are obtained for the solution of the differential problems.

Key words: fractional derivative, stability and convergence, fractional Haller equation.

© Karova F. A., 2018

Введение

В последнее время наблюдается значительный рост исследования математических моделей, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка. Это связано с тем, что применение дробного исчисления позволяет более точно описать многие процессы в нефтяной промышленности, химии, геофизики и многих других областях.

Например, перенос, описываемый оператором с дробными производными на больших расстояниях от источника, приводит к совершенно иному поведению относительно малых концентраций по сравнению с классической диффузией [1], [2].

В настоящее время существует множество методов решения математических моделей с дробными производными. Одним из аналитических методов является метод преобразования Фурье. В работах [1]–[3] предложены алгоритмы численного решения уравнения диффузии с дробными производными как по пространственной, так и по временной переменной, основанные на методах быстрого преобразования Фурье и на конечных разностях. Для численного решения краевых задач для дифференциального уравнения дробного порядка с переменными коэффициентами применяется метод конечных разностей, предложенный в работах [4]–[6]. В работе [4] были построены разностные схемы для решения краевых задач уравнения диффузии дробного порядка. Для этих задач методом энергетических неравенств были получены априорные оценки, из которых следует единственность и устойчивость построенных схем. В работе [5] был получен разностный аналог дробной производной Капуто повышенного порядка аппроксимации. Были изучены основные свойства этого оператора, построены безусловно устойчивые разностные схемы с порядком сходимости $O(\tau^2 + h^4)$ и доказана их сходимость в пространстве L_2 . В работе [6] было исследовано семейство разностных схем, аппроксимирующих краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка с переменными коэффициентами, и получены достаточные условия устойчивости построенных разностных схем.

В работе [7] для обобщенного уравнения Аллера дробного порядка была построена безусловно устойчивая разностная схема с порядком сходимости $O(\tau + h^2)$ в пространстве L_2 . Разностная схема с порядком аппроксимации $O(\tau + h^4)$ для нелинейного обобщенного уравнения Аллера дробного порядка была построена и исследована в работе [8].

Первая краевая задача

В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим задачу

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \partial_{0t}^\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t)u + f(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где $\partial_{0t}^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t u_s(x, s)(t-s)^{-\alpha} ds$ – дробная производная Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$, $0 < c_1 \leq k(x, t)$, $\eta(x, t) \leq c_2$, $\eta_t(x, t) \geq 0$, $q(x, t) \geq 0$ всюду на \bar{Q}_T .

В дальнейшем будем предполагать существование решения $u(x, t) \in C^{2,1}(\overline{Q_T})$ задачи (1)–(3), где $C^{m,n}(\overline{Q_T})$ – класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка m по x и порядка n по t на $(\overline{Q_T})$.

Лемма 1 [4]. Для любой абсолютно непрерывной на $[0, T]$ функции $v(t)$ справедливо неравенство

$$v(t)\partial_{0t}^\alpha v(t) \geq \frac{1}{2}\partial_{0t}^\alpha v^2(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения

$$\|u\|_0^2 = \int_0^l u^2(x, t) dx, \quad \|u\|_{W_2^1(0, l)}^2 = \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2,$$

$$D_{0t}^{-\alpha} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^l (t - \tau)^{\alpha-1} u(x, \tau) d\tau$$

– дробный интеграл Римана – Лиувилля порядка α .

Теорема 1. Если $k(x, t) \in C^{1,0}(\overline{Q_T})$, $\eta(x, t) \in C^{1,1}(\overline{Q_T})$, $q(x, t), f(x, t) \in C(\overline{Q_T})$, $0 < c_1 \leq k(x, t)$, $\eta(x, t) \leq c_2$, $\eta_t(x, t) \geq 0$, то для решения $u(x, t)$ задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{W_2^1(0, l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq M \left(D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0\|_{W_2^1(0, l)}^2 \right), \quad (4)$$

где $M > 0$ – известная постоянная, не зависящая от T .

Доказательство. Умножим уравнение (1) на u и проинтегрируем по переменной x от 0 до l :

$$\int_0^l u \partial_{0t}^\alpha u dx - \int_0^l u (ku_x)_x dx - \int_0^l u \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)_x dx + \int_0^l qu^2 dx = \int_0^l u f dx. \quad (5)$$

Преобразуем слагаемые, входящие в тождество (5):

$$- \int_0^l u (ku_x)_x dx = \int_0^l ku_x^2 dx \geq c_1 \|u_x\|_0^2, \quad (6)$$

$$\int_0^l u f dx \leq \varepsilon \|u\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2, \quad \varepsilon > 0. \quad (7)$$

В силу леммы 1 получим

$$\int_0^l u \partial_{0t}^\alpha u dx \geq \frac{1}{2} \int_0^l \partial_{0t}^\alpha u^2 dx = \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2, \quad (8)$$

$$-\int_0^l u \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)_x dx = \int_0^l u_x \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x) dx \geq \frac{1}{2} \int_0^l \frac{1}{\eta} \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)^2 dx. \quad (9)$$

Из тождества (5) с учетом (6)–(9) приходим к неравенству

$$\partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + 2c_1 \|u_x\|_0^2 + \int_0^l \frac{1}{\eta} \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)^2 dx \leq 2\varepsilon \|u\|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_0^2. \quad (10)$$

Из (10), в силу неравенства $\|u\|_0^2 \leq \frac{l^2}{2} \|u_x\|_0^2$, при $\varepsilon = \frac{c_1}{l^2}$ получим

$$\partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + c_1 \|u_x\|_0^2 + \int_0^l \frac{1}{\eta} \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)^2 dx \leq \frac{l^2}{2c_1} \|f\|_0^2. \quad (11)$$

Применив к обеим частям неравенства (11) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получим неравенство

$$\|u\|_0^2 + c_1 D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 + \int_0^l D_{0t}^{-\alpha} \frac{1}{\eta} \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)^2 dx \leq \frac{l^2}{2c_1} D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2. \quad (12)$$

Оценим выражение $D_{0t}^{-\alpha} \left(\frac{1}{\eta} \partial_{0t}^\alpha v \right)$, где $v = (\eta u_x)^2$:

$$\begin{aligned} D_{0t}^{-\alpha} \left(\frac{1}{\eta} \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)^2 \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{d\tau}{\eta(x, \tau)(t-\tau)^{1-\alpha}} \int_0^\tau \frac{v'(\xi)d\xi}{(\tau-\xi)^\alpha} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t v'(\xi)d\xi \int_\xi^t \frac{d\tau}{\eta(x, \tau)(t-\tau)^{1-\alpha}(\tau-\xi)^\alpha} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t v'(\xi)d\xi \int_0^1 \frac{d\theta}{\eta(x, \xi + \theta(t-\xi))(1-\theta)^{1-\alpha}\theta^\alpha} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} v(\xi) \int_0^1 \frac{d\theta}{\eta(x, \xi + \theta(t-\xi))(1-\theta)^{1-\alpha}\theta^\alpha} \Big|_0^t - \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t v(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^1 \frac{d\theta}{\eta(x, \xi + \theta(t-\xi))(1-\theta)^{1-\alpha}\theta^\alpha} d\xi \geq \\ &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{v(t)}{\eta(x, t)} B(\alpha, 1-\alpha) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} v(0) \int_0^1 \frac{d\theta}{\eta(x, \theta t)(1-\theta)^{1-\alpha}\theta^\alpha} \geq \\ &\geq \left(\frac{v(t)}{\eta(x, t)} - \frac{v(0)}{c_2} \right) = c_1 u_x^2 - \frac{c_2^2}{c_1} u_x^2(x, 0). \end{aligned} \quad (13)$$

Проинтегрировав неравенство (13) по x от 0 до l и подставив в (12), приходим к априорной оценке (4).

Из априорной оценки (4) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1)–(3) от входных данных.

Третья краевая задача

В задаче (1)–(3) заменим условия (2) условиями

$$\begin{cases} k(0,t)u_x(0,t) + \partial_{0t}^\alpha \eta(0,t)u_x(0,t) = \beta_1(t)u(0,t) - \mu_1(t), \\ -(k(l,t)u_x(l,t) + \partial_{0t}^\alpha \eta(l,t)u_x(l,t)) = \beta_2(t)u(l,t) - \mu_2(t), 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (14)$$

В прямоугольнике \bar{Q}_T рассмотрим третью краевую задачу (1), (3), (14).

Теорема 2. Если $k(x,t) \in C^{1,0}(\bar{Q}_T)$, $\eta(x,t) \in C^{1,1}(\bar{Q}_T)$, $q(x,t), f(x,t) \in C(\bar{Q}_T)$, $0 < c_1 \leq k(x,t), \eta(x,t) \leq c_2$, $\eta_t(x,t) \geq 0$ и $\beta_i(t) \geq \beta_0 > 0, i = 1, 2$, то для решения $u(x,t)$ задачи (1), (3), (14) справедлива априорная оценка

$$\begin{aligned} & \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} (\|u_x\|_0^2 + u^2(l,t) + u^2(0,t)) \leq \\ & \leq M \left(D_{0t}^{-\alpha} (\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) + \|f\|_0^2) + \|u_0\|_{W_2^1(0,l)}^2 \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $M > 0$ – известная постоянная.

Доказательство. Умножим уравнение (1) на u и проинтегрируем по переменной x от 0 до l :

$$\int_0^l u \partial_{0t}^\alpha u dx - \int_0^l (u(ku_x)_x + \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)_x) u dx + \int_0^l qu^2 dx = \int_0^l u f dx. \quad (16)$$

Преобразуем слагаемые, входящие в тождество (16):

$$\begin{aligned} - \int_0^l (u(ku_x)_x + \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)_x) u dx &= \beta_2(t)u^2(l,t) - \mu_2(t)u(l,t) + \beta_1(t)u^2(0,t) - \\ & - \mu_1(t)u(0,t) + \int_0^l ku_x^2 dx + \int_0^l \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x) u_x dx, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\int_0^l u f dx \leq \varepsilon \|u\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2, \quad \varepsilon > 0. \quad (18)$$

В силу леммы 1 получим

$$\int_0^l u \partial_{0t}^\alpha u dx \geq \frac{1}{2} \int_0^l \partial_{0t}^\alpha u^2 dx = \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2. \quad (19)$$

С учетом (17)–(19) тождество (16) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + c_1 \|u_x\|_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{1}{\eta} \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)^2 dx + \beta_2(t) u^2(l, t) + \\ & + \beta_1(t) u^2(0, t) \leq \varepsilon \|u\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_0^2 + \mu_1(t) u(0, t) + \mu_2(t) u(l, t). \end{aligned} \quad (20)$$

Используя неравенства

$$\mu_1(t) u(0, t) \leq \varepsilon u^2(0, t) + \frac{1}{4\varepsilon} \mu_1^2(t),$$

$$\mu_2(t) u(l, t) \leq \varepsilon u^2(l, t) + \frac{1}{4\varepsilon} \mu_2^2(t),$$

$$\|u\|_0^2 \leq l^2 \|u_x\|_0^2 + l(u^2(0, t) + u^2(l, t)),$$

из (20) при $\beta_i(t) \geq \beta_0 > 0$ следует

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + (c_1 - \varepsilon l^2) \|u_x\|_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{1}{\eta} \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)^2 dx + \\ & + (\beta_0 - \varepsilon(l+1))(u^2(l, t) + u^2(0, t)) \leq \frac{1}{4\varepsilon} (\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) + \|f\|_0^2). \end{aligned} \quad (21)$$

При $\varepsilon = \frac{\gamma}{2\delta}$ неравенство (21) примет вид

$$\begin{aligned} & \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \gamma (\|u_x\|_0^2 + u^2(l, t) + u^2(0, t)) + \int_0^l \frac{1}{\eta} \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)^2 dx + \leq \\ & \leq \frac{\gamma}{\delta} (\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) + \|f\|_0^2), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\gamma = \min\{c_1, \beta_0\}$, $\delta = \max\{l^2, l+1\}$.

Применив к обеим частям неравенства (22) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получим априорную оценку (15).

Разностные схемы для первой краевой задачи. Устойчивость и сходимость

Все дальнейшие рассуждения проведем для случая $\eta(x, t) = \eta(x)$. В прямоугольнике \bar{Q}_T введем сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, где

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = l\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0, \tau j_0 = T\}.$$

Задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему:

$$\Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha y = \Lambda_1 y^{(\sigma)} + \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha \Lambda_2 y + \varphi, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq j_0-1, \quad (23)$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(l,t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \tag{24}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{25}$$

где $\sigma = 1 - \frac{\alpha}{2}$, $\varphi = f(x_i, t_{j+\sigma})$, $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_t^s$ – разностный аналог повышенного порядка аппроксимации производной Капуто [5], $c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)}$ при $j = 0$. При $j \geq 1$,

$$c_s^{(\alpha,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)}, & s = 0, \\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)}, & 1 \leq s \leq j-1, \\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)}, & s = j, \end{cases}$$

$$a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha}, \quad a_l^{(\alpha,\sigma)} = (l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha},$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha} [(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}] -$$

$$-\frac{1}{2} [(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}], \quad l \geq 1,$$

$$\Lambda_1 y = (ay_{\bar{x}})_x, \quad a_i^j = k(x_{i-1/2}, t_{j+\sigma}),$$

$$\Lambda_2 y = (by_{\bar{x}})_x, \quad b_i = \eta(x_{i-1/2}),$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j.$$

Погрешность аппроксимации разностной схемы (23)–(25) имеет порядок $O(\tau^2 + h^2)$ (см. [5]).

Лемма 2 [5]. Для любой функции $y(t)$, определенной в сетке \bar{w}_τ , справедливы неравенства

$$y^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y \geq \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y^2).$$

Теорема 3. Разностная схема (23)–(25) безусловно устойчива и для ее решения справедлива априорная оценка

$$\|y^{j+1}\|_1^2 \leq \|y^0\|_1^2 + \frac{l^2 T^\alpha \Gamma(1-\alpha)}{4c_1} \max_{0 \leq j \leq j_0} \|\varphi^j\|_0^2, \tag{26}$$

где

$$\|y\|_1^2 = \|y\|_0^2 + \|\sqrt{by_{\bar{x}}}\|_0^2, \quad \|y\|_0^2 = (y, y), \quad \|y\|_0^2 = (y, y),$$

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad (y, v] = \sum_{i=1}^N y_i v_i h.$$

Доказательство. Умножим уравнение (23) скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}) = (\Lambda_1 y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \Lambda_2 y, y^{(\sigma)}) + (\varphi, y^{(\sigma)}). \tag{27}$$

Преобразуем слагаемые, входящие в тождество (27):

$$-(\Lambda_1 y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) = (a, y_{\bar{x}}^2] \geq c_1 \|y_{\bar{x}}\|^2 \geq \varkappa \|y^{(\sigma)}\|_0^2, \quad (28)$$

где $\varkappa = \frac{2c_1}{l^2}$,

$$|(\varphi, y^{(\sigma)})| \leq \varepsilon \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_0^2, \quad \varepsilon > 0. \quad (29)$$

На основании леммы 2 получим

$$(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}) \geq \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_0^2, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} -(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (by_{\bar{x}})_x, y^{(\sigma)}) &= (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (by_{\bar{x}}), y_x^{(\sigma)}) = (b, y_x^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_{\bar{x}}] \geq \\ &\geq \frac{1}{2} (b, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_{\bar{x}}^2] = \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|\sqrt{b} y_{\bar{x}}\|_0^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Из тождества (27), с учетом (28)–(31), приходим к неравенству

$$\frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_0^2 + \varkappa \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|\sqrt{b} y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq \varepsilon \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_0^2. \quad (32)$$

При $\varepsilon = \varkappa > 0$ получим

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_1^2 \leq \frac{1}{2\varkappa} \|\varphi\|_0^2. \quad (33)$$

Введем обозначение $g_s^{j+1} = \frac{c_{j-s}^{(\alpha, \beta)}}{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}$, тогда неравенство (33) примет вид

$$g_j^{j+1} \|y^{j+1}\|_1^2 \leq \sum_{s=1}^j (g_s^{j+1} - g_{s-1}^{j+1}) \|y^s\|_1^2 + g_0^{j+1} \|y^0\|_1^2 + \frac{1}{2\varkappa} \|\varphi^{j+1}\|_0^2. \quad (34)$$

Учитывая неравенство $g_0^{j+1} \geq \frac{1}{2T^\alpha \Gamma(1-\alpha)} > 0$ [5], получим

$$g_j^{j+1} \|y^{j+1}\|_1^2 \leq \sum_{s=1}^j (g_s^{j+1} - g_{s-1}^{j+1}) \|y^s\|_1^2 + g_0^{j+1} \left(\|y^0\|_1^2 + \frac{T^\alpha \Gamma(1-\alpha)}{\varkappa} \|\varphi^{j+1}\|_0^2 \right). \quad (35)$$

Введем обозначение

$$E = \|y^0\|_1^2 + \frac{T^\alpha \Gamma(1-\alpha)}{\varkappa} \max_{0 \leq j \leq j_0} \|\varphi^j\|_0^2,$$

тогда неравенство (35) примет вид

$$g_j^{j+1} \|y^{j+1}\|_1^2 \leq \sum_{s=1}^j (g_s^{j+1} - g_{s-1}^{j+1}) \|y^s\|_1^2 + g_0^{j+1} E. \quad (36)$$

Очевидно, что из (36) при $j=0$ следует априорная оценка (26). Методом математической индукции докажем, что (26) справедливо и при $j=1, 2, \dots$. Для этого допустим, что априорная оценка (26) имеет место для всех $j=0, 1, \dots, k-1$:

$$\|y^{j+1}\|_1^2 \leq E, \quad j=0, 1, \dots, k-1.$$

Из (36) при $j = k$ получим

$$\begin{aligned} g_k^{k+1} \|y^{k+1}\|_1^2 &\leq \sum_{s=1}^k (g_s^{k+1} - g_{s-1}^{k+1}) \|y^s\|_1^2 + g_0^{k+1} E \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^k (g_s^{k+1} - g_{s-1}^{k+1}) E + g_0^{k+1} E = g_k^{k+1} E. \end{aligned} \quad (37)$$

Теорема 3 доказана.

Из априорной оценки (26) следует устойчивость разностной схемы (23)–(25).

Здесь результаты получены для однородных граничных условий $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$. В случае неоднородных граничных условий $u(0, t) = \mu_1(t)$, $u(l, t) = \mu_2(t)$, граничные условия разностной задачи будут иметь вид:

$$y(0, t) = \mu_1(t), \quad y(l, t) = \mu_2(t). \quad (38)$$

Сходимость разностной схемы (23), (25), (38) следует из априорной оценки (26). Действительно, введем обозначение $y = z + u$. Тогда $z = y - u$ является решением следующей задачи:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z = \Lambda_1 z^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \Lambda_2 z + \Psi, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq j_0-1, \quad (39)$$

$$z(0, t) = 0, \quad z(l, t) = 0, \quad j = 0, \dots, j_0, \quad (40)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad i = 0, \dots, N, \quad (41)$$

где $\Psi = \Lambda_1 y^\sigma + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \Lambda_2 y - \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y + \varphi = O(\tau^2 + h^2)$.

Решение задачи (39)–(41) удовлетворяет оценке (26), следовательно, решение разностной схемы (23), (25), (38) сходится к решению соответственной разностной задачи с порядком $O(\tau^2 + h^2)$.

Разностные схемы для третьей краевой задачи. Устойчивость и сходимость

Для дифференциальной задачи (1), (3), (14) построим разностную схему:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \Lambda_1 y^\sigma + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \Lambda_2 y + \Phi, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (42)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (43)$$

где

$$\Lambda_1 y = \begin{cases} \frac{2}{h} (a_1 y_{x,0} - \bar{\beta}_1(t_{j+\sigma}) y_0), & i = 0, \\ (a y_{\bar{x}})_x, & i = 1, \dots, N-1, \\ -\frac{2}{h} (a_N y_{x,N} + \bar{\beta}_2(t_{j+\sigma}) y_N), & i = N, \end{cases}$$

$$\Lambda_2 y = \begin{cases} \frac{2}{h} b_{1y_x,0}, & i = 0, \\ (by_{\bar{x}})_x, & i = 1, \dots, N-1, \\ -\frac{2}{h} b_{Ny_x,N}, & i = N, \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} \frac{2}{h} \bar{\mu}_1(t_{j+\sigma}), & i = 0, \\ \varphi, & i = 1, \dots, N-1, \\ \frac{2}{h} \bar{\mu}_2(t_{j+\sigma}), & i = N, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_1(t_{j+\sigma}) &= \beta_1(t_{j+\sigma}) + \frac{h}{2} q(0,t), & \bar{\beta}_2(t_{j+\sigma}) &= \beta_2(t_{j+\sigma}) + \frac{h}{2} q(N,t), \\ \bar{\mu}_1(t_{j+\sigma}) &= \mu_1(t_{j+\sigma}) + \frac{h}{2} f(0,t), & \bar{\mu}_2(t_{j+\sigma}) &= \mu_2(t_{j+\sigma}) + \frac{h}{2} f(N,t). \end{aligned}$$

Теорема 4. Разностная схема (42)–(43) абсолютно устойчива и для ее решения справедлива априорная оценка

$$\|y^{j+1}\|_1^2 \leq \|y^0\|_1^2 + \frac{2\delta T^\alpha \Gamma(1-\alpha)}{\gamma} (\|\varphi^{j+1}\|_0^2 + \bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2), \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} \|y\|_1^2 &= \|y\|_0^2 + \|\sqrt{by_{\bar{x}}}\|_0^2, & \|y\|_0^2 &= [y, y], & \|y\|_0^2 &= (y, y), \\ [y, v] &= \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h + \frac{1}{2} y_0 v_0 h + \frac{1}{2} y_N v_N h, & (y, v) &= \sum_{i=1}^N y_i v_i h. \end{aligned}$$

Доказательство. Умножим уравнение (42) скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\left[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)} \right] - \left[\Lambda_1 y^\sigma, y^{(\sigma)} \right] - \left[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \Lambda_2 y, y^{(\sigma)} \right] = \left[\varphi, y^{(\sigma)} \right]. \quad (45)$$

Преобразуем слагаемые, входящие в тождество (45):

$$- \left[\Lambda_1 y^\sigma, y^{(\sigma)} \right] = \bar{\beta}_1(t_{j+\sigma}) y_0^2 + \bar{\beta}_2(t_{j+\sigma}) y_N^2 + \|ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2, \quad (46)$$

$$|(\varphi, y^{(\sigma)})| \leq \varepsilon \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_0^2 + \bar{\mu}_1 y_0 + \bar{\mu}_2 y_N, \quad \varepsilon > 0. \quad (47)$$

На основании леммы 2 получим

$$\begin{aligned} - \left[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \Lambda_2 y, y^{(\sigma)} \right] &= (y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha by_{\bar{x}}) = (b, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_{\bar{x}}) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} (b, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_{\bar{x}}^2) = \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|\sqrt{by_{\bar{x}}}\|_0^2, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\left[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)} \right] \geq \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha |y|_0^2. \tag{49}$$

С учетом (46)–(49) тождество (45) примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha |y|_0^2 + \|ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|\sqrt{b}y_{\bar{x}}\|_0^2 + \beta_0(y_0^2 + y_N^2) \leq \\ & \leq \varepsilon(\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + y_0^2 + y_N^2) + \frac{1}{4\varepsilon}(\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2 + \|\varphi\|_0^2). \end{aligned} \tag{50}$$

Пользуясь известным неравенством $\|y\|_0^2 \leq l^2 \|y_{\bar{x}}\|_0^2 + l(y_0^2 + y_N^2)$, из (50) получим

$$\begin{aligned} & \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha |y|_1^2 + 2(a - \varepsilon l^2) \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + 2 \left(\beta_0 - \frac{\gamma}{2\delta} (l + 1) \right) (y_0^2 + y_N^2) \leq \\ & \leq \frac{\delta}{\gamma} (\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2 + \|\varphi\|_0^2). \end{aligned} \tag{51}$$

При $\varepsilon = \frac{\gamma}{2\delta} > 0$ неравенство (51) примет вид

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha |y|_1^2 \leq \frac{\delta}{\gamma} (\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2 + \|\varphi\|_0^2), \tag{52}$$

где $\gamma = \min \{a, \beta_0\}$, $\delta = \max \{l + 1, l^2\}$.

Дальнейшее доказательство аналогично изложенному выше для теоремы 3.

Численные результаты

Численные расчеты проведены для тестового примера, когда функция

$$u(x) = \sin(\pi x)(t^3 + 3t^2 + 1)$$

является решением задачи (23)–(25) с коэффициентами $k(x, t) = 2 - \sin \pi x$, $\eta(x) = 2 - \cos x$.

В таблицах 1 и 2 приводятся значения погрешностей и порядок сходимости в нормах $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ для разностной схемы при $\alpha = 0.1, 0.5$ и 0.9 соответственно.

Порядок сходимости вычисляется по формуле $\log \frac{e_1}{e_2} \frac{h_1}{h_2}$.

Таблица 1.

$$h = 1/1000$$

α	τ	$\max_{0 \leq j \leq j_0} \ z^n\ _0$	CR in $\ \cdot\ _0$	$\ z\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CR in $\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
0.1	1/20	2,6592e-4		3,7811e-4	
	1/40	6,6029e-5	2,009	9,3880e-5	2,009
	1/80	1,4843e-5	2,153	2,1125e-5	2,152
0.5	1/20	1,1037e-3		1,5687e-3	
	1/40	2,7842e-4	1,987	3,9565e-4	1,987
	1/80	6,8303e-5	2,027	9,7072e-5	2,027
0.9	1/20	1,6664e-3		2,3661e-3	
	1/40	4,1485e-4	2,006	5,8906e-3	2,006
	1/80	1,0169e-4	2,028	1,4442e-4	2,028

Таблица 2.

$$h^2 = \tau^2$$

α	h	$\max_{0 \leq j \leq j_0} \ z^n\ _0$	CR in $\ \cdot\ _0$	$\ z\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CR in $\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
0.1	1/20	6,0943e-3		5,7482e-3	
	1/40	1,5227e-3	2,000	2,1448e-3	2,000
	1/80	3,8061e-4	2,000	5,3650e-4	2,000
0.5	1/20	6,1667e-3		8,6840e-3	
	1/40	1,5411e-3	2,000	2,1703e-3	2,000
	1/80	3,8525e-4	2,000	5,4254e-4	2,000
0.9	1/20	6,2423e-3		8,7905e-3	
	1/40	1,5603e-3	2,000	2,1973e-3	2,000
	1/80	3,9006e-4	2,000	5,4930e-4	2,000

Список литературы

- [1] Головизнин В. М., Киселев В. П., Короткин И. А., *Поероинт IBRAE*, 2003, № 12. [Goloviznin V. M., Kiselev V. P., Korotkin I. A., *Poeroint IBRAE*, 2003, № 12].
- [2] Головизнин В. М., Киселев В. П., Короткин И. А., Юрков Ю. И., “Прямые задачи неклассического переноса радионуклидов в геологических формациях”, *Изв. РАН. Энергетика.*, 2004, № 4, 121–130. [Goloviznin V. M., Kiselev V. P., Korotkin I. A., YUrkov YU. I., “Pryamye zadachi neklassicheskogo perenosa radionuklidov v geologicheskikh formacijah”, *Izv. RAN. ENnergetika.*, 2004, № 4, 121–130].
- [3] Головизнин В. М., Короткин И. А., “Методы численного решения некоторых одномерных уравнений с дробными производными”, *Дифференц. ур-ния.*, **42:7** (2006), 907–913. [Goloviznin V. M., Korotkin I. A., “Metody chislennogo resheniya nekotoryh odnomernyh uravnenij s drobnymi proizvodnymi”, *Differenc. ur-niya.*, **42:7** (2006), 907–913].
- [4] Alikhanov A. A., “Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings”, *Appl. Math. Comput.*, 2012, № 219, 3938–3946.
- [5] Alikhanov A. A., *J. Comput. Phys.*, 2015, № 280, 424–438.
- [6] Алиханов А. А., “Устойчивость и сходимость разностных схем для краевых задач уравнения диффузии дробного порядка”, *Журнал выч. мат. и мат. физ.*, **56:4** (2016), 572–586. [Alihanov A. A., “Ustojchivost' i skhodimost' raznostnyh skhem dlya kraevykh zadach uravneniya diffuzii drobnogo poryadka”, *ZHurnal vych. mat. i mat. fiz.*, **56:4** (2016), 572–586].
- [7] Wu Ch., “Numerical solution for Stokes’ first problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivative”, *Appl. Num. Math.*, 2009, № 59, 2571–2583.
- [8] Chen C. M., Liu F., Turner I., Anh V., “Numerical methods with fourth-order spatial accuracy for variable order nonlinear Stokes’ first problem for a heated generalized second grade fluid”, *Comput. Math. Appl.*, **62** (2011), 971–986.

Для цитирования: Карова Ф. А. Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения Аллера дробного порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2018. № 4(24). С. 166-177. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-166-177

For citation: Karova F. A. Numerical solution for fractional Haller equation, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2018, **24**: 4, 166-177. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-166-177

Поступила в редакцию / Original article submitted: 11.10.2018